

## Módulo 5 – Processos Geométricos Auxiliares I - 27 horas / 36 aulas

1.	Apresentação, características e aptidões dos métodos geométricos auxiliares.	
----	--	--

➤ Apresentação, características e aptidões dos métodos geométricos auxiliares

Ao longo de todos os conteúdos expostos até agora observou-se, sempre, que um segmento de recta se projecta em verdadeira grandeza (VG) apenas no plano de projecção ao qual o segmento é paralelo.

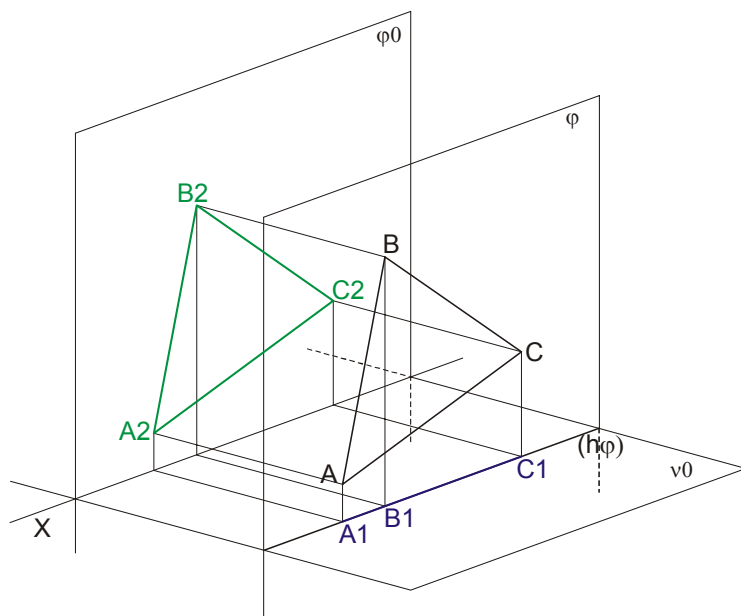
Um segmento de recta oblíquo, por exemplo, não se projecta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projecção, pois não é paralelo a nenhum deles.

Da mesma forma, uma figura plana projecta-se em verdadeira grandeza (VG) apenas no plano de projecção ao qual a figura é paralela.

A figura representa um triângulo [ABC], contido num plano frontal (de frente)  $\varphi$ , bem como as suas projecções frontal e horizontal.

[A2B2C2] é a projecção frontal do triângulo [ABC].

[A2B2C2] e [ABC] são dois triângulos geometricamente iguais, pois o triângulo [ABC] projecta-se em VG no Plano Frontal de Projecção.

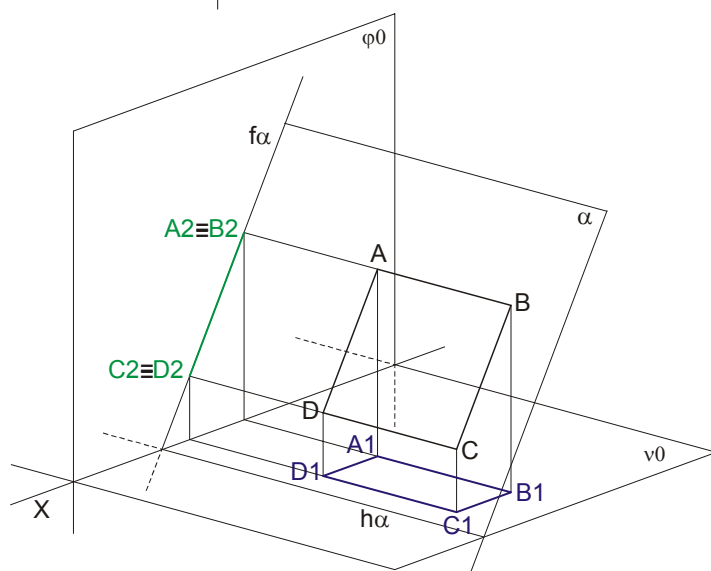


No caso dos segmentos de recta, a deformação máxima é aquela em que a projecção do segmento se reduz a um ponto – é o caso dos segmentos de recta de topo ou verticais.

Já no caso das figuras planas, a deformação máxima é aquela em que a projecção da figura se reduz a um segmento de recta – é o caso das figuras contidas em planos projectantes.

Na figura está representado um quadrado [ABCD], contido num plano de topo  $\alpha$ , bem como as suas projecções frontal e horizontal. A projecção horizontal do quadrado é o rectângulo [A1B1C1D1].

A projecção frontal do quadrado é o segmento de recta [B2C2].



Sempre que um segmento e/ou uma figura plana não é paralela a qualquer dos planos de projecção, a sua projecção nesse plano apresenta, necessariamente, uma deformação, que pode ser maior ou menor.

O estudo que agora se inicia tem como objectivo resolver os problemas referentes a situações em que os segmentos de recta ou figuras planas não se projectam em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projecção, por não serem paralelos a nenhum dos planos de projecção.

Assim, e de uma forma geral, a resolução desse tipo de problemas passa por fazer com que esses segmentos ou figuras planas fiquem paralelas aos planos de projecção ou coincidentes com eles.

Ao processos utilizados para esse efeito denominam-se Processos Geométricos Auxiliares e são três:

- o processo da **mudança do diedro de projecção** (ou mudança de planos);

A mudança do diedro de projecção (também chamada mudança dos planos de projecção), consiste em, mantendo fixo o objecto (segmento de recta ou figura plana), introduzir novos planos de projecção, substituindo os existentes e criando, dessa forma, um novo diedro de projecção, no qual pelo menos um dos planos de projecção seja paralelo ao objecto (segmento de recta ou figura plana).

- o processo da **rotação**;

Rotação consiste em mudar a posição do objecto (segmento de recta ou figura plana), rodando-se em torno de um eixo de rotação (uma recta), mantendo os planos de projecção existentes, de forma que o objecto (segmento de recta ou figura plana) fique paralelo a um dos planos de projecção.

- o processo do **rebatimento**.

Um rebatimento é semelhante a uma rotação e consiste, tal como esta, em rodar o objecto (segmento de recta ou figura plana) em torno de um eixo de rotação (uma recta), sem alterar a posição dos planos de projecção, de forma que o objecto fique paralelo a um dos planos de projecção ou coincidente com um deles.

A diferença entre uma rotação e um rebatimento consiste no facto de, num rebatimento, o eixo de rotação ser uma recta do plano que contém o objecto (segmento de recta ou figura plana) enquanto, numa rotação, o eixo é uma recta exterior ao plano.

Um rebatimento é, assim, uma rotação em que o eixo de rotação é complanar com o objecto a rodar.

Por Processos Geométricos Auxiliares entende-se, assim, um conjunto de processos que visam obter projecções mais favoráveis de um dado objecto para um determinado estudo em curso sobre esse mesmo objecto.

2.	Mudança de diedro de projecção. Generalidades.	
----	--	--

➤ Mudança de diedro de projecção. Generalidades

A mudança do diedro de projecção tem, por objectivo, colocar o objecto numa nova posição em relação aos planos de projecção, através da alteração da posição dos planos de projecção – uma posição mais conveniente para um determinado estudo.

Como já se referiu, o processo da mudança do diedro de projecção consiste em, mantendo fixo o objecto a projectar, introduzir novos planos de projecção, em posições mais favoráveis em relação ao objecto projectado, substituindo os planos de projecção iniciais e criando, dessa forma, novos diedros de projecção, nos quais o objecto se projecte de forma mais favorável para o estudo em curso.

- O plano XY ( $\nu 0$ ) pode designar-se por plano 1 – a projecção de um ponto A nesse plano representa-se por A1.
- O plano XZ ( $\varphi 0$ ) pode designar-se por plano 2 – a projecção de um ponto A nesse plano representa-se por A2.
- O plano YZ ( $\pi 0$ ) pode designar-se por plano 3 – a eventual projecção de um ponto A nesse plano representa-se por A3.

Assim, os novos planos introduzidos designar-se-ão sucessivamente por plano 4, plano 5, plano 6, etc..

As projecções de um ponto A nesses planos representar-se-ão, respectivamente, por A4, A5, A6, etc..

É necessário ter em conta que, em qualquer situação se manterá, sempre, a relação de ortogonalidade entre os dois planos de projecção de qualquer novo diedro de projecção, ou seja, introduzindo um novo plano de projecção, este será, sempre, ortogonal ao plano de projecção que se mantém.

- Na resolução de problemas através deste processo, há três situações a considerar:
1. a escolha do plano de projecção a ser substituído e a posição do novo plano de projecção a ser introduzido;
  2. as novas projecções do objecto – mantém-se uma projecção do objecto (a projecção no plano que se manteve) e há uma nova projecção do objecto (a projecção no plano de projecção que se introduziu), que substitui uma das projecções iniciais e que se relaciona com a projecção que se mantém;
  3. as coordenadas dos pontos – mantêm-se as coordenadas relativas ao plano de projecção que se manteve e alteram-se as coordenadas relativas ao plano de projecção que se substituiu.

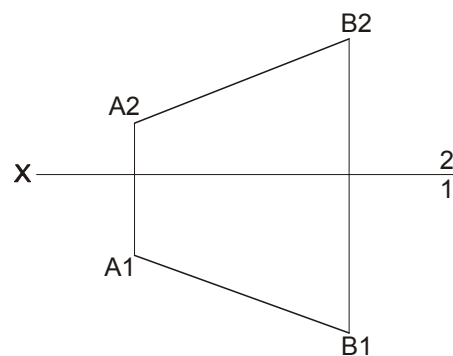
3.	Transformação de um segmento de recta oblíquo num segmento de recta horizontal (de nível). Exercícios práticos de consolidação dos conteúdos expostos.	
----	---	--

➤ Transformação de um segmento de recta oblíquo num segmento de recta horizontal (de nível)

Seja dado um segmento de recta [AB], oblíquo, representado pelas suas projecções.

Pretende-se determinar a verdadeira grandeza (VG) do comprimento do segmento de recta.

Para obtermos a VG de AB é necessário que o segmento fique paralelo a um dos planos de projecção – é necessário, assim, transformar [AB] num segmento horizontal (de nível) ou num segmento frontal (de frente).

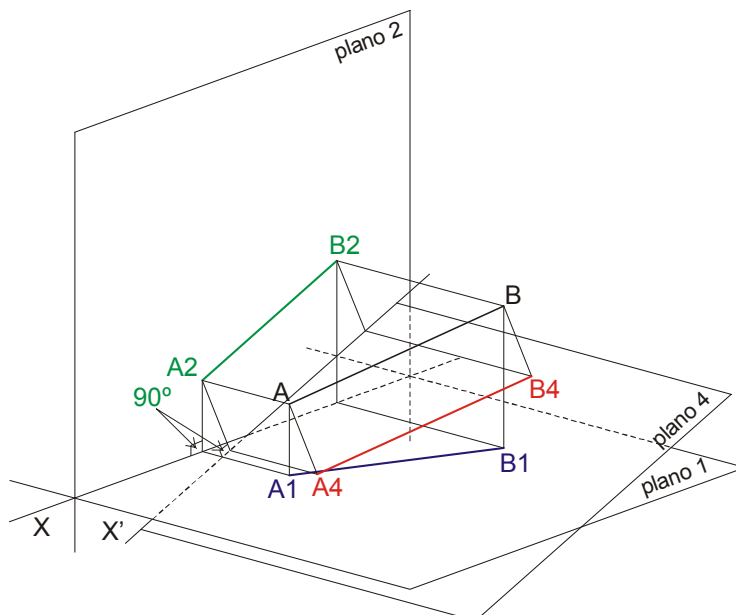


Considera a primeira hipótese.

Para transformar o segmento [AB] num segmento de recta horizontal (de nível), é necessário substituir o Plano Horizontal de Projecção (plano XY – plano 1) por um novo plano de projecção (plano 4), paralelo ao segmento [AB], o que consiste, basicamente, em introduzir um novo plano de projecção, que se designa por plano 4 (o plano 3 é o plano  $YZ - \pi_0$ ).

O novo plano de projecção intersecta o Plano Frontal de Projecção numa recta paralela à projecção frontal do segmento [AB] – o novo eixo X á paralelo a  $[A_2B_2]$  e representa-se por  $X'$ .

As projecções frontais dos pontos A e B não sofreram alterações – mantém-se a projecção frontal do segmento, pois manteve-se o Plano Frontal de Projecção.



Vai haver uma nova projecção do segmento – a projecção do segmento [AB] no plano 4, que substitui a projecção horizontal do segmento.

No que respeita às coordenadas de A e B, os afastamentos mantêm-se, pois a relação dos pontos com o Plano Frontal de Projecção (o plano de projecção que se manteve) não se alterou, ao contrário das suas cotas – alteram-se as cotas dos pontos, que passam a ser as distâncias dos pontos ao plano 4, o que implica que irão ser diferentes das anteriores.

As novas projecções dos pontos A e B (as suas projecções no plano 4) representar-se-ão por A4 e B4.

Tem em conta que o eixo  $X'$  é a recta de intersecção do plano 2 com o plano 4, enquanto o eixo X inicial é a recta de intersecção do plano 1 com o plano 2.

Começa por representar o eixo  $X'$ , paralelo a  $[A_2B_2]$ .

Assinala com os números 1 e 2, os dois planos de que o eixo  $X$  é a recta de intersecção.

Assinala com os números 2 e 4, os dois planos de que o eixo  $X'$  é a recta de intersecção.

A projecção frontal do segmento mantém-se – não foi substituída (não se substituiu o Plano Frontal de Projecção).

As linhas de chamada das novas projecções dos pontos  $A$  e  $B$  serão, agora, perpendiculares ao eixo  $X'$ .

a – afastamento do ponto  $A$ .

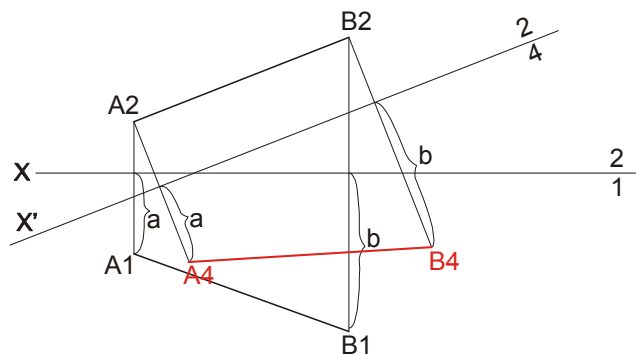
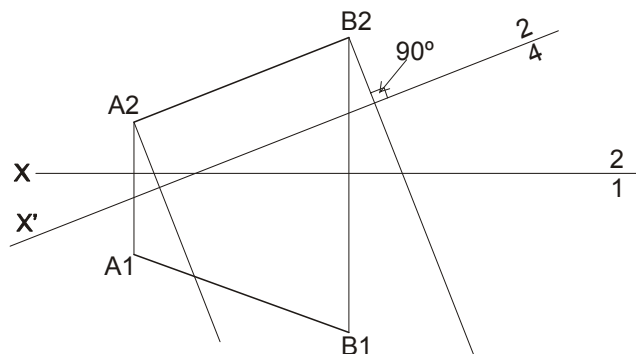
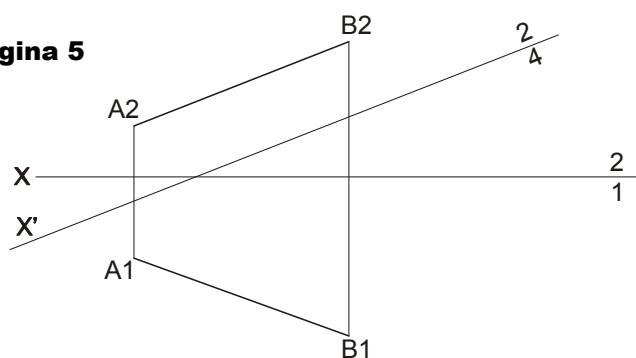
b – afastamento do ponto  $B$ .

$A_4$  e  $B_4$  determinaram-se em função das distâncias  $a$  e  $b$ , respectivamente.

As distâncias das novas projecções de  $A$  e  $B$  ( $A_4$  e  $B_4$ ) ao eixo  $X'$  são iguais às distâncias das projecções horizontais iniciais ( $A_1$  e  $B_1$ ) em relação ao eixo  $X$  inicial.

As projecções do segmento  $[AB]$  no novo diedro de projecção (formado pelo plano 2 e pelo plano 4) são os segmentos  $[A_4B_4]$  e  $[A_2B_2]$ .

A VG do segmento  $A_4B_4$  (a sua projecção no plano 4), pois o segmento está paralelo a este plano.

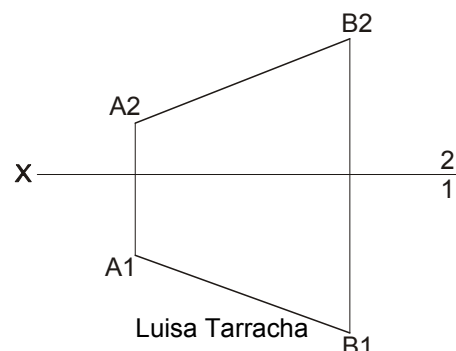


4.	Transformação de um segmento de recta oblíquo num segmento de recta frontal (de frente). Exercícios práticos de consolidação dos conteúdos expostos.	
----	---	--

➤ Transformação de um segmento de recta oblíquo num segmento de recta frontal (de frente)

Vamos ver, agora, como transformar o segmento de recta  $[AB]$  do estudo anterior num segmento de recta frontal (de frente), com  $x$  cm de afastamento.

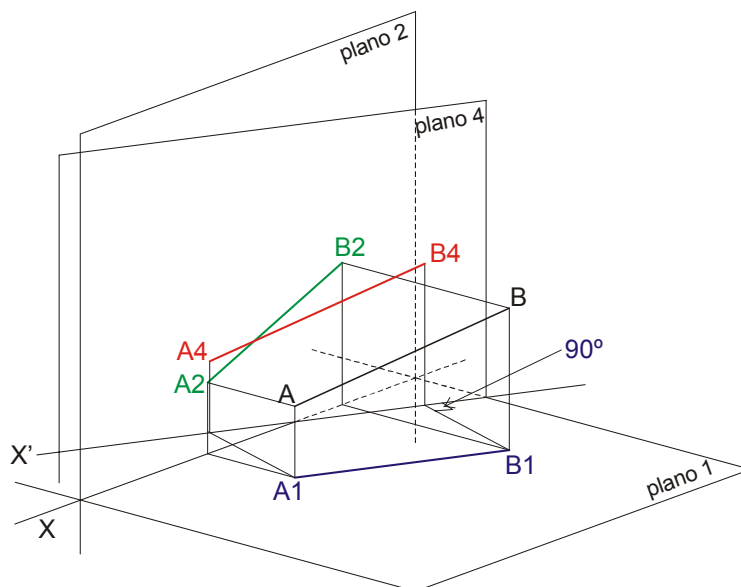
Para tal, é necessário substituir o Plano Frontal de Projecção (plano  $XZ$  – plano 2), por um plano de projecção (plano 4),



paralelo ao segmento [AB] e a x cm deste – corresponde à introdução de um novo plano de projecção, que se designará plano 4.

O novo plano de projecção intersecta o Plano Horizontal de Projecção numa recta paralela à projecção horizontal de [AB] – o novo eixo X (eixo X') é paralelo a [A1B1] e situa-se a x cm deste (que é o afastamento pretendido).  
O plano 4 está, assim, a x cm do segmento.

As projecções horizontais dos pontos A e B não sofreram alterações – mantém-se a projecção horizontal do segmento, pois manteve-se o Plano Horizontal de Projecção.



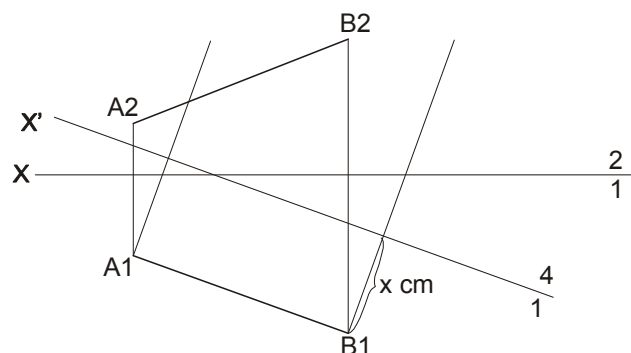
Vai haver uma nova projecção do segmento – a projecção do segmento [AB] no plano 4, que substitui a projecção frontal do segmento.

No que respeita às coordenadas de A e B, as coordenadas mantêm-se, pois a relação dos pontos com o Plano Horizontal de Projecção (o plano de projecção que se manteve) não se alterou, ao contrário dos seus afastamentos – alteram-se os afastamentos, que passam a ser as distâncias dos pontos ao plano 4, o que implica que irão ser diferentes dos anteriores.

As novas projecções dos pontos A e B (as suas projecções no plano 4) representar-se-ão por A4 e B4.

Começa por representar o eixo X', paralelo a [A1B1] e a x cm deste (o afastamento pretendido).

Assinalou-se com os números 1 e 2 os dois planos de que o eixo X é a recta de intersecção. Da mesma forma, assinalou-se, com os números 1 e 4 os dois planos de que o eixo X' é a recta de intersecção.



A projecção horizontal do segmento mantém-se – não será substituída (não se substituiu o Plano Horizontal de Projecção).

As linhas de chamada das projecções de A e B, no novo diedro de projecção, são perpendiculares ao eixo X'.

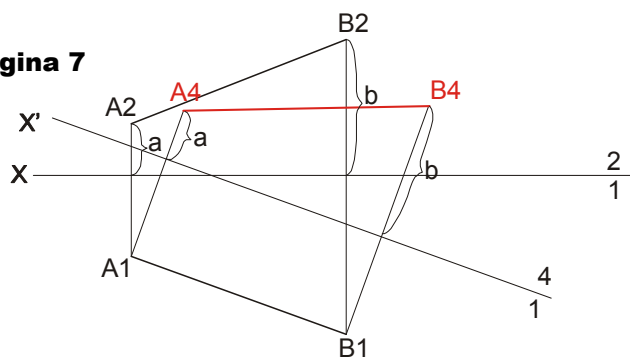
Como se observou anteriormente, mantêm-se as cotas de A e B – assim, A4 e B4 distam, do eixo X', o mesmo que A2 e B2 distam do eixo X.

a – cota do ponto A.

b – cota do ponto B.

A4 e B4 determinaram-se em função das distâncias a e b, respectivamente.

O segmento [AB] está, agora, numa posição frontal (de frente) pois está paralelo ao plano 4 – a sua VG encontra-se na nova projecção frontal do segmento, ou seja, no comprimento [A4B4].



5.	Transformação de uma recta horizontal (de nível) numa recta de topo. Exercícios práticos de consolidação dos conteúdos expostos.	
----	---	--

➤ Transformação de uma recta horizontal (de nível) numa recta de topo

Seja dada uma recta h, horizontal (de nível), definida pelas suas projecções.

Vejamos como transformar a recta h numa recta de topo, através da mudança do diedro de projecção.

Para transformar a recta h numa recta de topo será necessário substituir o Plano Frontal de Projecção (plano 2) por um outro plano (plano 4), ortogonal à recta h. Assim, o novo eixo X (o eixo X'), que é a recta de intersecção do plano 4 com o plano 1, ficará perpendicular a h1.

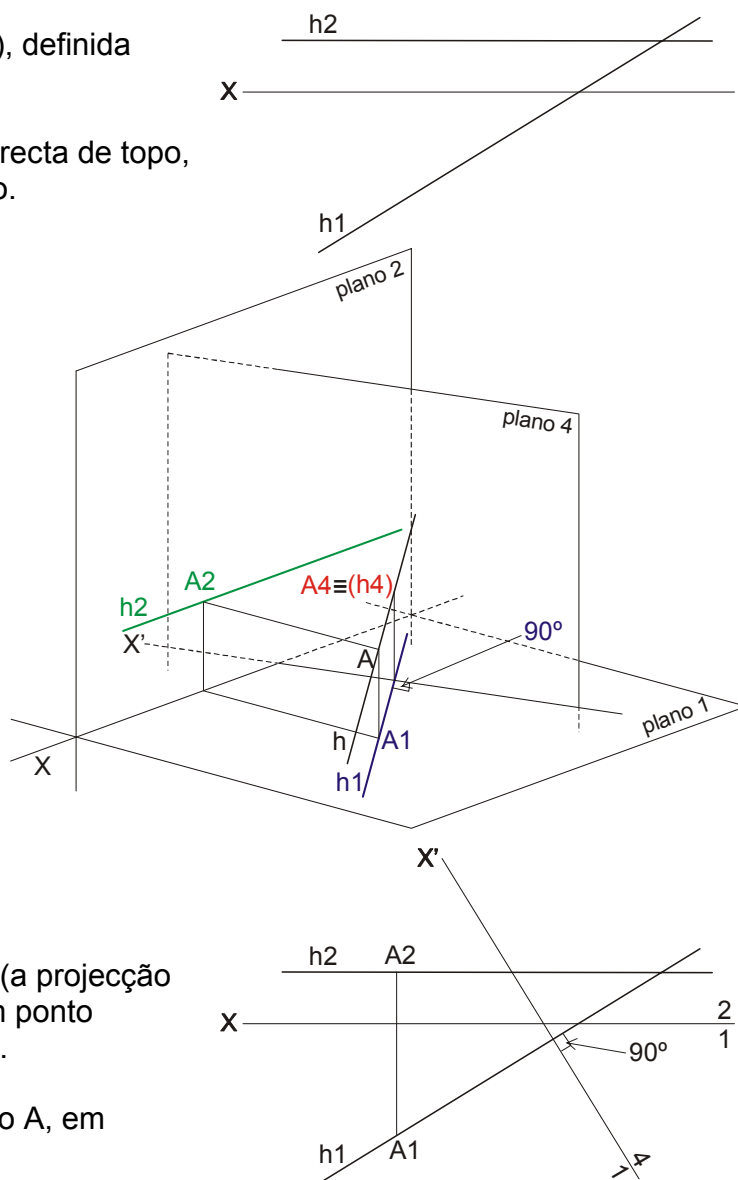
A projecção horizontal da recta h e as cotas dos seus pontos mantêm-se, pois manteve-se o Plano Horizontal de Projecção.

A projecção frontal da recta h e os afastamentos dos seus pontos alteram-se, pois substituiu-se o Plano Frontal de Projecção.

Representa o eixo X', perpendicular a h1.

Para determinar a nova projecção da recta (a projecção da recta h no plano 4), necessitamos de um ponto qualquer da recta – o ponto A, por exemplo.

Determina a nova projecção frontal do ponto A, em função da sua cota (que não se altera).

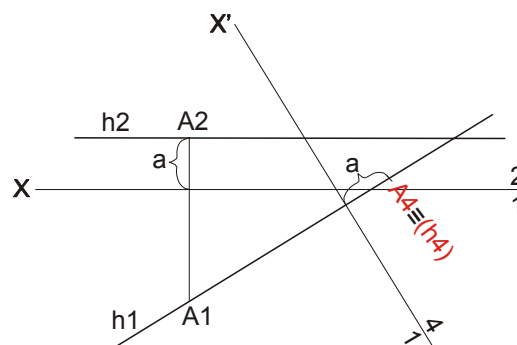




a – cota do ponto A.

A4 é a projecção do ponto A no plano 4 e determinou-se em função da distância a.

Uma recta de topo é uma recta que projecta todos os seus pontos no Plano Frontal de Projecção – a projecção frontal da recta é um único ponto. A nova projecção frontal da recta está, assim, coincidente com a nova projecção frontal do ponto A – (h4) coincidente com A4.



### Exercício 1

1. É dado um segmento de recta [AB], oblíquo, sendo A (1; 2; 4) e B (-3; 1; 2). Determina a VG do segmento, transformando-o num segmento horizontal (de nível) com 2 cm de cota.
2. Considera o segmento [AB] do exercício anterior. Transforma o segmento [AB] num segmento de recta frontal (de frente) com 3 cm de afastamento.
3. É dada uma recta f, frontal (de frente). A recta f passa pelo ponto A (2; 3) e faz, com o Plano Horizontal de Projecção (plano ZY – v0), um ângulo de 30° (ad). Transforma a recta f numa recta vertical.
4. É dada uma recta r, oblíqua. A recta r passa pelo ponto R (2; 1) e as suas projecções fazem, com o eixo X, ângulos de 35° (ad) e 25° (ad), respectivamente a projecção frontal e a horizontal. Desenha as projecções de um segmento de recta [RS], com 4 cm de comprimento, situado no 1º Diedro e contido na recta r.

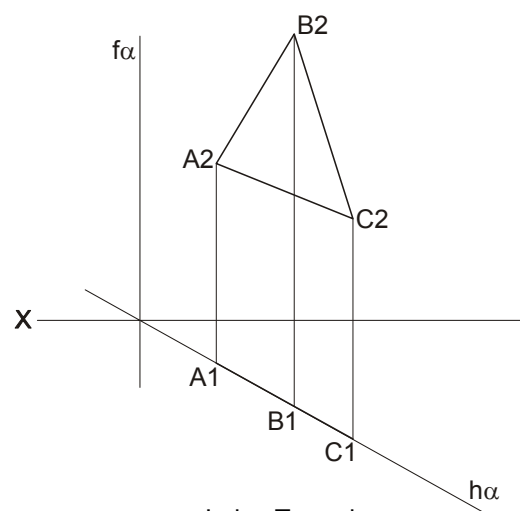
- |    |   |
|----|---|
| 6. | Transformação das projecções dos elementos definidores do plano.<br>Transformação de um plano vertical num plano frontal (de frente). |
|----|---|

### ➤ Transformação de um plano vertical num plano frontal (de frente)

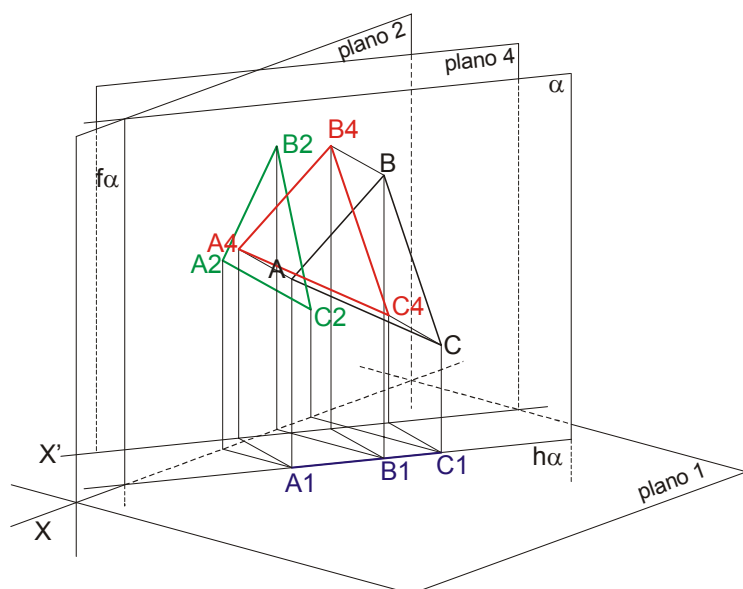
Considera um triângulo [ABC], contido num plano vertical  $\alpha$ .

O triângulo [ABC] não se projecta em VG em nenhum dos planos de projecção.

Pretende-se a VG do triângulo.







Para obter a VG do triângulo é necessário que o plano que o contém (o plano  $\alpha$ ) fique paralelo a um dos planos de projecção, ou seja, é necessário transformar o plano  $\alpha$  num plano frontal (de frente) ou um plano horizontal (de nível).

Visualiza a situação.

Há que transformar o plano  $\alpha$  (que é o plano vertical) num plano frontal (de frente), pois são ambos planos projectantes horizontais.

Assim, é necessário substituir o Plano Frontal de Projecção por um outro plano de projecção (plano 4), paralelo ao plano  $\alpha$ , de forma a criar um novo diedro de projecção no qual o plano  $\alpha$  seja um plano frontal (de frente) – a VG do triângulo estará, então, na sua projecção frontal.

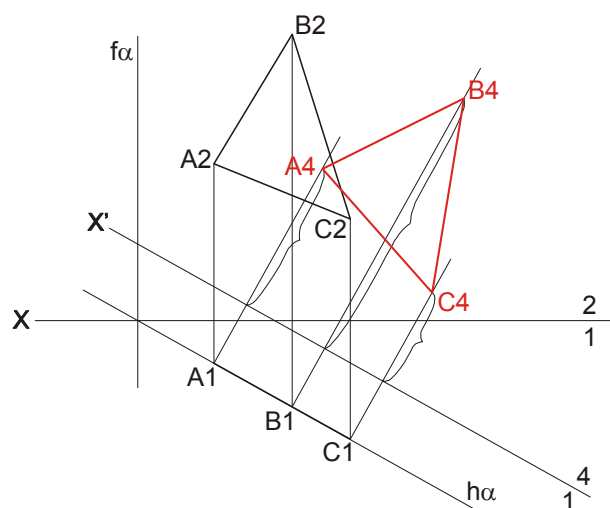
O eixo X, na sua nova posição (eixo X'), fica paralelo ao traço horizontal do plano  $\alpha$  ( $h\alpha$ ).

O plano 4 é o novo plano de projecção – no diedro de projecção formado pelo plano 1 e pelo plano 4, o plano  $\alpha$  é um plano frontal (de frente).

No novo diedro de projecção, mantêm-se as projecções horizontais dos pontos (manteve-se o Plano Horizontal de Projecção), bem como o traço horizontal do plano  $\alpha$ .

O plano  $\alpha$ , no novo diedro de projecção, não tem traço frontal (é paralelo ao plano 4).

As projecções dos pontos A, B e C no plano 4 determinaram-se em função das suas cotas, que se mantêm.

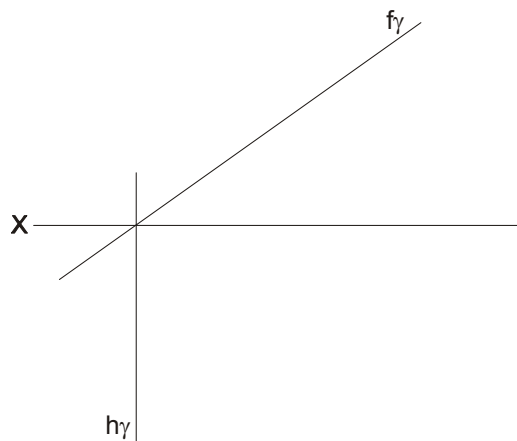
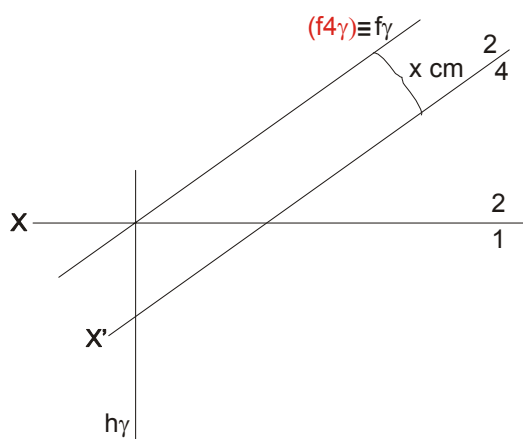


Determinando as novas projecções dos três vértices do triângulo, obteve-se a VG da figura – o triângulo  $[A_4B_4C_4]$  é o triângulo  $[ABC]$  em VG.

7.	Transformação de um plano de topo num plano horizontal.	
----	---	--

➤ Transformação de um plano de topo num plano horizontal

Considera, agora, um plano de topo,  $\gamma$ , definido pelos seus traços.



Transformemos o plano  $\gamma$  num plano horizontal (de nível) com  $x$  cm de cota.

Para tal, é necessário substituir o Plano Horizontal de Projecção por um outro plano de projecção (plano 4), paralelo ao plano  $\gamma$  e a  $x$  cm deste.

No novo diedro de projecção, formado pelo Plano Frontal de Projecção e pelo plano 4, o plano  $\gamma$  será um plano horizontal (de nível) com  $x$  cm de cota.

O novo eixo X (o eixo X') é a recta de intersecção do plano 2 (o plano que se manteve) com o plano 4 (o novo plano de projecção) – o eixo X', fica paralelo a  $f_\gamma$  e a  $x$  cm deste.

Na sua nova posição, o plano  $\gamma$  não tem traço horizontal, pois é paralelo ao plano 4 (que corresponde ao novo Plano Horizontal de Projecção).

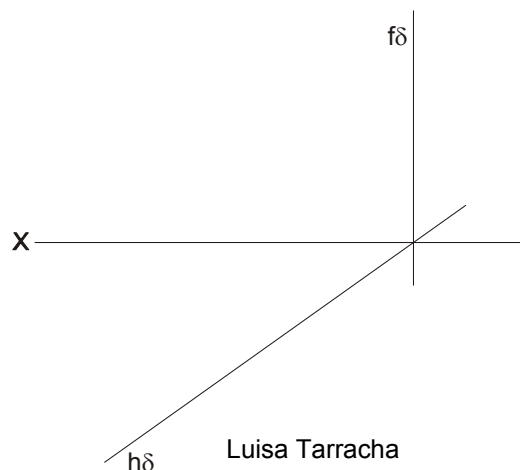
8.	Transformação de um plano vertical num plano frontal. Determinação da verdadeira grandeza da entidade geométrica situada no plano. Exercícios práticos de consolidação dos conteúdos expostos.	
----	--	--

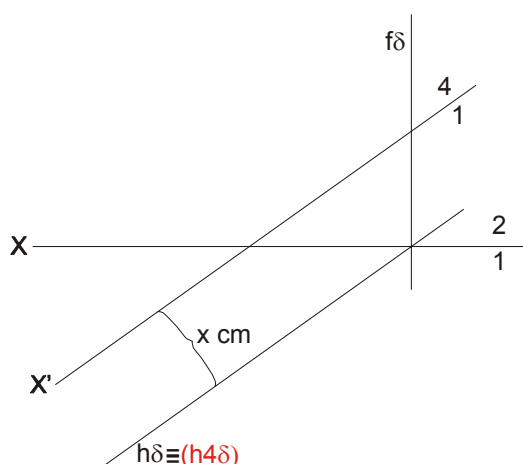
➤ Transformação de um plano vertical num plano frontal

Considera, agora, um plano vertical,  $\delta$ , definido pelos seus traços.

Transformemos o plano  $\delta$  num plano frontal (de frente) com  $x$  cm de afastamento.

Para tal, é necessário substituir o Plano Frontal de Projecção por um outro plano de projecção (plano 4), paralelo ao plano  $\delta$  e a  $x$  cm deste.





No novo diedro de projecção, formado pelo Plano Horizontal de Projecção e pelo plano 4, o plano  $\delta$  será um plano frontal (de frente) com  $x$  cm de afastamento.

O novo eixo  $X$  (o eixo  $X'$ ) é a recta de intersecção do plano 1 (o plano que se manteve) com o plano 4 (o novo plano de projecção) – o eixo  $X'$ , fica paralelo a  $h\delta$  e a  $x$  cm deste.

Na sua nova posição, o plano  $\delta$  não tem traço frontal, pois é paralelo ao plano 4 (que corresponde ao novo Plano Frontal de Projecção).

### Exercício 2

1. É dado um triângulo [PQR], contido num plano de topo, sendo P (2; 3; 1), Q (-2; 4; 4) e R (1; 3). Determina a VG do triângulo.
2. É dado um rectângulo [ABCD], contido num plano vertical  $\gamma$ . O plano  $\gamma$  faz um diedro de  $60^\circ$  (ae) com o Plano Frontal de Projecção. A diagonal [AC] está contida no  $\beta 1/3$  sendo que A tem 2 cm de cota e C tem 6 cm de afastamento. O lado [AB] do polígono é vertical e o lado [BC] é horizontal (de nível). Desenha as projecções do rectângulo e determina a sua VG.
3. É dado um plano vertical,  $\delta$ , que faz, com o Plano Frontal de Projecção, um diedro de  $30^\circ$  (ad). São dados dois pontos, A (1; 4) e B (2; 0), pertencentes ao plano  $\delta$ . Os pontos A e B são dois vértices de um triângulo equilátero [ABC], contido no plano  $\delta$ . Desenha as projecções do triângulo, construindo previamente a figura em VG, após transformar o plano  $\delta$  num plano frontal (de frente) com 2 cm de afastamento.

9.	Rotações. Generalidades. Rotação de pontos.	
----	--	--

### ➤ Rotações. Generalidades

Tal como o processo da mudança do diedro de projecção, o processo da rotação tem, por objectivo, posicionar o objecto projectado numa nova posição em relação aos planos de projecção – uma posição mais conveniente para o estudo a efectuar.

No entanto, se, no processo anterior, tal se efectuava através da introdução de novos planos de projecção (substituindo um dos planos de projecção), o que resultava numa mudança do diedro de projecção, mantendo-se fixa a posição do objecto, o presente processo consiste precisamente no contrário, ou seja, na mudança da posição do objecto projectado, mantendo-se os planos de projecção convencionais, ou seja, mantendo o mesmo diedro de projecção.

Assim, o processo da rotação é um processo geométrico auxiliar que consiste, tal como o nome indica, em rodar o objecto em torno de uma recta (um eixo de rotação ou charneira),

de forma a que objecto a efectuar, obtenha uma posição mais conveniente em relação aos planos de projecção, para o estudo a efectuar.

Vê como tal se processa.

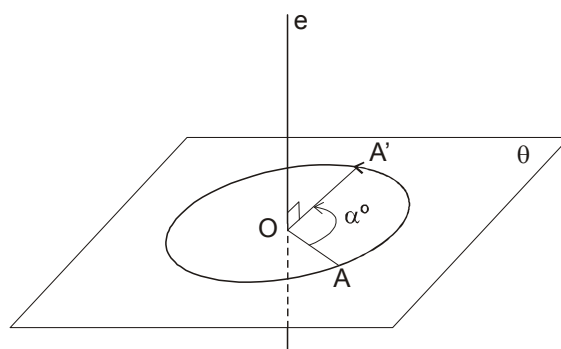
A – ponto a rodar.

e – recta em torno da qual o ponto A roda (eixo de rotação).

AA' – arco de circunferência que corresponde à rotação do ponto A.

A' – posição final do ponto A, após a sua rotação.

$\theta$  – plano ortogonal à recta e (eixo de rotação), no qual está contido o arco da rotação do ponto A.



$\alpha^\circ$  - amplitude do arco da rotação do ponto A.

Tendo em conta que, tal como as figuras planas, os arcos de circunferência se projectam em VG nos planos aos quais são paralelos, estudar-se-ão, apenas, as situações em que os arcos de rotação são horizontais (de nível) ou frontais (de frente) – as situações em que a rotação dos pontos se processa em planos horizontais (de nível) ou planos frontais (de frente), respectivamente.

Atendendo a que, em ambas as situações referidas, o eixo de rotação é sempre uma recta projectante, estudar-se-ão, apenas as situações em que o eixo de rotação é uma recta projectante.

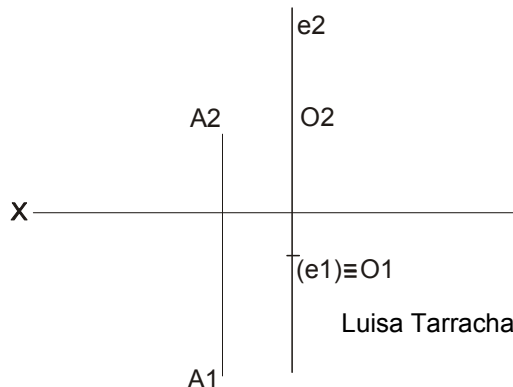
Há ainda que notar que, ao longo da rotação, a posição do objecto em relação ao eixo de rotação é fixa.

Na resolução de problemas, através deste processo, há três situações a considerar:

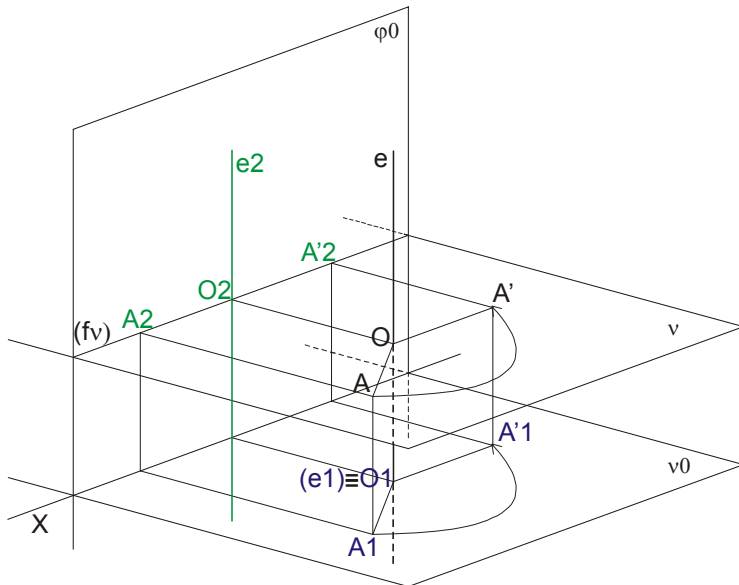
1. a escolha do eixo de rotação (ou charneira) para o estudo em curso (se será um eixo de topo ou vertical), o que implica reconhecer se os arcos da rotação estão contidos em planos frontais (de frente) ou horizontais (de nível), respectivamente, e, assim, identificar em que plano de projecção os arcos se projectam em VG;
2. a amplitude da rotação ( $30^\circ$ ,  $20^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $120^\circ$ , etc.), que será necessariamente a mesma para todos os pontos do objecto;
3. o sentido da rotação (sentido dos ponteiros do relógio ou o sentido contrário), que será necessariamente a mesma para todos os pontos do objecto.

### ➤ Rotação de pontos

Considera um ponto A, situado no 1º Diedro, e uma recta vertical, e.



Vamos executar a rotação do ponto A em torno da recta e, com uma amplitude de  $120^\circ$  no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio.



Visualiza a situação.

A – ponto a rodar.  
e – eixo de rotação.

AA' – arco de circunferência com  $120^\circ$  de amplitude, que corresponde à rotação do ponto A.

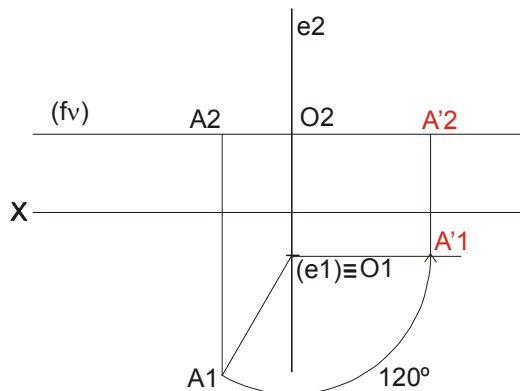
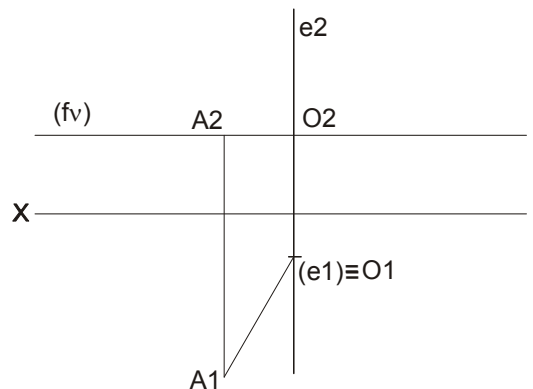
A' – posição final do ponto A, após a sua rotação.

v – plano horizontal (ortogonal ao eixo e), que contém o arco da rotação do ponto A.

A1A'1 – projecção horizontal do arco AA'.

Resolve o exercício em dupla projecção ortogonal.

v – plano horizontal (de nível), ortogonal a e, que contém o arco da rotação do ponto A.



O – centro do arco da rotação do ponto A.

[OA] – raio do arco da rotação do ponto A.

A' – ponto A rodado, ou seja, posição final do ponto A após a sua rotação (A'1 e A'2 são as projecções de A').

A1A'1 – projecção horizontal (em VG) do arco de circunferência AA', com  $120^\circ$  de amplitude.

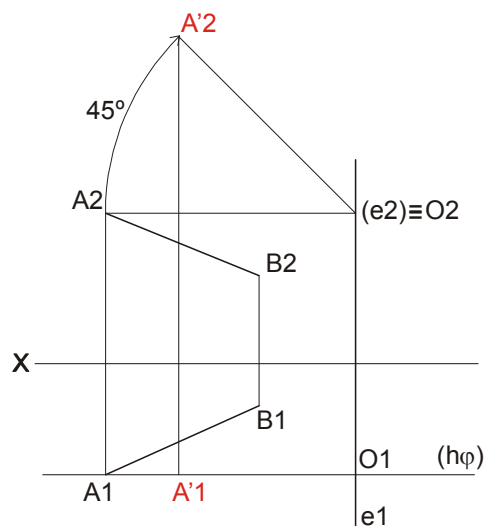
10.	Rotação de segmentos de recta.	
-----	--------------------------------	--

### ➤ Rotação de segmentos de recta

Considera um segmento de recta [AB], oblíquo, definido pelas suas projecções, e uma recta de topo, e.

Executa a rotação do segmento, com uma amplitude de  $45^\circ$  no sentido dos ponteiros do relógio, sendo a recta e o eixo da rotação.

$\varphi$  – plano frontal (de frente), ortogonal à recta e, que contém o arco da rotação do ponto A.



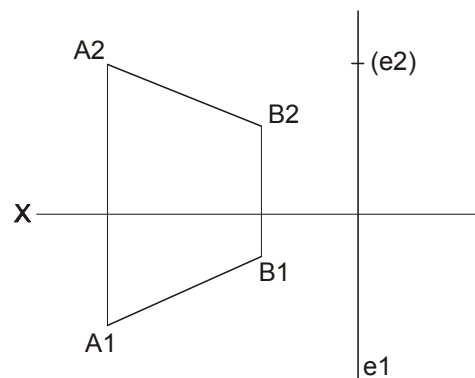
O – centro do arco da rotação do ponto A.

[OA] – raio do arco da rotação do ponto A.

A' – ponto A rodado.

AA' – arco de rotação do ponto A.

Efectua, em seguida, a rotação do ponto B, que se processa de forma idêntica à exposta para o ponto A..



$\varphi_1$  – plano frontal (de frente), ortogonal à recta e, que contém o arco da rotação do ponto B.

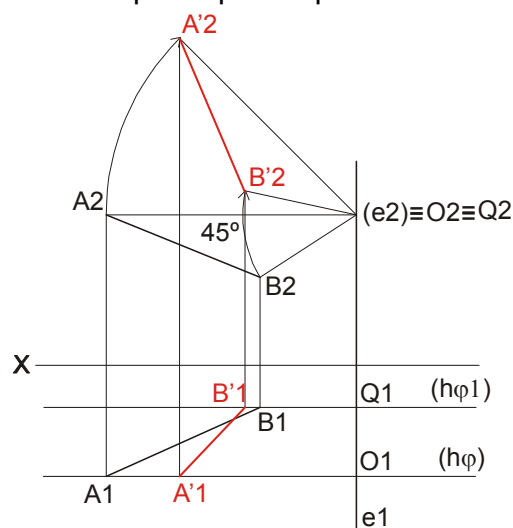
Q – centro do arco da rotação do ponto B.

[QB] – raio do arco da rotação do ponto B.

B' – ponto B rodado.

BB' – arco de rotação do ponto B.

O segmento [A'B'], representado pelas suas projecções, é o segmento [AB] rodado – é o segmento [AB] na sua nova posição.



Para simplificação da resolução gráfica, em problemas semelhantes poder-se-á omitir a representação dos planos que contêm os arcos da rotação, bem como a representação dos seus centros.

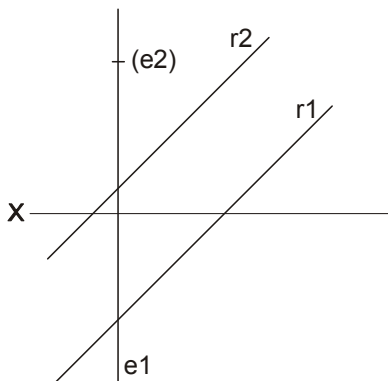
11.	Rotação de rectas.	
-----	--------------------	--

### ➤ Rotação de rectas

Considera agora uma recta r, oblíqua, representada pelas suas projecções.

Pretende-se transformar a recta r numa recta horizontal (de nível), com o recurso a uma rotação.

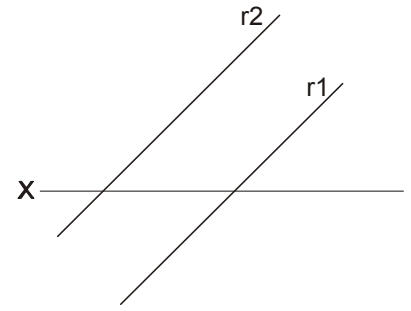
O **primeiro passo** consiste na escolha do eixo.



Ao rodar a recta, para a transformar numa recta horizontal (de nível), as alterações processam-se ao nível das cotas dos pontos da recta, e não dos seus afastamentos.

Os arcos da rotação dos pontos da recta deverão estar contidos em planos frontais (de frente), pelo que o eixo da rotação terá de ser de topo.

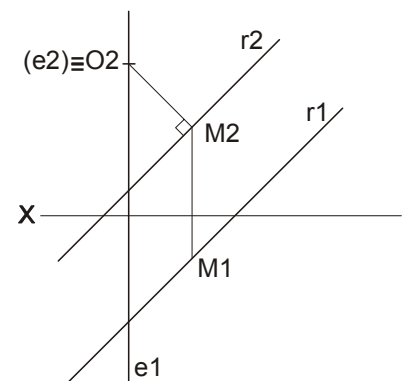
Considera, pois, um eixo de topo – a recta e.



O **segundo passo** consiste em determinar a amplitude da rotação que nos permite transformar a recta r numa recta horizontal.

Para tal, é necessário ter em conta o raciocínio que em seguida se expõe e que se baseia no seguinte: para que a recta r se torne numa recta horizontal (de nível), a sua projecção frontal,  $r_2$ , terá que ser paralela ao eixo X.

Determina um ponto M, da recta, tal que o segmento [OM] seja perpendicular à recta, sendo O o centro do arco da rotação do ponto M.



O ponto M determina-se através dos seguintes processos:

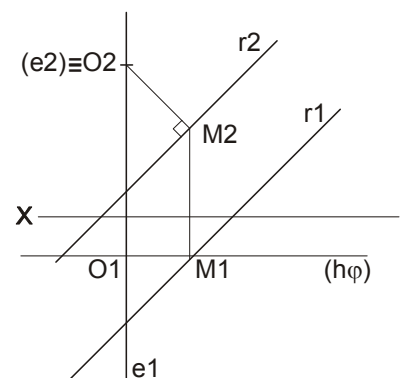
- O2 está coincidente com e2, pois a recta e é projectante frontal;
- por O2 conduz-se uma perpendicular a  $r_2$ , que concorre com esta em M2 – M1 está sobre  $r_1$ .

Sublinha-se que o segmento de recta [OM] é, simultaneamente, perpendicular à recta r e ao eixo da rotação.

$\varphi$  – plano frontal (de frente) que contém o arco da rotação do ponto M.

Conduzindo  $h_\varphi$  (o traço horizontal do plano  $\varphi$ ) por M1, obtém-se O1 – O é o ponto de intersecção da recta e (o eixo) com o plano  $\varphi$  (o plano que contém o arco da rotação do ponto M).

O – centro da rotação do ponto M.





Para que  $r_2$  fique paralela ao eixo X, o ponto M tem que rodar  $\alpha^\circ$ , de forma que o segmento [OM] fique vertical.

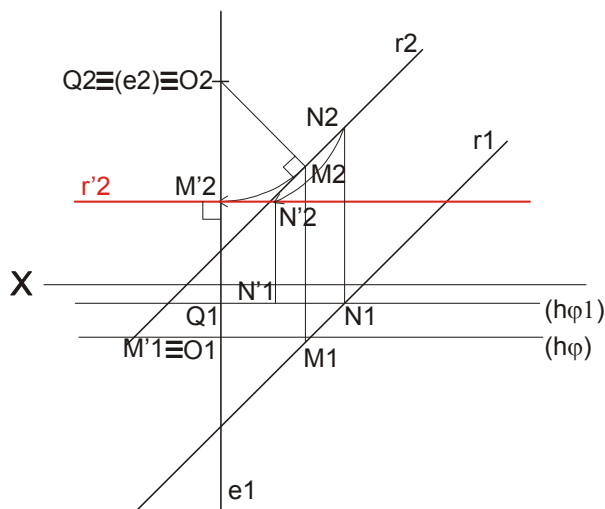
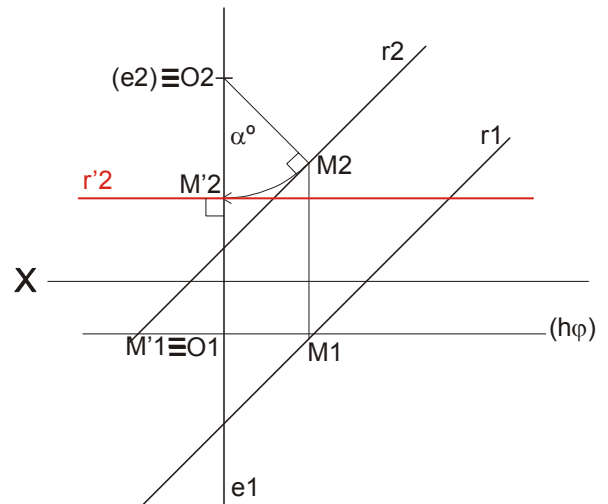
De facto, se [O2M2] ficar perpendicular ao eixo X, atendendo que  $r_2$  é perpendicular a [O2M2],  $r_2$  ficará necessariamente paralela ao eixo X.

M' é o ponto M, rodado  $\alpha^\circ$ .

O segmento [OM'] é vertical (ortogonal ao eixo X).

Por M'2 conduz-se  $r'2$ , perpendicular a [O2M2], que é a nova projecção frontal de r, após a sua rotação.

Nota que  $r'2$  é paralela ao eixo X, conforme pretendido.



Para definir a projecção horizontal da recta r na sua nova posição, após a rotação, é necessário rodar um outro ponto da recta, pois para definir uma recta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direcção.

N é outro ponto qualquer da recta.

O plano  $\phi$ , é o plano frontal (de frente) que contém o arco da rotação do ponto N.

Q – centro da rotação do ponto N.

N2 roda em torno de Q2 até  $r'2$ , onde se situa

N'2.

N1 desloca-se ao longo de  $h\phi1$ , até à linha de chamada de N'2, sobre a qual se obtém N'1.

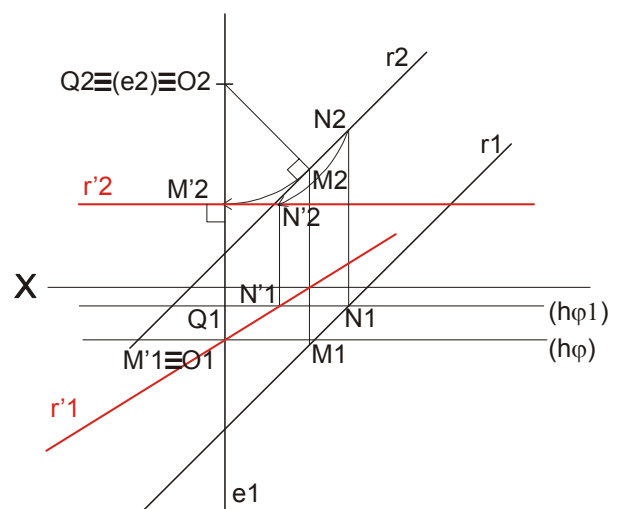
N' é o ponto N rodado.

N' é necessariamente um ponto de  $r'$ , pelo que N'2 se situa sobre  $r'2$  e N'1 sobre  $h\phi1$  (o ponto N mantém o seu afastamento, na sua rotação).

$r'1$  fica definida por M'1 e por N'1.

A recta r, na sua nova posição, é uma recta horizontal (de nível) e projecta-se, em VG, no Plano Horizontal de Projecção.

É possível, de forma semelhante, transformar uma recta oblíqua numa recta frontal (de frente), com raciocínios idênticos e apropriados à situação.



12.

Determinação da verdadeira grandeza de segmentos de recta.  
Exercícios práticos de consolidação dos conteúdos expostos.

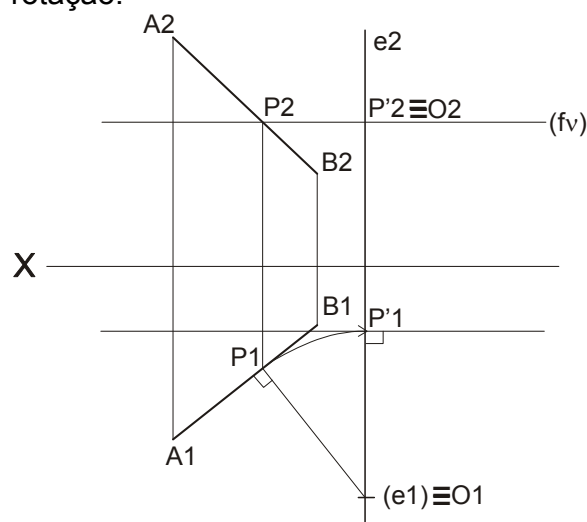
➤ Determinação da verdadeira grandeza de segmentos de recta

Vejam os como aplicar o estudo precedente à determinação da verdadeira grandeza de segmentos de recta.

Considera um segmento de recta  $[AB]$ , oblíquo, representado pelas suas projecções.

Determina a VG do segmento, transformando-o num segmento de recta frontal (de frente), recorrendo a uma rotação do mesmo.

O **primeiro passo** consiste na escolha do eixo de rotação.



Para que o segmento se transforme num segmento frontal (de frente), é necessário que o segmento rode em torno de um eixo vertical, pois mudarão os afastamentos e manter-se-ão as cotas (os arcos da rotação estão contidos em planos horizontais).

e – eixo de rotação (vertical).

P – ponto a rodar.

v – plano horizontal (de nível), que contém o arco da rotação do ponto P.

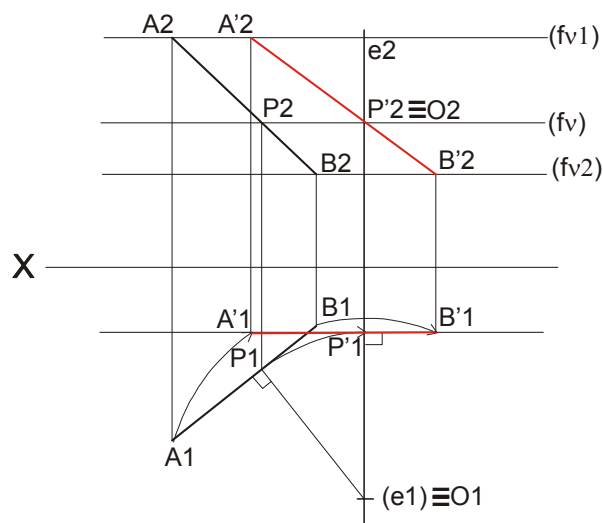
O – centro do arco da rotação do ponto P.

O ponto rodou de forma que  $[A_1B_1]$  (a projecção horizontal do segmento) e a respectiva recta suporte fiquem paralelas ao eixo X. Nota que a recta suporte de  $[A_1B_1]$  contém P1 e é perpendicular a  $[O_1P_1]$ .

Após a rotação do ponto P, é necessário rodar os extremos do segmento  $[AB]$ . Para tal, basta rodar os pontos A e B, em projecção horizontal, até que A1 e B1 se situem na recta paralela ao eixo X (a recta suporte de  $[A_1B_1]$ ).

A'1 – projecção horizontal do ponto A rodado.

B'1 – projecção horizontal do ponto B rodado.



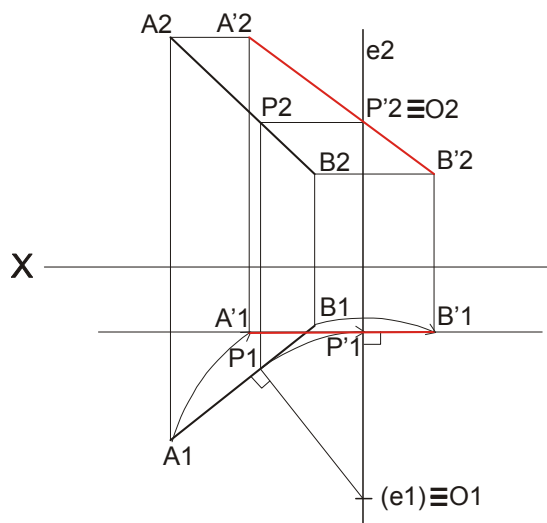
A e B mantêm a cota, pelo que a determinação de A'2 e B'2 é imediata.

O segmento [A'B'] é um segmento frontal (de frente) e é o segmento [AB] rodado.

A VG do segmento está na sua projecção frontal, pois, na sua nova posição, o segmento está paralelo ao Plano Frontal de Projecção.

Salienta-se que, no sentido de uma maior simplificação de traçados, é possível omitir a identificação dos planos que contêm os arcos da rotação.

Convirá, no entanto, que se mantenha o entendimento daquelas linhas como a representação dos planos que contêm os arcos da rotação.



### Exercício 3

1. São dados os pontos A (-1; 1; 3) e B (1; 3; 2). Determina as projecções do ponto A, após uma rotação de 60°, no sentido dos ponteiros do relógio, em torno de uma recta vertical que contém o ponto B.
2. Considera os pontos A e B do exercício anterior. Determina as projecções do ponto B, após uma rotação de 90°, no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio, em torno de uma recta de topo que contém o ponto A.
3. É dado um segmento de recta [PQ], sendo P (-2; 4; 4) e Q (-4; 2; 1). É dada, também, uma recta v, vertical, que contém o ponto A (1; 1; 2). Determina as projecções do segmento [PQ], após uma rotação de 80°, no sentido dos ponteiros do relógio, em torno da recta v.
4. Considera o segmento de recta [PQ] do exercício anterior. Determina a verdadeira grandeza de PQ, transformando [PQ] num segmento de recta horizontal (de nível), com recurso a uma rotação.

13.

Rotação de planos projectantes.

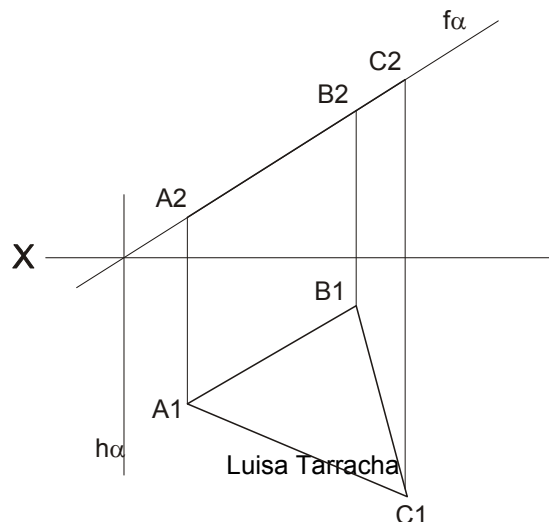
Exercícios práticos de consolidação dos conteúdos expostos.

### ➤ Rotação de planos projectantes

Analisa, agora, a rotação de planos projectantes.

Considera um triângulo [ABC], contido num plano  $\alpha$ , de topo.

Pretende-se determinar a VG do triângulo, através de uma rotação do plano.



O **primeiro passo** consiste na escolha do eixo da rotação.

Para determinar a VG do triângulo, rodando o plano, é necessário transformar o plano  $\alpha$  num plano horizontal (de nível).

Assim, nessa rotação, há que ter em conta que se vão alterar as cotas dos pontos do plano, mantendo-se os seus afastamentos, pelo que os arcos da rotação estarão necessariamente contidos em planos frontais (de frente).

Assim, o eixo da rotação é necessariamente uma recta de topo.

Considera um eixo  $e$ , de topo, exterior ao plano.

O ponto  $P$  é um ponto de  $f_\alpha$  de forma que o segmento  $[OP]$  é perpendicular a  $f_\alpha$  sendo  $O$  o centro da rotação do ponto  $P$ .

O segmento  $[OP]$  é um segmento frontal (de frente) com afastamento nulo, pelo que o arco da rotação do ponto  $P$  está contido no Plano Frontal de Projecção.

O segundo passo consiste em determinar a amplitude da rotação que nos permite transformar o plano  $\alpha$  num plano horizontal (de nível).

Para tal, é necessário ter em conta o raciocínio que em seguida se expõe e que se baseia no seguinte: para que o plano  $\alpha$  se transforma num plano horizontal (de nível), é necessário que  $f_\alpha$  (o traço frontal) fique paralelo ao eixo  $X$ .

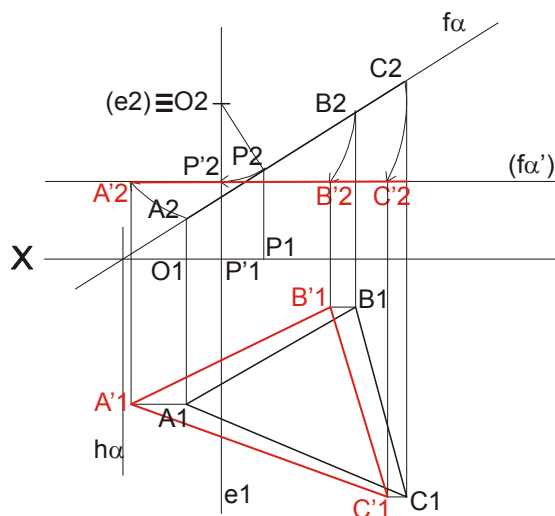
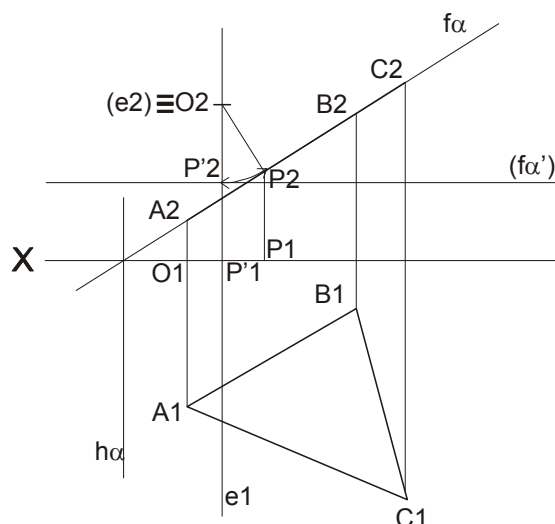
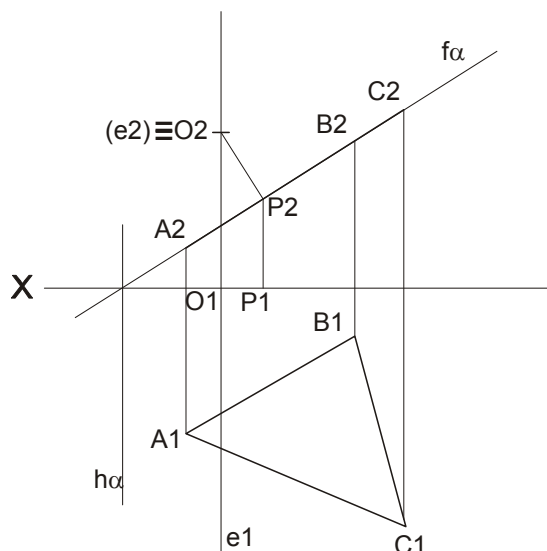
Assim, é necessário rodar o ponto  $P$ , de modo a que o segmento  $[OP]$  se transforma num segmento vertical.

$O$  – centro da rotação do ponto  $P$ .

$P'$  – ponto  $P$  rodado.

Rodando o ponto  $P$  de acordo com o exposto, e segundo o processo anteriormente estudado, obtém-se  $f_\alpha$  na sua nova posição – o plano  $\alpha$  é, agora, um plano horizontal (de nível), pelo que não tem traço horizontal.

$(f_\alpha')$  – traço frontal do plano  $\alpha$ , na sua nova posição (nota que se recorreu ao uso do parêntesis para assinalar devidamente que o plano, na sua nova posição, não tem traço horizontal).



Tendo em conta que, após a rotação, o plano continua a ser um plano projectante frontal, as projecções frontais dos vértices do triângulo, após a rotação, localizar-se-ão sobre  $\alpha'$ .

**Exercício 4**

1. É dado um plano  $\theta$ , de topo, que faz um diedro de  $45^\circ$  (ad) com o Plano Horizontal de Projecção. É dado, ainda, um triângulo [ABC], contido no plano  $\theta$ , sendo A (5; 1), B (2; 3) e C (3; 5). Determina a VG do triângulo.
2. Considera um triângulo [ABC], contido num plano vertical  $\varphi$ , sendo A (-2; 1; 3), B (2; 4; 4) e C (3; 1). Determina a VG do triângulo.

14.	Exercícios práticos de preparação para o teste escrito.	
15.	Exercícios práticos de preparação para o teste escrito.	
16.	Teste escrito.	
17.	Teste escrito.	
18.	Entrega dos testes escritos.	
19.	Correcção dos testes escritos.	
20.	Rebatimento. Generalidades.	

➤ Generalidades

O processo do rebatimento consiste numa rotação em que o eixo da rotação é complanar com o objecto a rodar, o que significa que o processo do rebatimento se refere exclusivamente a planos.

Um rebatimento consiste na rotação de um plano em torno de um eixo (uma recta), eixo esse que, agora, é uma recta do plano, sendo essa a grande diferença entre uma rotação e um rebatimento.

O processo do rebatimento consiste, assim, na rotação de um plano em torno de uma das suas rectas, até coincidir com outro plano.

A recta em torno da qual o plano roda (o eixo da rotação) denomina-se vulgarmente por charneira do rebatimento.

Por fim, e porque um rebatimento é uma rotação, há que salientar que os arcos do rebatimento (os arcos da rotação) estão sempre contidos em planos ortogonais à charneira do rebatimento, ou seja, os rebatimentos processam-se sempre em planos ortogonais à charneira.

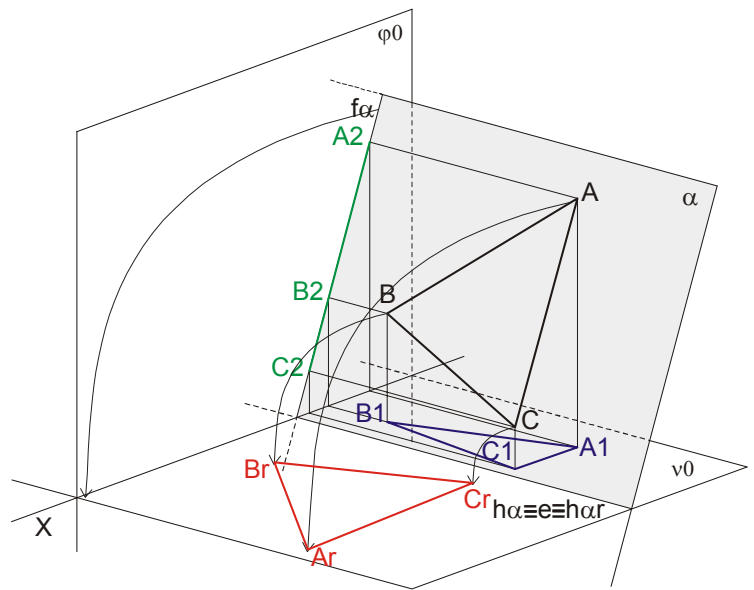
Visualiza a situação do rebatimento de um plano de topo para o Plano Horizontal de Projectção.

e – charneira do rebatimento (eixo da rotação), que é o traço horizontal do plano.

Ar, Br e Cr – pontos A, B e C rebatidos.

Os arcos do rebatimento de cada um dos pontos A, B e C estão contidos em planos frontais (de frente).

Conclui-se que a charneira do rebatimento é sempre a recta de intersecção do plano a rebater com o plano para o qual se processa o rebatimento.



Na resolução de problemas através deste processo, há duas situações a considerar:

1. a escolha do plano para o qual se processa o rebatimento;
2. o reconhecimento e identificação da charneira do rebatimento, nos quais estão contidos os arcos do rebatimento.

21.	Rebatimento de planos verticais e de topo. Rebatimento de planos verticais para o Plano Frontal de Projectção.	
-----	--	--

➤ Rebatimento de planos verticais para o Plano Frontal de Projectção

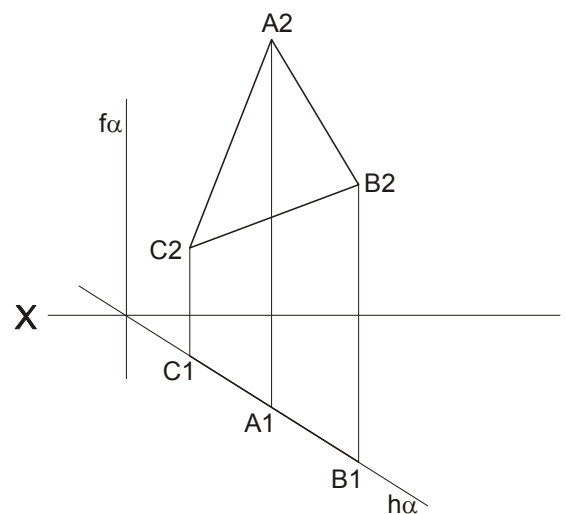
Considera um plano  $\alpha$ , vertical, definido pelos seus traços. Considera, ainda, um triângulo [ABC], contido no plano  $\alpha$ .

Vejamos como determinar a VG do triângulo, rebatendo o plano  $\alpha$  para o Plano Frontal de Projectção.

Visualiza a situação.

A charneira é o traço frontal do plano – é a recta de intersecção do plano  $\alpha$  (o plano a rebater) com o Plano Frontal de Projectção (o plano para o qual se processa o rebatimento).

Assim,  $f\alpha$  (que é a charneira) roda sobre si próprio. O traço horizontal do plano, em rebatimento, fica coincidente com o eixo X.

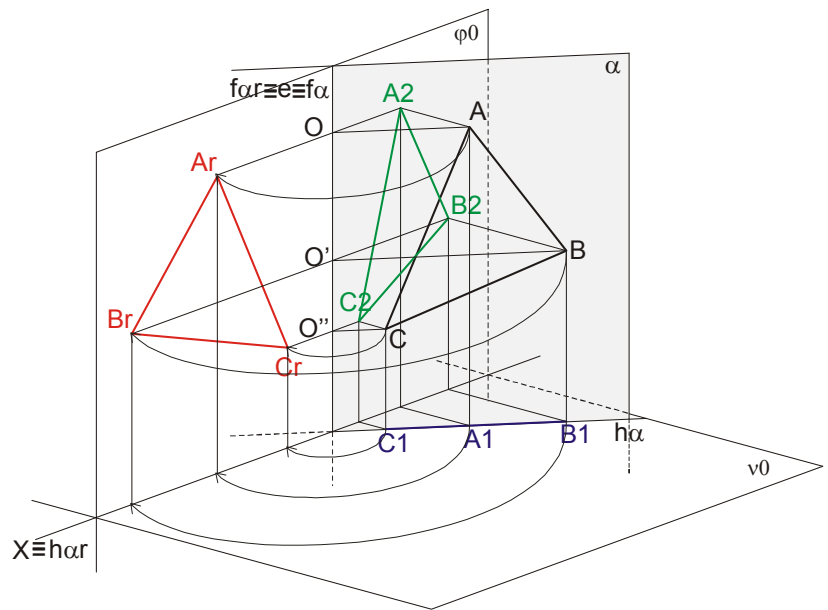


A charneira é uma recta vertical, pelo que os arcos da rotação (ou do rebatimento) dos pontos estão contidos em planos horizontais (de nível).

O, O' e O'' são os centros dos arcos do rebatimento dos pontos A, B e C, respectivamente.

De forma semelhante, é possível rebater um plano de topo para o Plano Horizontal de Projectação, com raciocínios idênticos e adequados à situação.

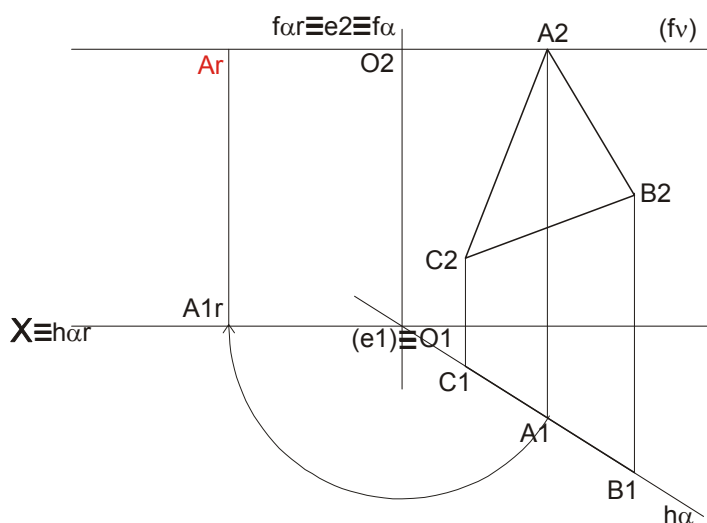
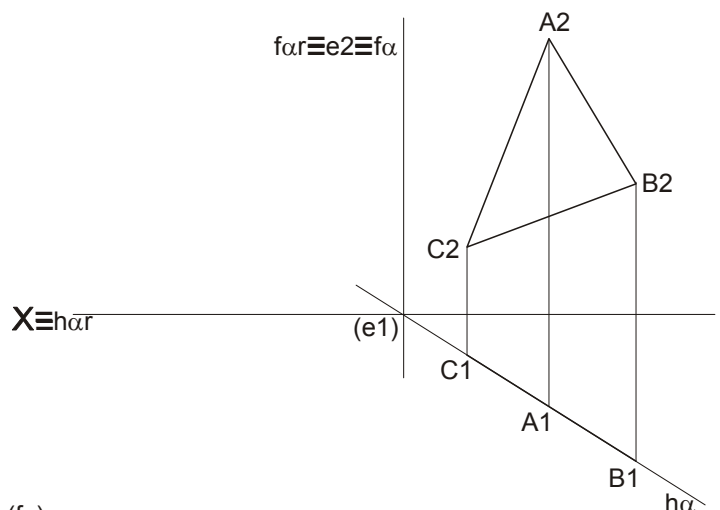
Tem em conta que, nesse caso, a charneira do rebatimento seria o traço horizontal do plano e os arcos do rebatimento estariam contidos em planos frontais.



Começa por identificar a charneira do rebatimento e a posição dos traços, do plano, em rebatimento.

A charneira é  $f_{\alpha}$ , pelo que se tem imediatamente  $f_{\alpha}$  coincidente com  $e_2$  e coincidente com  $f_{\alpha r}$  ( $e_1$  é um ponto sobre o eixo X) –  $h_{\alpha r}$  fica sobre o eixo X.

Nota que a charneira é uma recta projectante (é uma recta vertical).



Começa por rebater o ponto A.

$v$  – plano horizontal (de nível) que contém o arco do rebatimento do ponto A.

O – centro do arco do rebatimento do ponto A.

Com o centro em O1, roda-se A1 até ao eixo X, onde se situa  $h_{\alpha r}$ , obtendo-se A1r – Ar está sobre  $f_v$ , na mesma linha de chamada de A1r.



Ar situa-se no Plano Frontal de Projecção e é o ponto A, após o rebatimento do plano  $\alpha$ .

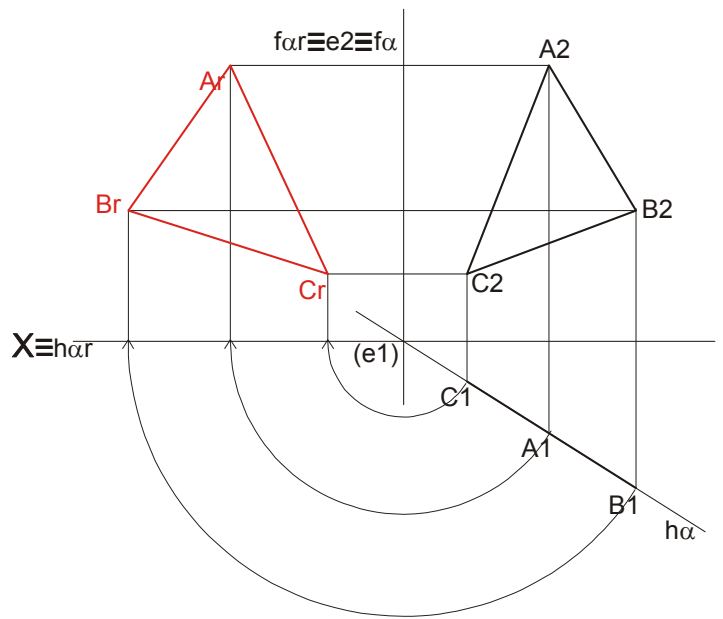
Para evitar a complexidade do traçado e da legibilidade da resolução gráfica do problema, omite-se a representação dos planos horizontais (de nível) que contêm os arcos do rebatimento, bem como dos centros destes. Omite-se, ainda, a representação das projecções horizontais dos pontos em rebatimento (A1r, B1r e C1r).

Efectua, agora, o rebatimento dos restantes pontos, pelo mesmo processo.

Br – ponto B rebatido.

Cr – ponto C rebatido.

[ArBrCr] – triângulo [ABC] rebatido (está em VG).



22.	Rebatimento de planos verticais para um plano frontal (de frente).	
-----	--	--

➤ Rebatimento de planos verticais para um plano frontal (de frente)

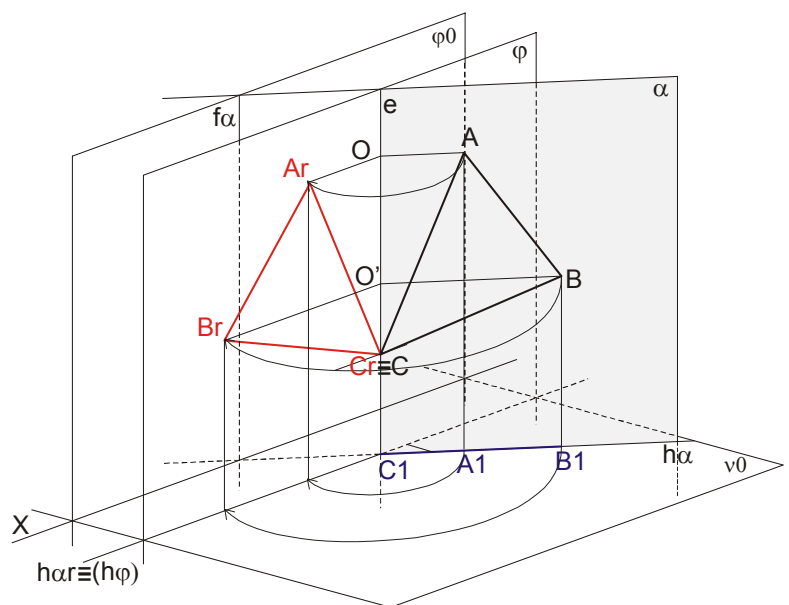
O estudo anterior incidiu sobre o rebatimento de um plano vertical para o Plano Frontal de Projecção.

Tendo em conta que uma figura contida num plano frontal (de frente) se projecta em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projecção, o estudo que agora se inicia aborda o rebatimento de um plano vertical para um plano frontal (de frente) qualquer, que não o Plano Frontal de Projecção.

Este rebatimento apresenta vantagens em relação ao anterior apenas se o rebatimento do plano vertical para esse plano frontal (de frente) simplificar o processo.

Analisa a situação.

Considera uma situação semelhante à do estudo anterior – um triângulo [ABC], contido num plano  $\alpha$ , vertical, de que se pretende a VG. Considera um plano frontal (de frente)  $\varphi$ , que contém o vértice C do triângulo.



O plano  $\alpha$  rebate para o plano  $\varphi$ .

e – charneira do rebatimento (é a recta de intersecção do plano  $\alpha$  com o plano  $\varphi$  e é uma recta vertical).

Cr está coincidente com C, pois C é um ponto da charneira.

Para obter o triângulo rebatido, rebatendo o plano  $\alpha$ , basta rebater os pontos A e B.

Tem em conta que, nesta situação,  $h_{\alpha r}$  fica coincidente com  $h_{\varphi}$ .

Sublinha-se que a vantagem do rebatimento aqui proposto, em relação ao anterior, reside na economia de traçados que possibilita – é que, para determinar a VG do triângulo, na presente situação é suficiente efectuar o rebatimento de apenas dois vértices.

Estuda a execução do processo.  
Considera o triângulo [ABC].

Determina a VG do triângulo, efectuando o rebatimento do plano  $\alpha$  para o plano frontal (de frente)  $\varphi$  que contém o vértice C do triângulo.

$\varphi$  – plano frontal (de frente) para o qual se pretende rebater o plano  $\alpha$ .

e – charneira do rebatimento.

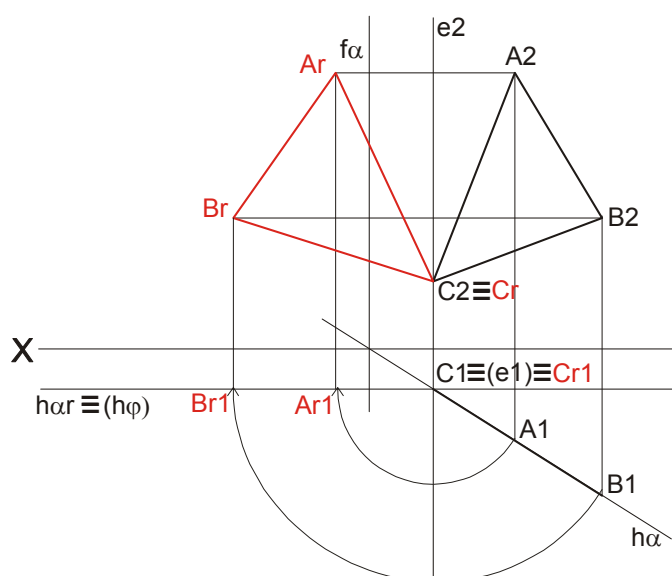
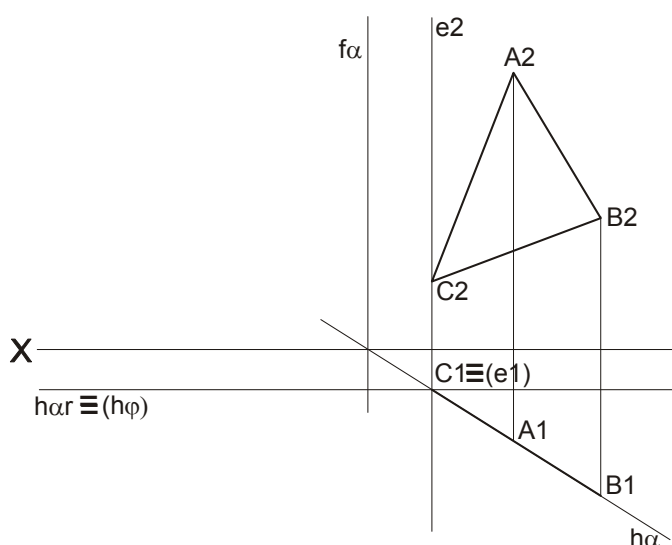
Cr está coincidente com C, pois C é um ponto da charneira.

Os arcos do rebatimento, que se projectam em VG no Plano Horizontal de Projectação, transportam as projecções horizontais dos pontos A e B de  $h_{\alpha}$  para  $h_{\alpha r}$ .  
As projecções horizontais dos arcos do rebatimento têm centro em e1.

Ar1, Br1 e Cr1 são as projecções horizontais de Ar, Br e Cr e Ar2, Br2 e Cr2 são as suas projecções frontais.

O triângulo [ABC], em rebatimento, está contido num plano frontal (de frente), pelo que se projecta em VG na sua projecção frontal.

Assim, apesar de Ar, Br e Cr terem duas projecções, por se situarem no espaço,

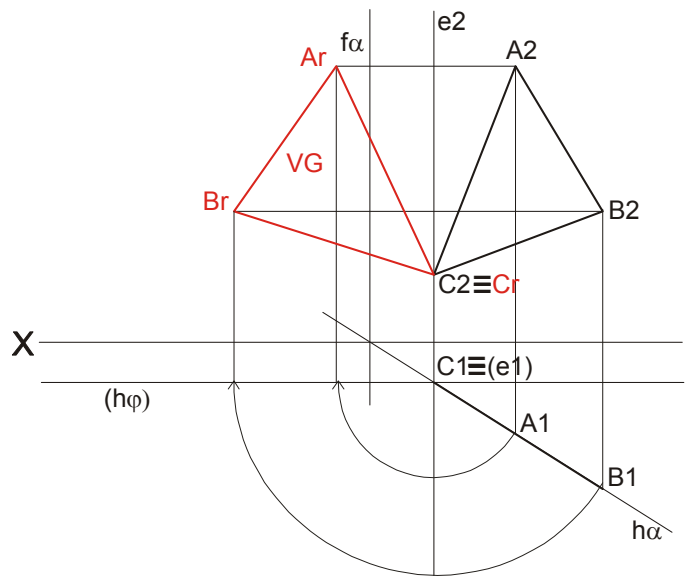


representar-se-ão apenas as suas projecções frontais ( que é onde se situa a VG da figura), omitindo, ainda o facto de se tratar de projecções frontais.

Nota que Ar, Br e Cr são, efectivamente, as projecções frontais dos pontos A, B e C em rebatimento, mas não se identificam como tal.

O triângulo [ArBrCr] é a VG do triângulo [ABC].

De forma semelhante, é possível rebater um plano de topo para um plano horizontal (de nível) qualquer, desde que tal apresente vantagens para a resolução do exercício – maior economia de traçados, por exemplo.



23.	Rebatimento de planos verticais para o Plano Horizontal de Projecção.	
-----	---	--

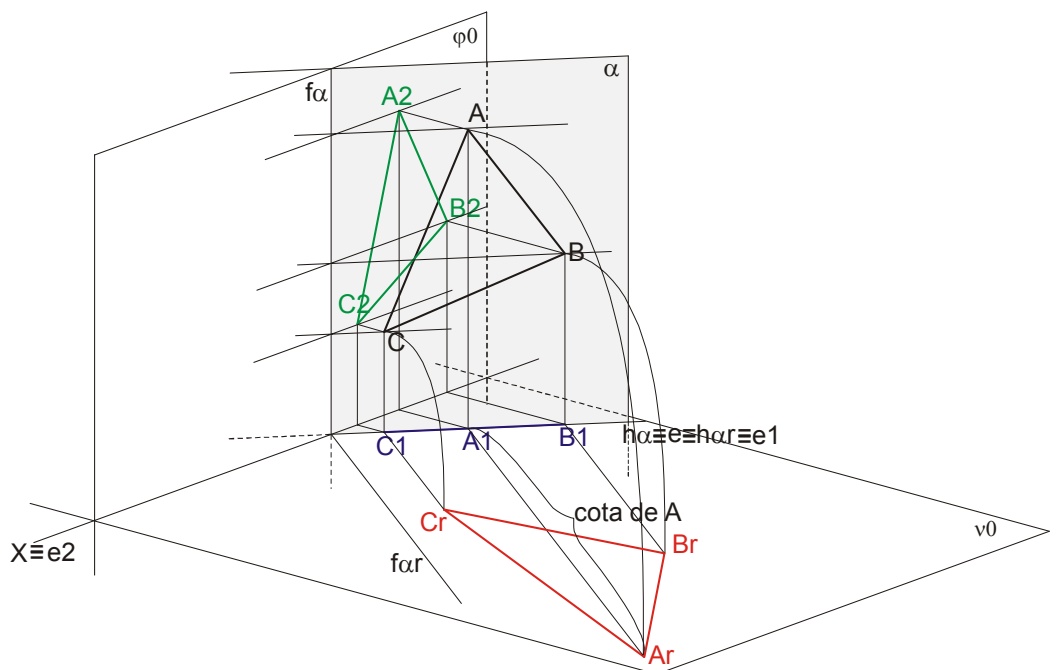
➤ Rebatimento de planos verticais para o Plano Horizontal de Projecção

Vê, agora, como rebater um plano vertical para o Plano Horizontal de Projecção. Tem em conta que, no rebatimento de um plano vertical para o Plano Frontal de Projecção, a charneira era uma recta perpendicular ao eixo X (tratava-se de uma recta projectante) e que, neste caso, é uma recta oblíqua ao eixo X (não é uma recta projectante).

Visualiza a situação. Considera uma situação semelhante à dos estudos anteriores.

A charneira é o traço horizontal do plano – é a recta de intersecção do plano  $\alpha$  com o Plano Horizontal de Projecção.

Assim,  $h\alpha$  (que é a charneira) roda sobre si próprio, pelo que se tem  $h\alpha$  coincidente com  $e1$  e coincidente com  $h\alpha r$ .



A projecção frontal da charneira está sobre o eixo X, pelo que se tem  $e2$  coincidente com X.

$f\alpha$  e  $h\alpha$  formam, entre si, ângulos rectos – ao rebater o plano, os ângulos rectos ficam em VG, pelo que  $f\alpha_r$  é perpendicular a  $h\alpha_r$ .

Os arcos de rebatimento estão contidos em planos verticais (ortogonais a  $h\alpha$ ).

O arco do rebatimento do ponto A está contido num plano vertical (ortogonal a  $h\alpha$ ), tem centro em  $A1$  e o seu raio é a cota de A, pelo que  $ArA1 = AA1$ .  
O mesmo se verifica com os restantes pontos.

De forma semelhante, é possível rebater um plano de topo para o Plano Frontal de Projecção, com raciocínios idênticos e adequados à situação.

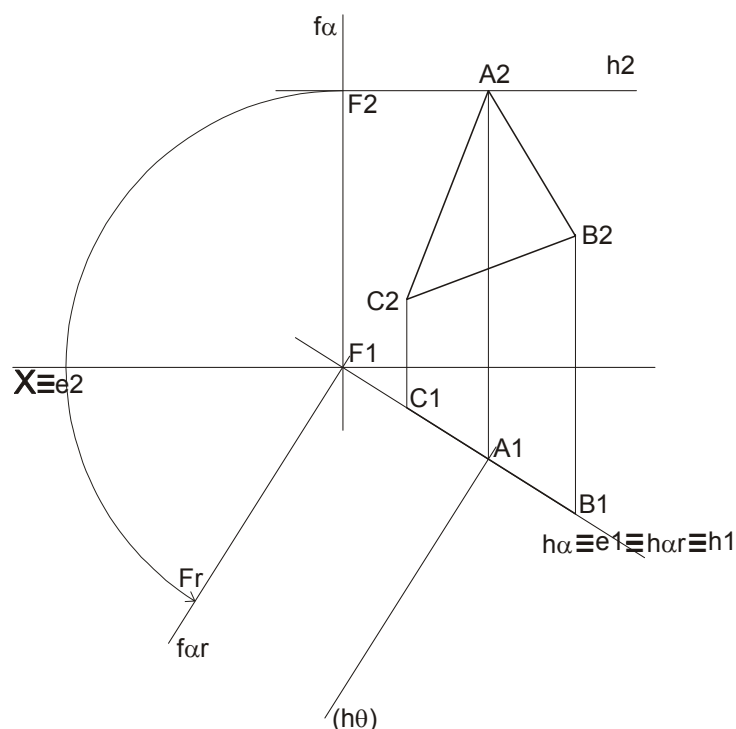
Tem em conta que, nesse caso, a charneira do rebatimento seria o traço frontal do plano e os arcos do rebatimento estariam contidos em planos de topo (ortogonais ao traço frontal do plano a rebater).

Considera, ainda, o triângulo [ABC] dos estudos anteriores.

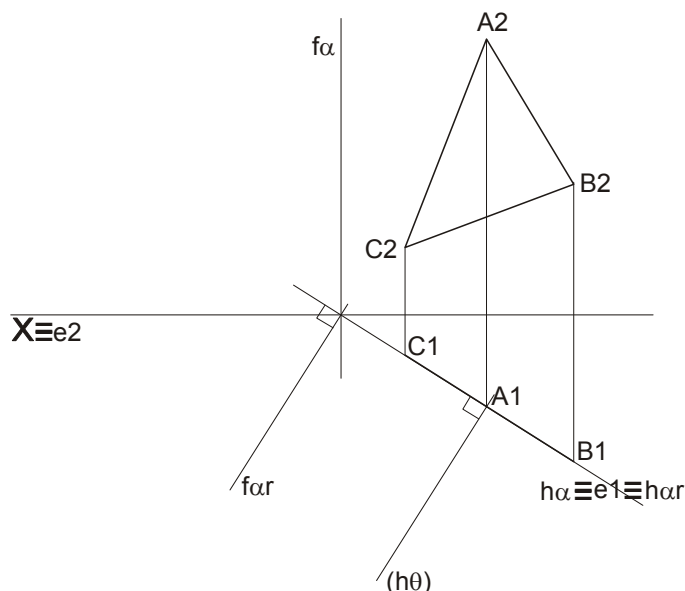
Determina a sua VG, rebatendo o plano  $\alpha$  para o plano Horizontal de Projecção.

Começa por identificar a charneira do rebatimento e a posição dos traços do plano em rebatimento.

A charneira é  $h\alpha$ , pelo que se tem  $h\alpha$  coincidente com  $e1$  e coincidente com  $h\alpha_r$ .



Escola Profissional Val do Rio



Em rebatimento,  $f\alpha_r$  fica perpendicular a  $h\alpha_r$ .

Nota que a charneira é uma recta não projectante (é uma recta horizontal).

Analisa o rebatimento do ponto A.

$\theta$  – plano vertical, ortogonal à charneira ( $h\alpha$ ), que contém o arco do rebatimento do ponto A.

$Ar$  terá de se situar sobre  $h\theta$ , tal que  $ArA1$  seja a cota de A (recorda que  $ArA1$  é o raio do arco do rebatimento).

Luisa Tarracha

Como o arco do rebatimento de A não se projecta em VG, é necessário recorrer a um raciocínio auxiliar.

Tem sempre presente que a distância a rebater é a cota de A.

Em primeiro lugar transporta-se a cota de A para  $f\alpha$ , através de uma recta horizontal (de nível) h.

h – recta horizontal (de nível) do plano  $\alpha$ , passando por A.

F – traço frontal da recta h.

O arco F2Fr é o arco de transporte da cota de A de  $f\alpha$  para  $f\alpha_r$  e tem centro em F1.

Fr – traço frontal da recta h, rebatido.

Por Fr conduz-se hr, paralela a  $h\alpha_r$ , pois se a recta h é paralela a  $h\alpha$ , então hr é paralela a  $h\alpha_r$ .

A é um ponto de h, pelo que Ar é um ponto de hr.

Ar – ponto A rebatido.

Ar é o ponto de intersecção de hr com  $h\theta$ .

Repara que ArA1 é a cota de A.

Tem em conta, assim, que o rebatimento de A se poderia ter processado directamente, em função da sua cota.

Os rebatimentos dos pontos B e C processam-se de forma idêntica à exposta para A.

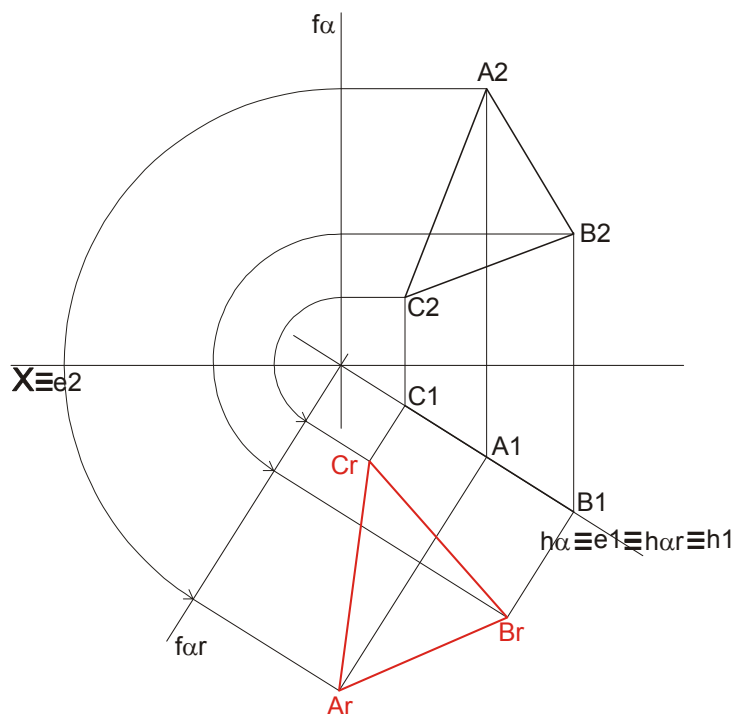
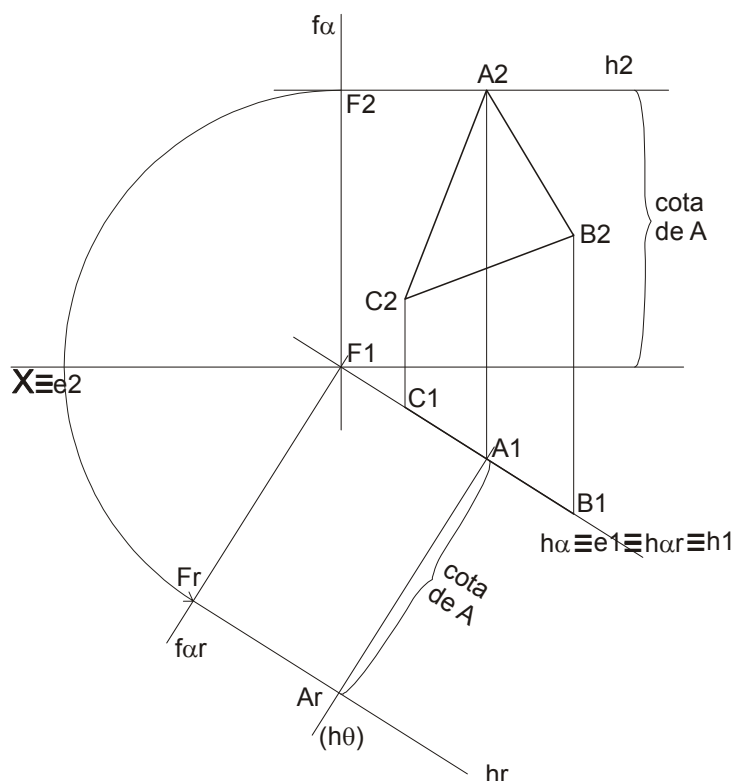
Br – ponto B rebatido.

Cr – ponto C rebatido.

O triângulo [ArBrCr] é o triângulo [ABC] em VG, pois situa-se no Plano Horizontal de Projecção.

De forma semelhante, é possível rebater um plano de topo para o Plano Frontal de Projecção, com raciocínios idênticos e adequados à situação.

Tem em conta que, nesse caso, os raios dos arcos do rebatimento dos pontos do plano seriam os respectivos afastamentos.



## 24. Rebatimento de planos verticais para um plano horizontal (de nível).

➤ Rebatimento de planos verticais para um plano horizontal (de nível)

O estudo anterior incidiu sobre o rebatimento de um plano vertical para o Plano Horizontal de Projecção.

Tendo em conta que uma figura contida num plano horizontal (de nível) se projecta, em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projecção, o estudo que agora se inicia aborda o rebatimento de um plano vertical para um plano horizontal (de nível) qualquer, que não seja o Plano Horizontal de Projecção.

Este rebatimento apresenta vantagens em relação ao anterior se o rebatimento do plano vertical para um plano horizontal (de nível) simplificar o processo.

Analisa a situação.

Considera uma situação semelhante à dos estudos anteriores – um triângulo  $[ABC]$ , contido num plano  $\alpha$ , vertical, de que se pretende a VG.

Considera um plano horizontal (de nível)  $v$ , que contém o vértice  $A$  do triângulo.

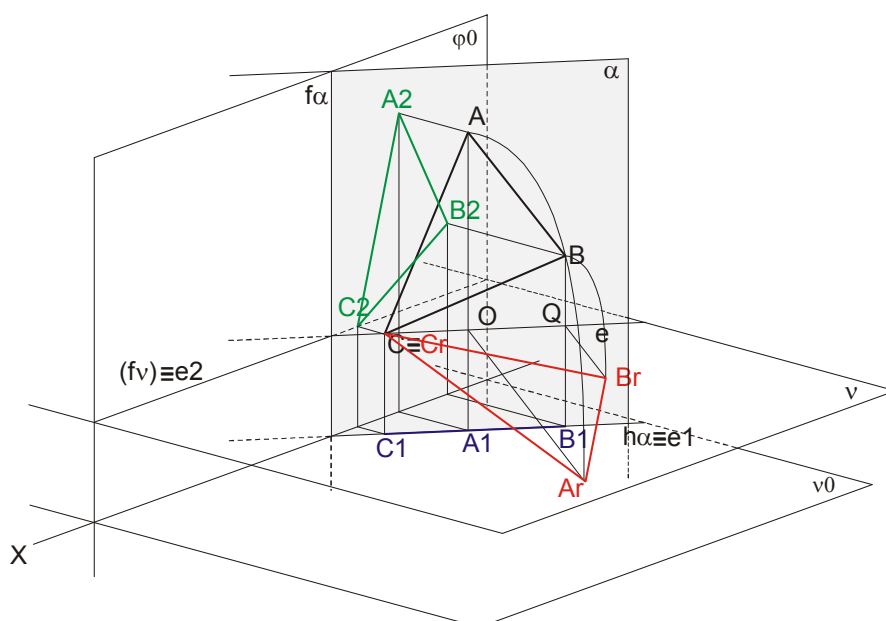
A figura ilustra o rebatimento do plano  $\alpha$  para o plano  $v$ .

$e$  – charneira do rebatimento (é a recta de intersecção do plano  $\alpha$  com o plano  $n$  e é uma recta horizontal).

$C_r$  está coincidente com  $C$ , pois  $C$  é um ponto da charneira.

Para obter o triângulo rebatido, rebatendo o plano  $\alpha$ , basta rebater  $A$  e  $B$ .

$O$  e  $Q$  são os centros dos arcos do rebatimento de  $A$  e  $B$ , respectivamente.



Nota que o raio do arco do rebatimento do ponto  $A$  não é a cota de  $A$ , mas sim, a distância do ponto  $A$  ao plano  $v$  (ou seja, a cota de  $A$  em relação ao plano  $v$ ) - é a distância  $d$ .

O mesmo se verifica em relação a  $B$ .

Nesta situação, o rebatimento tem de se processar obrigatoriamente através da medida do raio dos respectivos arcos do rebatimento.

Estuda a execução do processo exposto em Dupla Projecção Ortogonal.

Considera então o mesmo triângulo  $[ABC]$ .

Determina a VG do triângulo, efectuando o rebatimento do plano  $\alpha$  para o plano horizontal (de nível)  $v$  que contém o vértice C do triângulo.

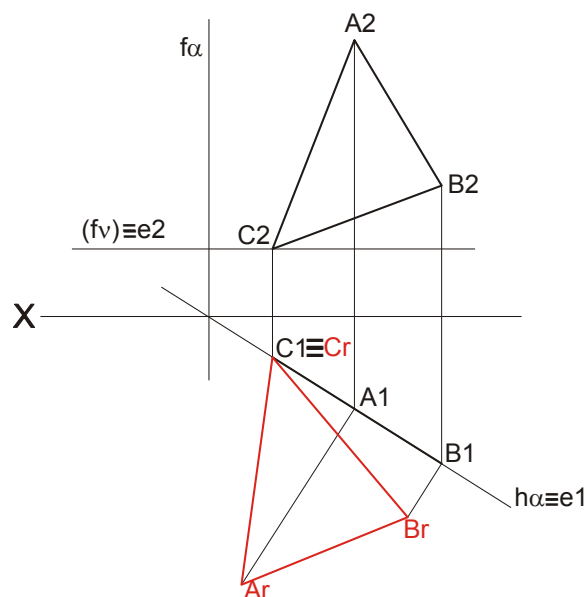
$v$  – plano horizontal (de nível) para o qual se pretende rebater o plano  $\alpha$ .

$e$  – charneira do rebatimento.

$Cr$  está coincidente com C, pois C é um ponto da charneira.

Os arcos do rebatimento de A e B estão contidos em planos ortogonais à charneira, pelo que se conduz perpendiculares à charneira por A1 e B1. Sobre essas perpendiculares à charneira representaram-se, em VG, as distâncias dos pontos A e B ao plano  $v$  (as cotas de A e B em relação a  $n$ ), obtendo-se  $Ar$  e  $Br$ .

$Ar$ ,  $Br$  e  $Cr$  são, efectivamente, as projecções horizontais dos pontos A, B e C em rebatimento, mas não se identificam como tal.



25.	Rebatimento de planos de topo. Exercícios práticos de consolidação dos conteúdos expostos.	
-----	---	--

#### ➤ Rebatimento de planos de topo

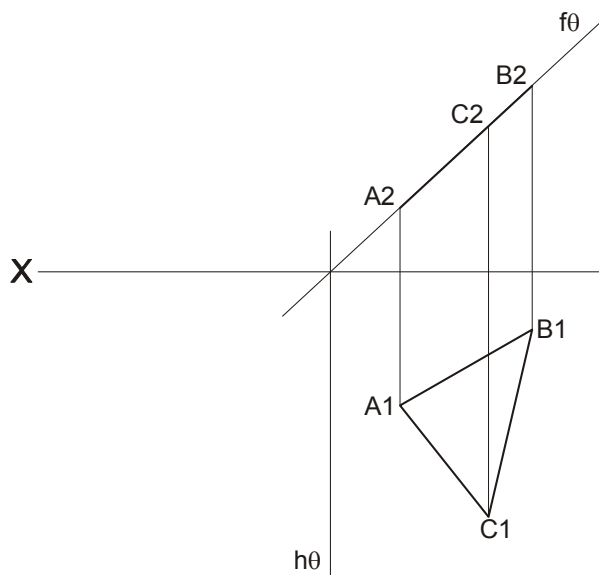
Considera um plano  $\theta$ , de topo, definido pelos seus traços.

Considera, ainda, um triângulo  $[ABC]$ , contido em  $\theta$ .

Vejamos como determinar a VG do triângulo, rebatendo o plano  $\theta$  de duas formas distintas:

- em primeiro lugar, rebatendo o plano  $\theta$  para o Plano Horizontal de Projecção;
- em segundo lugar, rebatendo o plano  $\theta$  para o Plano Frontal de Projecção.

Recorda que a primeira etapa, em qualquer das situações, consiste em identificar a charneira do rebatimento.



Efectua, então, o rebatimento do plano  $\theta$  para o Plano Horizontal de Projecção.

Começa por identificar a charneira do rebatimento e a posição dos traços do plano em rebatimento.

A charneira é  $h\theta$ , pelo que se tem imediatamente  $h\theta$  coincidente com  $e1$  e coincidente com  $h\theta r$  ( $e2$  é um ponto sobre o eixo X) –  $f\theta r$  fica sobre o eixo X.



Nota que a charneira é uma recta projectante (é uma recta de topo).

Os arcos do rebatimento estão contidos em planos frontais (de frente), pelo que se projectam em VG no Plano Frontal de Projecção.

Ar, Br e Cr situam-se no Plano Frontal de Projecção e são os pontos A, B e C, após o rebatimento do plano  $\theta$ .

O triângulo [ArBrCr] é o triângulo [ABC] em VG, pois situa-se no Plano Horizontal de Projecção.

Para evitar a complexidade do traçado e da legibilidade da resolução gráfica do problema, omitiu-se a identificação dos planos frontais (de frente) que contêm os arcos do rebatimento, bem como os centros destes.

Efectua, agora, o rebatimento do plano  $q$  para o Plano Horizontal de Projecção. Começa por identificar a charneira do rebatimento e a posição do traço do plano em rebatimento.

A charneira é  $f\theta$ , pelo que se tem imediatamente  $f\theta$  coincidente com  $e2$  e coincidente com  $f\theta r$ .

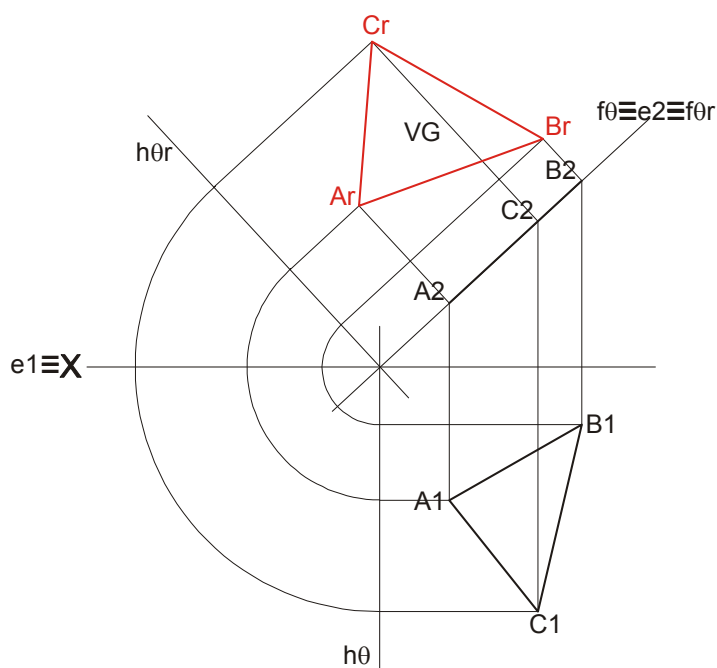
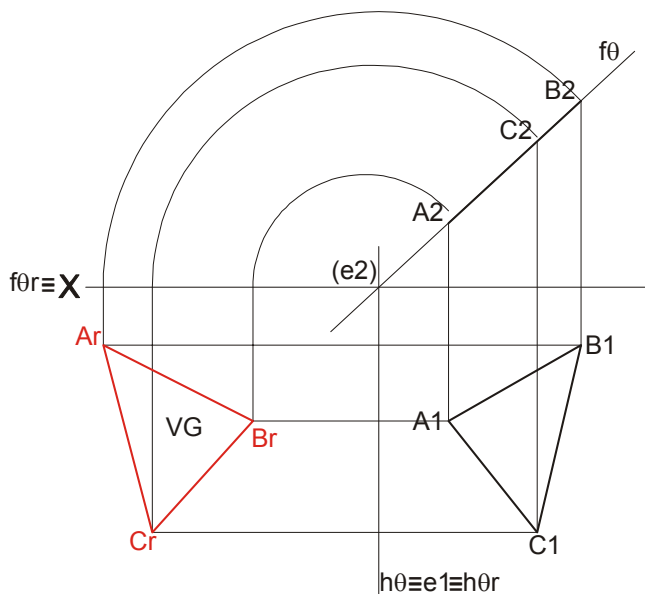
Em rebatimento,  $h\theta r$  fica perpendicular a  $f\theta r$ .

Nota que a charneira é uma recta não projectante (é uma recta frontal).

Os arcos do rebatimento não se projectam em VG em nenhum dos planos de projecção.

Assim, transportou-se o afastamento dos pontos (que é o raio dos respectivos arcos do rebatimento) para  $h\theta$ , através das rectas frontais (de frente) que os contêm.

Em seguida, com o compasso, transportaram-se os afastamentos dos pontos de  $h\theta$  para  $h\theta r$  e, a partir deste, através de paralelas a  $f\theta r$ , até às perpendiculares à charneira que passam pelos pontos, onde se situam os pontos rebatidos.



Também aqui, à semelhança da situação anterior, se optou por omitir a identificação dos planos de topo (os planos ortogonais à charneira) que contêm os arcos do rebatimento dos pontos, com vista a uma maior simplificação do traçado e uma melhor legibilidade da resolução gráfica do problema.

### Exercício 5

1. Considera um segmento de recta [AB], oblíquo, sendo A (4; 3; 4) e B (2; 1; 2). Determina a VG do segmento, rebatendo o seu plano projectante horizontal para o Plano Frontal de Projecção.
2. Considera um triângulo [PQR], contido num plano de topo  $\delta$ , sendo P (2; 4; 4), Q (-1; 3; 1) e R (1; 3). Determina a verdadeira grandeza do triângulo, rebatendo o plano  $\delta$  para o Plano Horizontal de Projecção.
3. Considera o triângulo [PQR] do exercício anterior. Determina a verdadeira grandeza do triângulo, rebatendo o plano  $\delta$  para o Plano Frontal de Projecção.
4. É dado um triângulo [ABC], contido num plano vertical  $\alpha$ , que faz um diedro de  $45^\circ$  (ad) com o Plano Frontal de Projecção. A e B são dois pontos do  $\beta_{1/3}$ , sendo que A tem 2 cm de cota e B tem 5 cm de afastamento. O lado [AC] é vertical e o lado [BC] é horizontal (de nível). Desenha as projecções do triângulo e determina a sua VG, rebatendo o plano  $\alpha$  para o Plano Frontal de Projecção.

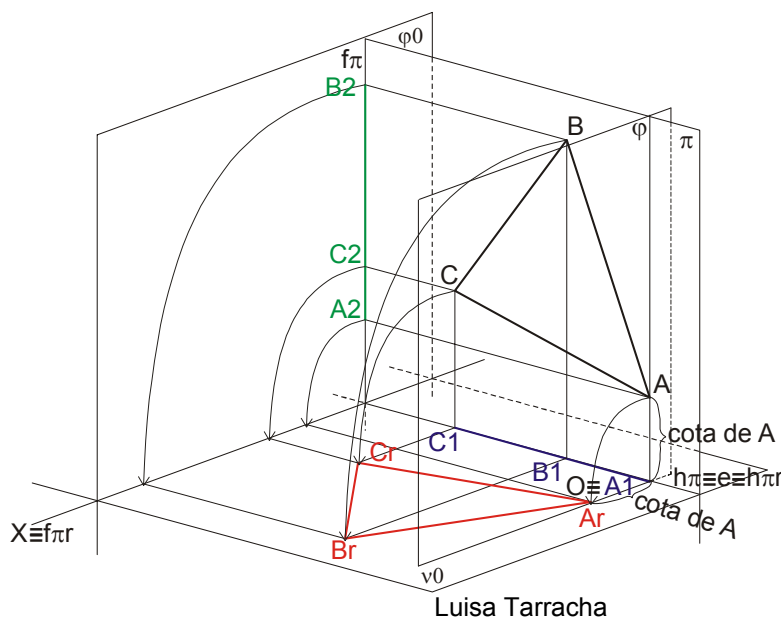
26.	Rebatimento de um plano de perfil.
-----	------------------------------------

### ➤ Rebatimento de um plano de perfil

No estudo anterior observou-se que o rebatimento de um plano projectante se pode processar por dois processos distintos, consoante o tipo de charneira utilizada.

De facto, por exemplo, o rebatimento de um plano vertical  $\alpha$  para o Plano Frontal de Projecção (a charneira é  $f\alpha$ , que é perpendicular ao eixo X – é uma recta projectante) processa-se de forma diferente do rebatimento do plano  $\alpha$  para o Plano Horizontal de Projecção (a charneira é  $h\alpha$ , que é oblíquo ao eixo X – é uma recta não projectante).

Já num plano de perfil, que é duplamente projectante, o rebatimento para os dois planos de projecção processa-se da mesma forma, pois ambos os seus traços são perpendiculares ao eixo X (são, ambos, rectas projectantes), ou seja, a charneira do rebatimento será sempre uma recta projectante, seja qual for o



plano para o qual se processe o rebatimento do plano de perfil.

Analisa a situação.

A figura ilustra o rebatimento de um plano de perfil para o Plano Horizontal de Projecção. A charneira é  $h\pi$ , que é a recta de intersecção do plano  $p$  com o Plano Horizontal de Projecção –  $h\pi$  roda sobre si próprio ( $h\pi$  é coincidente com  $e1$  e com  $h\pi r$ ) e  $f\pi r$  fica coincidente com o eixo X.

A charneira é uma recta de topo, pelo que os planos ortogonais à charneira que contêm os arcos do rebatimento são planos frontais (de frente).

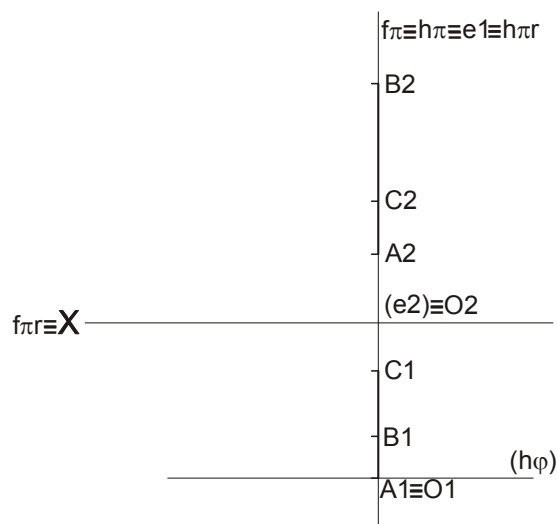
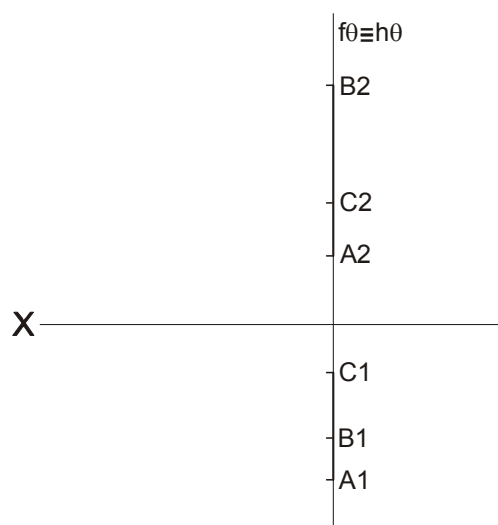
Considera o ponto A.

$\varphi$  – plano frontal (de frente) que contém o arco do rebatimento do ponto A.

O – centro do arco do rebatimento do ponto A.

[AA1] – raio do arco do rebatimento do ponto A.

Nota que o rebatimento do plano  $\pi$  para o Plano Frontal de Projecção se processaria do mesmo modo, com a diferença que a charneira seria  $f\pi$  e os arcos do rebatimento estariam contidos em planos horizontais (de nível), pelo que se projectariam em VG no Plano Horizontal de Projecção.



Considera um triângulo [ABC], contido num plano de perfil  $\pi$  e representado pelas suas projecções.

Pretende-se a VG do triângulo.

Para tal é necessário recorrer a um Processo Geométrico Auxiliar.

Obtemos por rebater o plano que o contém para o Plano Horizontal de Projecção, para a aplicação da situação apresentada.

Começa por identificar a charneira.

$h\pi$  roda sobre si próprio, pelo que se tem imediatamente  $h\pi$  coincidente com  $e1$  e com  $h\pi r$  ( $e2$  é um ponto no eixo X) –  $f\pi r$  fica coincidente com o eixo X.

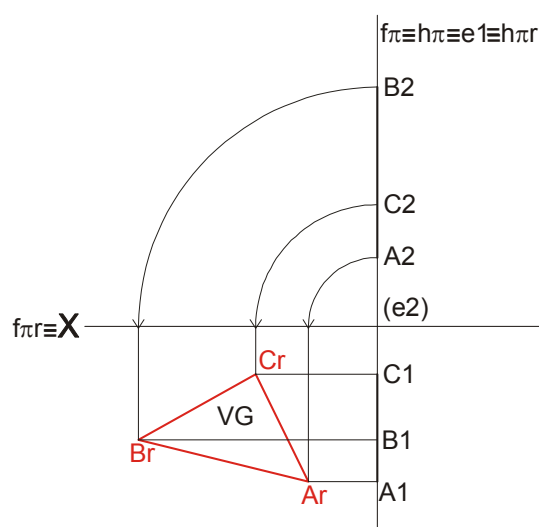
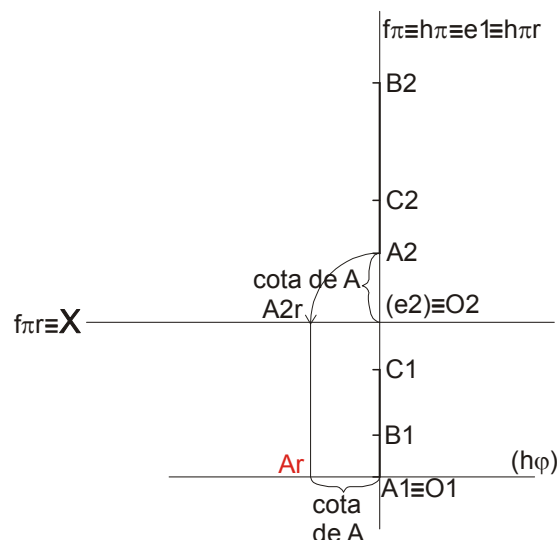
$\varphi$  – plano frontal (de frente) que contém o arco do rebatimento do ponto A.

O – centro do arco do rebatimento do ponto A.

O raio do arco do rebatimento de A é a cota de A., que se projecta em VG no Plano Frontal de Projecção –  $[O2A2]$  é o raio do arco do rebatimento de A.

Com centro em  $O2$  e raio igual à cota de A ( $O2A2$ ), desenha-se o arco do rebatimento de A, em VG, até ao eixo X, obtendo  $A2r$  sobre  $f\pi r$  –  $Ar$  está sobre  $h\phi$ , na mesma linha de chamada de  $A2r$ .

Para simplificar a resolução gráfica e a sua leitura, omite-se a identificação dos planos frontais (de frente) que contêm os arcos do rebatimento, bem como dos centros dos arcos do rebatimento e das projecções frontais dos pontos em rebatimento.



$Br$  – ponto B rebatido.  
 $Cr$  – ponto C rebatido.

$[ArBrCr]$  é o triângulo  $[ABC]$  em VG, em rebatimento.

27.	Recta de perfil. Rebatimento de rectas de perfil. Projecção de pontos pertencentes a uma recta de perfil.	
-----	--	--

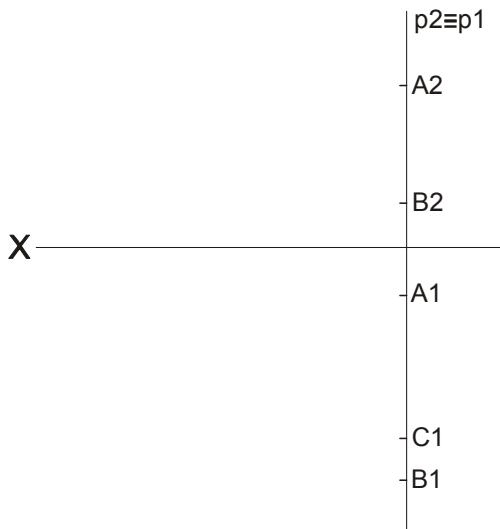
➤ Projecção de pontos pertencentes a uma recta de perfil

Recorda que condição para que um ponto pertença a uma recta, no caso da recta de perfil, é condição necessária mas não suficiente para que o ponto pertença, efectivamente, à recta.

No entanto, agora, com o recurso aos Processos Geométricos Auxiliares, nomeadamente através do rebatimento do plano de perfil, já é possível determinar as projecções de qualquer ponto de uma recta de perfil ou, inclusivamente, as projecções dos seus pontos notáveis.

Considera uma recta de perfil  $p$ , definida por dois dos seus pontos.  
 Vê como determinar as projecções de um ponto C, da recta, com  $x$  cm de afastamento, por exemplo.

Em primeiro lugar, a partir do afastamento do ponto C, é possível determinar  $C1$ , a projecção horizontal de C.

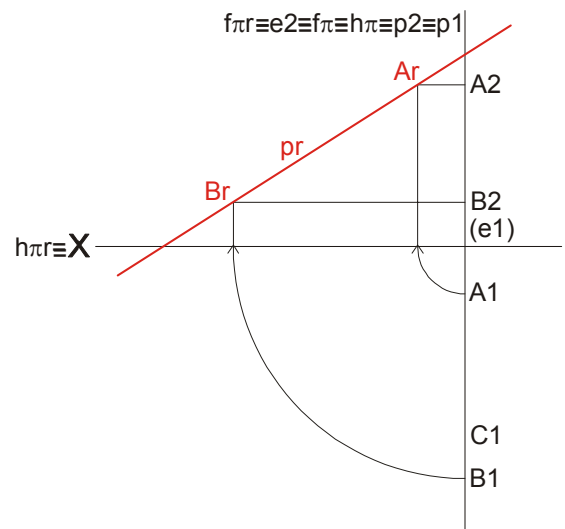


Para determinar a projecção frontal do ponto C é necessário o recurso a um Processo Geométrico Auxiliar.

Opta pelo processo do rebatimento.

Começa, então, por rebater a recta p, o que se processa rebatendo o plano de perfil que a contém.

$\pi$  – plano de perfil auxiliar que contém a recta p.

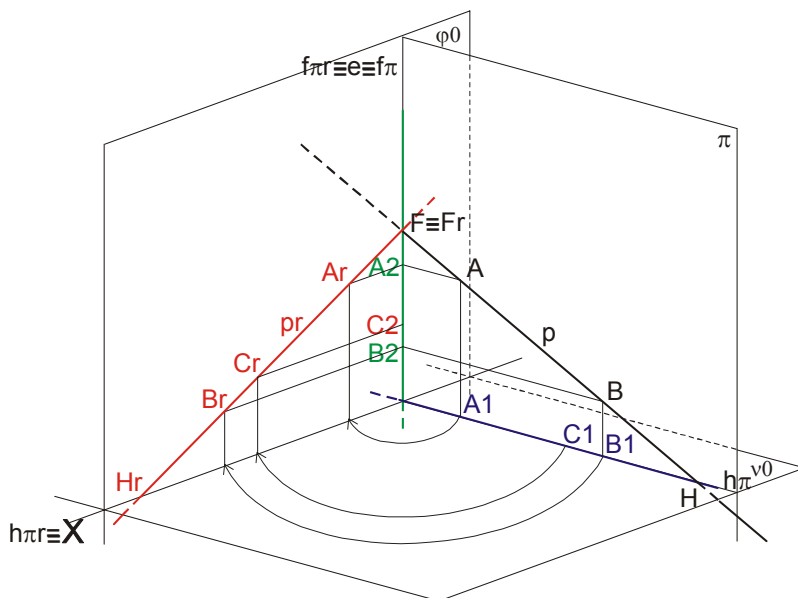


Efectua o rebatimento do plano  $\pi$  para o Plano Frontal de Projecção.

Identifica a charneira (que é  $f\pi$ ) e os traços do plano em rebatimento.

$A_r$  e  $B_r$  – os pontos A e B rebatidos pelo rebatimento do plano  $\pi$ .

$p_r$  – recta p rebatida pelo rebatimento do plano  $\pi$ .



Visualiza a situação no espaço. Qualquer ponto que pertença à recta, em rebatimento, terá de pertencer à recta rebatida.

Nesse sentido, o ponto C, com x cm de afastamento e pertencente à recta p, é o ponto da recta p que dista x cm de  $f\pi$ .

Da mesma forma,  $C_r$  é o ponto de  $p_r$  que dista x cm de  $f\pi_r$ .

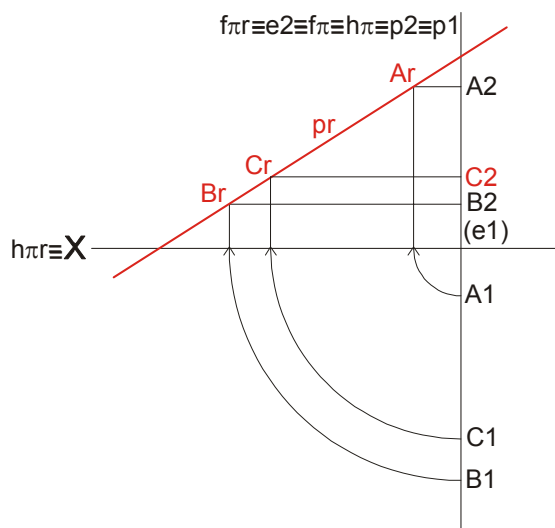
Repara ainda que a recta pertence ao plano, pois os seus traços estão sobre os traços homónimos do plano – F está sobre  $f\pi$  e H está sobre  $h\pi$ .

Da mesma forma, em rebatimento, tem-se que  $F_r$  está sobre  $f\pi_r$  e  $H_r$  está sobre  $h\pi_r$ .

Determina o ponto C em rebatimento.

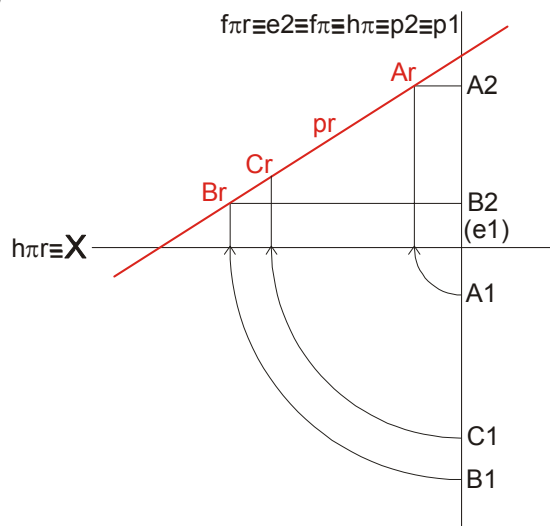
Começa por desenhar o arco do rebatimento do ponto C, que se projecta em VG no Plano Horizontal de Projecção.

Cr é o ponto de pr a que corresponde o arco do rebatimento desenhado.



Para determinar a projecção frontal do ponto C, é necessário inverter o rebatimento, processo que se denomina de contra-rebatimento (ou inversão do rebatimento).

Transportando a cota de Cr para p2, através de uma linha horizontal, obtém-se C2.

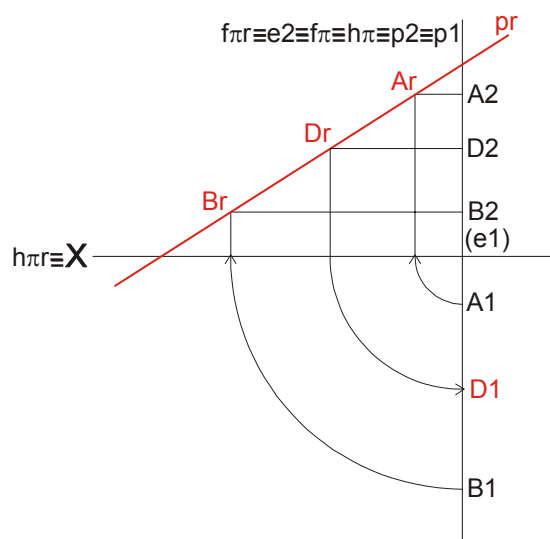


Analisa, em seguida, a situação em que se pretende um ponto D, com y cm de cota e pertencente à recta p.

Tem em conta que, sendo dada a cota do ponto D é possível obter, imediatamente, a sua projecção frontal, sobre a projecção frontal da recta p.

Tal como na situação anterior, para determinar a projecção horizontal do ponto D será, também, necessário o recurso a um Processo Geométrico Auxiliar.

Opta, mais uma vez, pelo processo do rebatimento, rebatendo o plano de perfil que contém a recta p para o Plano Frontal de Projecção, à semelhança da situação anterior.



pr – recta p rebatida, definida por Ar e Br.

Por D2 conduz-se uma linha horizontal até pr, onde se situa Dr.

A partir de Dr é necessário inverter o rebatimento para determinar D1.

Por D1 conduz-se uma perpendicular ao eixo X – a partir do ponto em que essa perpendicular intersecta o eixo X desenha-se o arco do rebatimento de D (em projecção horizontal), em VG e em sentido inverso ao do rebatimento efectuado, até p1.

No extremo do arco (que tem 90° de amplitude), sobre p1, situa-se D1, a projecção horizontal do ponto D.

28.

Pontos notáveis de uma recta de perfil.  
Exercícios práticos de consolidação dos conteúdos expostos.

➤ Pontos notáveis de uma recta de perfil

Considera a recta de perfil das situações anteriores.

Pretendem-se, agora, as projecções dos seus traços nos planos de projecção.

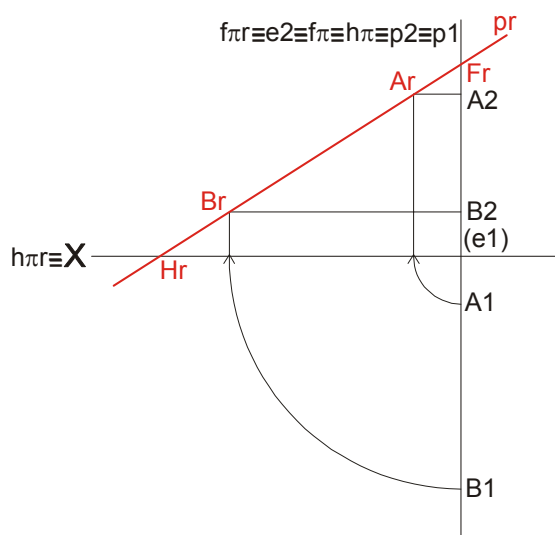
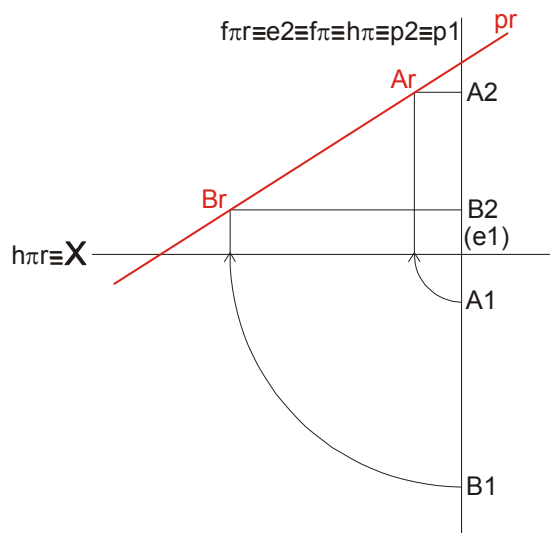
Começa por rebater o plano de perfil que contém a recta para o Plano Frontal de Projectação – a charneira é  $f\pi$  e os arcos do rebatimento estão contidos em planos horizontais (de nível).

e – charneira do rebatimento.

Ar – ponto A rebatido.

Br – ponto B rebatido.

pr – recta p rebatida, definida por Ar e por Br.



O traço frontal (F) e o traço horizontal (H) da recta p têm que estar sobre os traços homónimos do plano  $\pi$ , o que se verifica no espaço, em projecções e em rebatimento.

Assim, Fr tem de estar sobre  $f\pi r$  e Hr tem de estar sobre  $h\pi r$ .

Fr – traço frontal da recta p, em rebatimento.

Hr – traço horizontal da recta p, em rebatimento.

Em seguida, para determinar as projecções dos traços da recta, é necessário contra-rebater o plano.

Fr está coincidente com F2, pois F é um ponto da charneira.

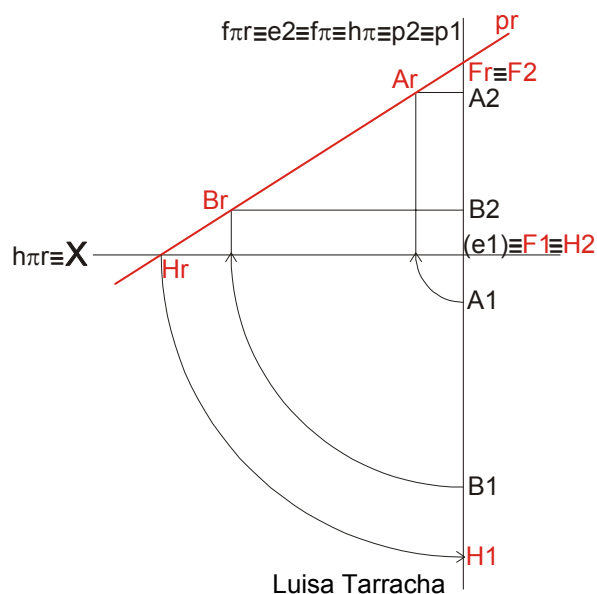
F1 situa-se no eixo X, pois F tem afastamento nulo.

H é um ponto de  $h\pi$  – desenhando o arco do seu rebatimento, em sentido contrário, de  $h\pi r$  para  $h\pi$ , obtém-se H1 sobre  $h\pi$ .

H2 situa-se no eixo X, pois H tem cota nula.

Conclui-se, a partir do estudo precedente, que a determinação dos traços de uma recta de perfil nos planos de projecção requer o recurso a um Processo Geométrico Auxiliar, nomeadamente o do

Escola Profissional Val do Rio



Luisa Tarracha



rebatimento da recta, através do rebatimento do plano de perfil que a contém.  
Assim, da mesma forma, também a determinação dos restantes pontos notáveis da recta (traço no  $\beta_{1/3}$  e traço no  $\beta_{2/4}$ ) se pode processar através do rebatimento da recta.

Visualiza, no espaço, a situação dos pontos notáveis de uma recta de perfil.

F - traço frontal da recta p e situa-se no  $f\pi$ .

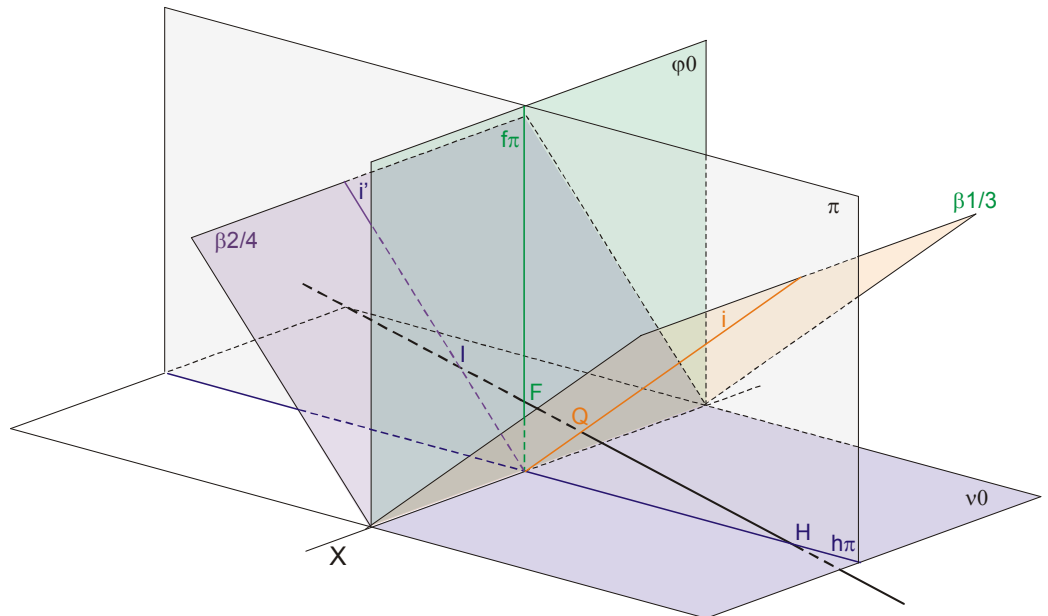
H - traço horizontal da recta p e situa-se no  $h\pi$ .

i - recta de intersecção do plano p com o  $\beta_{1/3}$ .

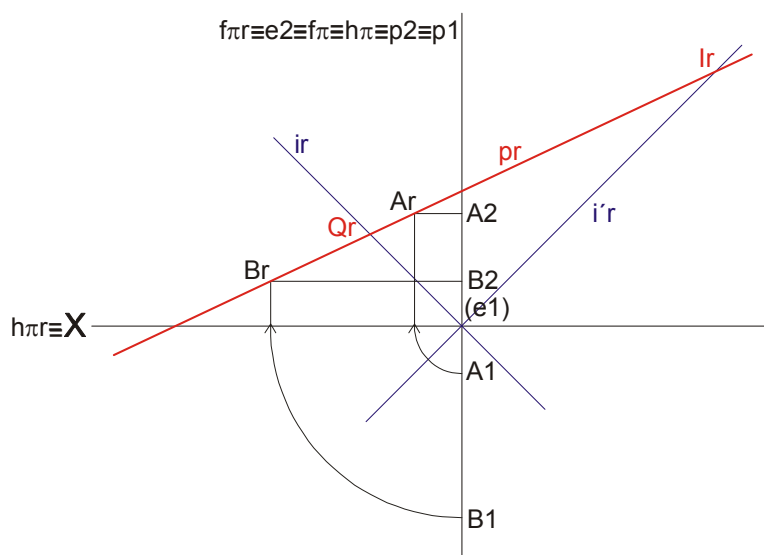
i' - recta de intersecção do plano p com o  $\beta_{2/4}$ .

Q - traço da recta p com o  $\beta_{1/3}$ .

I - traço da recta p com o  $\beta_{2/4}$ .



Repara que as rectas i e i' fazem, com  $f\pi$  e  $h\pi$ , ângulos de  $45^\circ$ .



Determina, agora, os traços da recta p nos planos bissectores. Para tal é necessário, em primeiro lugar, determinar as rectas i e i', em rebatimento, que fazem ângulos de  $45^\circ$  com  $f\pi r$  e  $h\pi r$ .

ir - recta de intersecção do plano p com o  $\beta_{1/3}$ , em rebatimento.

i'r - recta de intersecção do plano p com o  $\beta_{2/4}$ , em rebatimento.

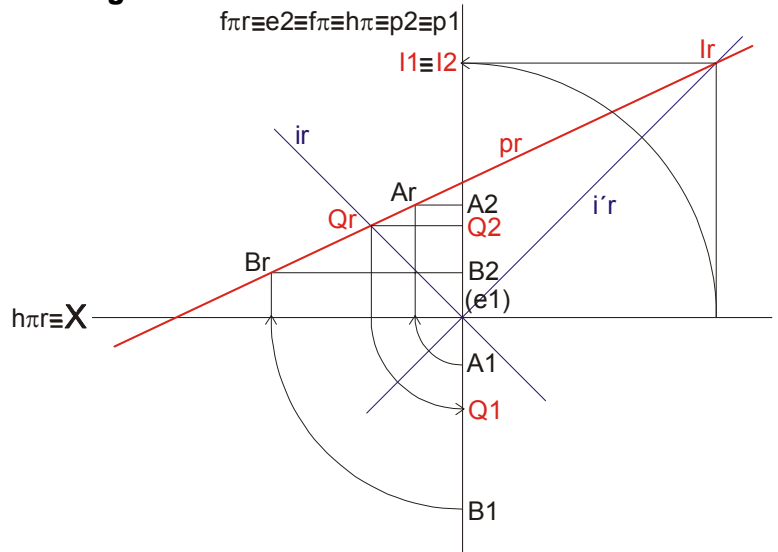
Qr - traço da recta p com o  $\beta_{1/3}$ , em rebatimento.

Ir - traço da recta p com o  $\beta_{2/4}$ , em rebatimento.

As projecções de Q e I obtêm-se contra-rebatendo os pontos, pelo processo já estudado.

Os arcos do rebatimento projectam-se em VG no Plano Horizontal de Projecção, têm 90° de amplitude e rodam em sentido contrário ao dos arcos do rebatimento de A e B.

Q e I mantêm as suas cotas, ao longo da inversão do rebatimento.



### Exercício 6

1. É dado um segmento de recta [AB], de perfil, sendo A (3; 1) e B (2; 4). Determina a VG de [AB].
2. É dada uma recta p, de perfil, definida pelos pontos M (2; 4) e N (5; 1). Determina as projecções de um ponto K, pertencente à recta p e com 3 cm de cota.
3. É dada uma recta p, de perfil, definida pelos pontos A (1; 3) e B (5; 5). Determina as projecções de um ponto C, pertencente à recta p e com 4 cm de afastamento.
4. Considera a recta do exercício 6.2. Determina os seus traços nos planos de projecção.
5. É dada uma recta p, de perfil, definida pelos pontos A (3; 1) e B (1; 5). Determina os seus traços nos planos de projecção.
6. Considera a recta do exercício 6.5. Determina os seus traços nos planos bissectores.

29.	Projecção de figuras planas contidas em planos projectantes não paralelos aos planos de projecção.	
-----	--	--

### ➤ Projecção de figuras planas contidas em planos projectantes não paralelos aos planos de projecção

Como anteriormente se referiu, sempre que um qualquer objecto não está paralelo a qualquer dos planos de projecção, a sua projecção nesse plano sofre uma deformação (ou seja, não se projecta em VG).

Ora, é o caso de uma figura plana contida num plano vertical, por exemplo, que não é paralelo a nenhum dos planos de projecção, o que significa que as duas projecções dessa figura sofrerão uma deformação – a figura não se projecta em VG em nenhum dos planos de projecção.

Dos processos estudados, o mais adequado para o efeito é o do rebatimento, tanto pela simplicidade dos raciocínios como pela facilidade e rigor que nos permite, no que respeita à execução dos traçados.

30.	Polígonos. Processo do rebatimento. Exercícios práticos de consolidação dos conteúdos expostos.	
-----	--	--

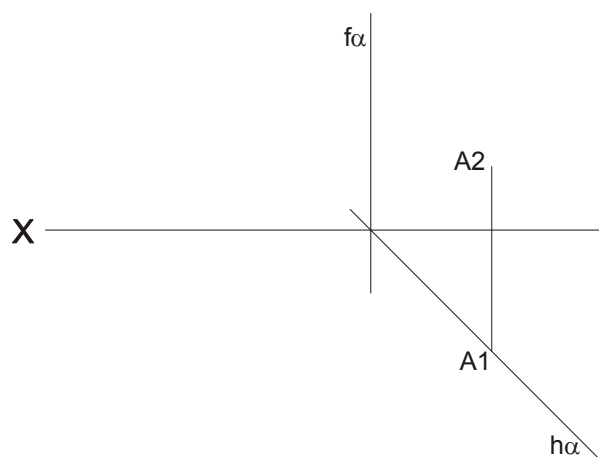
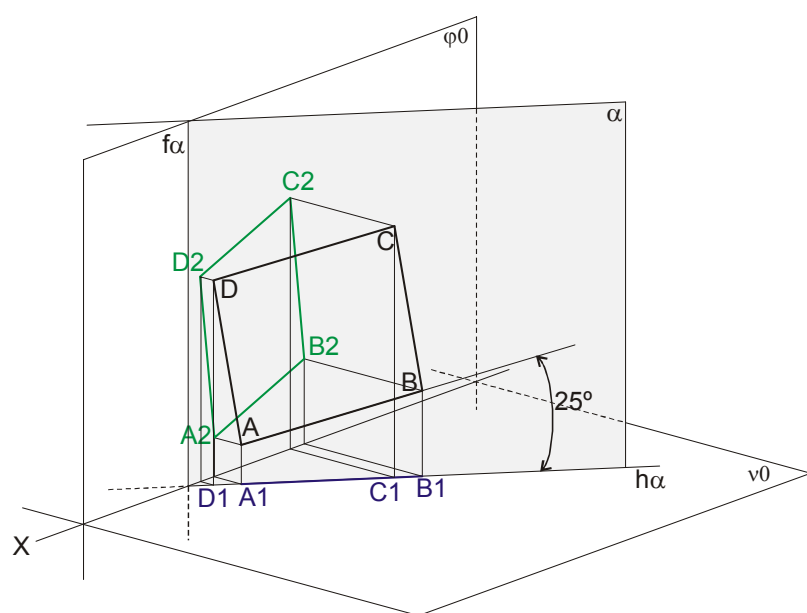
➤ Polígonos. Processo do rebatimento

Seja proposto o enunciado que se segue.

É dado um ponto A (2; 1). O ponto A é um dos vértices de um quadrado [ABCD], situado no 1º Diedro e contido num plano vertical  $\alpha$  que faz, com o Plano Frontal de Projecção, um diedro de  $45^\circ$  (ad). O lado [AB] do quadrado mede 3 cm e faz, com o Plano Horizontal de Projecção, um ângulo de  $20^\circ$ . O vértice B do quadrado tem cota e afastamento superiores a A. Desenha as projecções do quadrado.

Começa por determinar as projecções do ponto A e os traços do plano  $\alpha$ , o plano que contém o polígono.

Visualiza a situação.



O plano  $\alpha$  não é paralelo a nenhum dos planos de projecção, pelo que o quadrado não se projecta em VG em nenhum dos planos de projecção. Da mesma forma, o ângulo que o lado [AB] do quadrado faz com o Plano Horizontal de Projecção (que é o ângulo que [AB] faz com  $h\alpha$ ), também não se projecta em VG em nenhum dos planos de projecção.

Então, é necessário, em primeiro lugar, construir o quadrado em VG, para o que se irá recorrer ao rebatimento do plano  $\alpha$ .

Efectua, então, o rebatimento do plano  $\alpha$  para o Plano Frontal de Projecção.

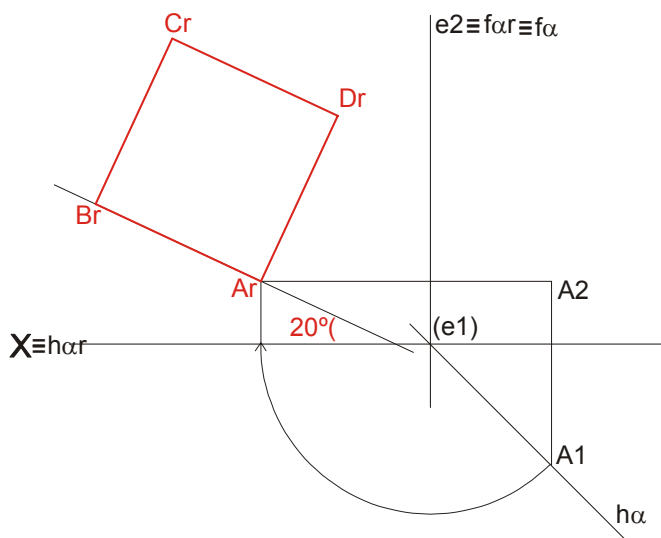
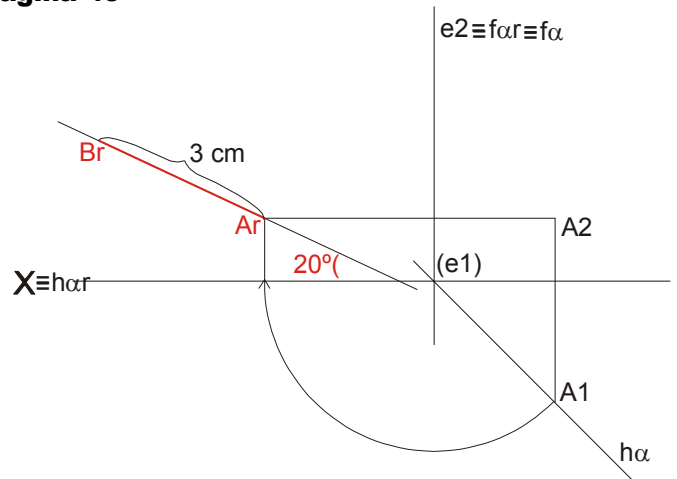
Começa por identificar a charneira (que é  $f\alpha$ ), bem como os traços do plano em rebatimento.

e – charneira do rebatimento.

Ar – ponto A em rebatimento.

Por Ar conduzimos a recta suporte de [AB], em rebatimento, a  $20^\circ$  com  $h\alpha$ .

Sobre essa recta, em VG, medem-se os 3 cm de [AB], obtendo Br, garantindo que B tenha cota e afastamento superiores a A. [ArBr] é o lado [AB] do quadrado, em VG, em rebatimento.



[ArBrCrDr] é o quadrado [ABCD] em VG, construído em rebatimento a partir de [ArBr].

Para obter as projecções do quadrado, é necessário i verter o rebatimento, contra-rebatendo os pontos B, C e D.

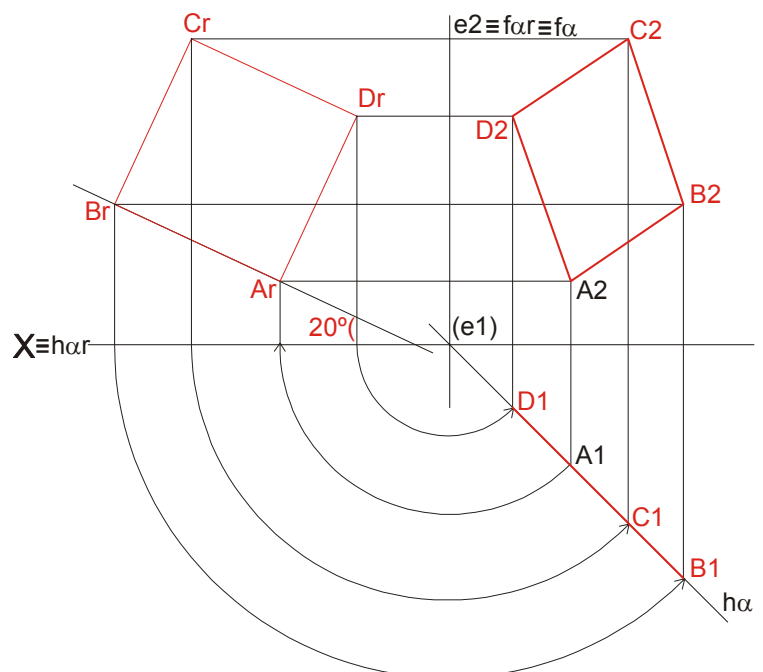
Vê como contra-rebater o ponto B.

Por Br conduz-se uma perpendicular ao eixo X, até ao eixo X, onde se situa B1r (que não se deve representar).

B1 está sobre ha no extremo do seu arco do rebatimento, que roda no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio.

Em seguida, transporta-se a cota de B para a linha de chamada de B1, através do plano horizontal (de nível) que contém o arco do seu rebatimento, obtendo-se B2, a projecção frontal de B.

O procedimento foi idêntico para os restantes vértices do quadrado. A partir das projecções dos quatro vértices do quadrado, desenharam-se as projecções do polígono.



**Exercício 7**

1. São dados dois pontos, A (1; 3; 1) e B (-2; 1; 4). Os pontos A e B são dois vértices de um triângulo equilátero contido num plano de topo  $\gamma$  e situado no 1º Diedro. Desenha as projecções do triângulo, recorrendo ao processo do rebatimento.
2. É dado um quadrado [QRST], situado e contido num plano vertical  $\delta$ . Sabe-se que Q (-1; 1; 2) e S (-4; 3; 3) são dois vértices opostos do quadrado. Desenha as projecções do quadrado, recorrendo ao processo do rebatimento.
3. É dado um ponto A (1; 2). Este é um dos vértices de um hexágono regular [ABCDEF], situado no 1º Diedro e contido num plano de topo  $\theta$ , que faz um diedro de  $40^\circ$  (ae) com o Plano Horizontal de Projectão. Sobre o hexágono sabe-se, ainda, que o lado [AB] mede 3 cm e faz, com  $f\theta$ , um ângulo de  $50^\circ$ , sendo que B tem cota inferior a A. Desenha as projecções do hexágono.
4. Desenha as projecções de um pentágono regular [RSTUV], situado no 1º Diedro e contido num plano de perfil  $\pi$ , sabendo que o pentágono se inscreve numa circunferência com 3 cm de raio, cujo centro é o ponto Q (5; 4). Sabe-se, ainda, que o lado de maior afastamento do pentágono é o lado [RS], que é vertical, sendo que a cota de R é superior à de S.

31.

Círculo.

Exercícios práticos de consolidação dos conteúdos expostos.

➤ Círculo

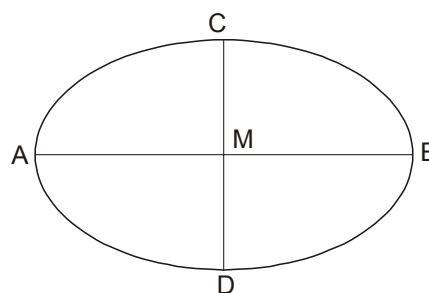
Nota que, no caso das projecções de círculos e circunferências contidos em planos verticais ou de topo, enquanto que uma das suas projecções se reduz a um segmento e recta, já a deformação da outra projecção originará necessariamente uma elipse que, por sua vez, não tem um desenho rigoroso e terá de ser desenhada à mão livre.

Como ilustra a figura a elipse é uma curva que possui dois eixos – um eixo maior (o segmento [AB]) e um eixo menor (o segmento [CD]).

Estes dois eixos são perpendiculares entre si e bissectam-se, ou seja, dividem-se simultaneamente ao meio.

O ponto M, o ponto de concorrência dos dois eixos, é, simultaneamente, o ponto médio de [AB] e de [CD].

A, B, C e D são os vértices da elipse.



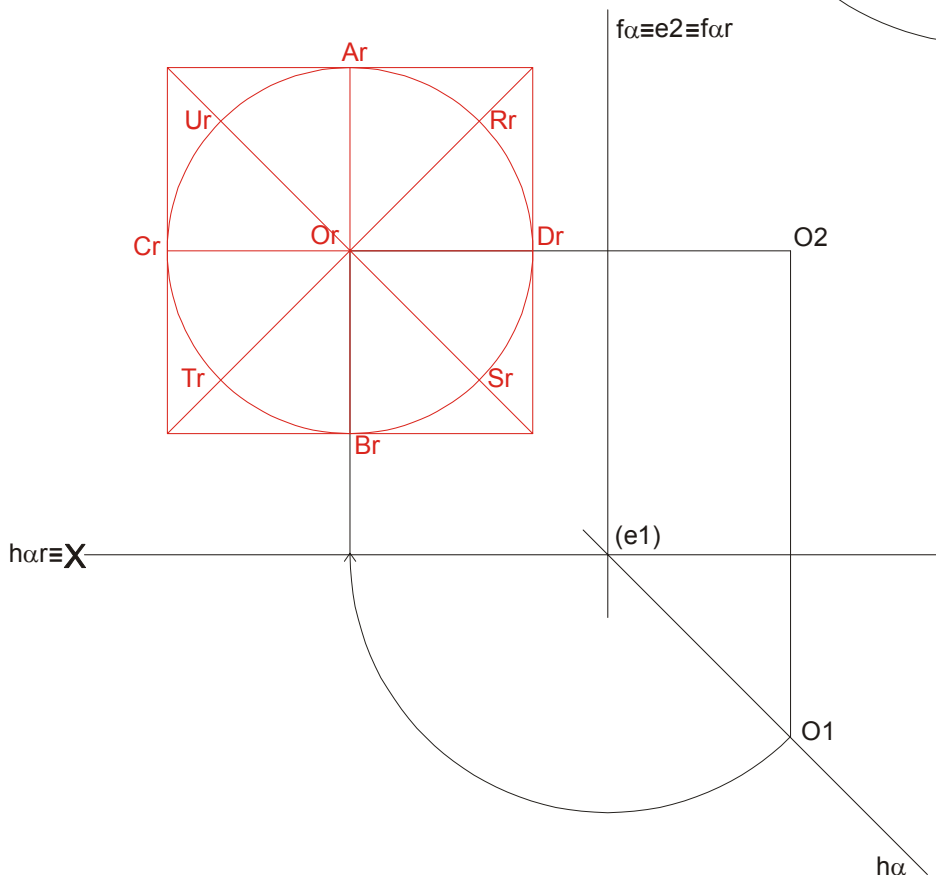
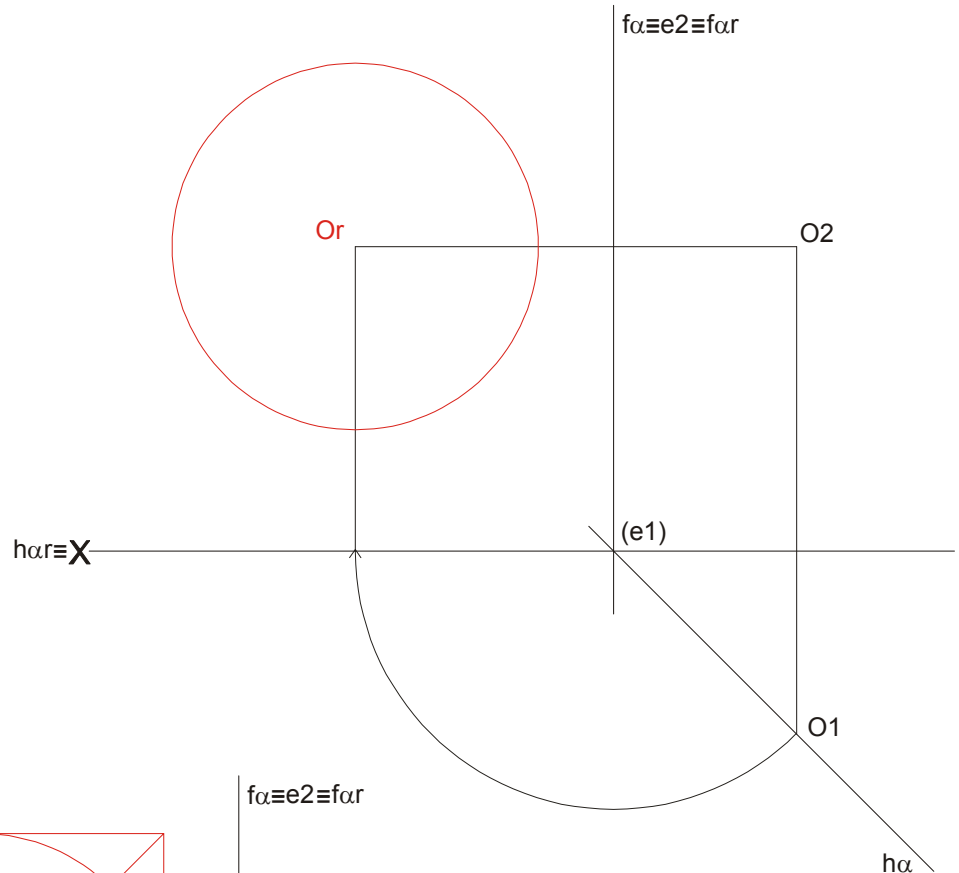
O desenho de uma elipse à mão livre requer, pelo menos, oito dos seus pontos e, para além disso, é conveniente a determinação dos seus eixos, o que implica que quatro dos oito pontos são os extremos dos eixos da elipse.

É ainda conveniente a determinação do paralelogramo envolvente, a cujos lados a elipse será tangente.

Seja proposto o seguinte enunciado.

É dada uma circunferência com 3 cm de raio, contida num plano  $\alpha$ , vertical, e com o centro no ponto O (3; 5). Sobre o plano  $\alpha$  sabe-se que faz um diedro de  $45^\circ$  (ad) com o Plano Frontal de Projectção.

Tendo em conta que o plano  $\alpha$ , que contém a figura, não é paralelo a nenhum plano de projecção, ambas as projecções da circunferência apresentam deformação. Assim, à semelhança dos polígonos, para a construção das projecções da figura é necessário o recurso a um Processo Geométrico Auxiliar. Optemos pelo processo do rebatimento.



Começa por representar o ponto O pelas suas projecções, bem como o plano  $\alpha$ , que contém a figura, pelos seus traços.

Efectua o rebatimento do plano  $\alpha$  para o Plano Frontal de Projectção – identifica a charneira (que é  $f\alpha$ ) e os traços do plano em rebatimento.

Or – ponto O, em rebatimento.

Com centro em Or e o raio de 3 cm, desenha a circunferência em

VG, em rebatimento.

A projecção horizontal da circunferência será um segmento de recta e a sua projecção frontal será uma elipse.

O diâmetro da circunferência que é paralelo à charneira não sofre qualquer redução – a sua projecção frontal corresponderá ao eixo maior da elipse.

O diâmetro da circunferência que é perpendicular à charneira, por sua vez, sofre a redução máxima – a sua projecção frontal corresponderá, assim, ao eixo menor da elipse.

Na sequência do acima exposto, é necessário inscrever a circunferência (em VG, em rebatimento) num quadrado, de lados paralelos à charneira. Em seguida, há que desenhar as medianas do quadrado, [AB] e [CD], em rebatimento.

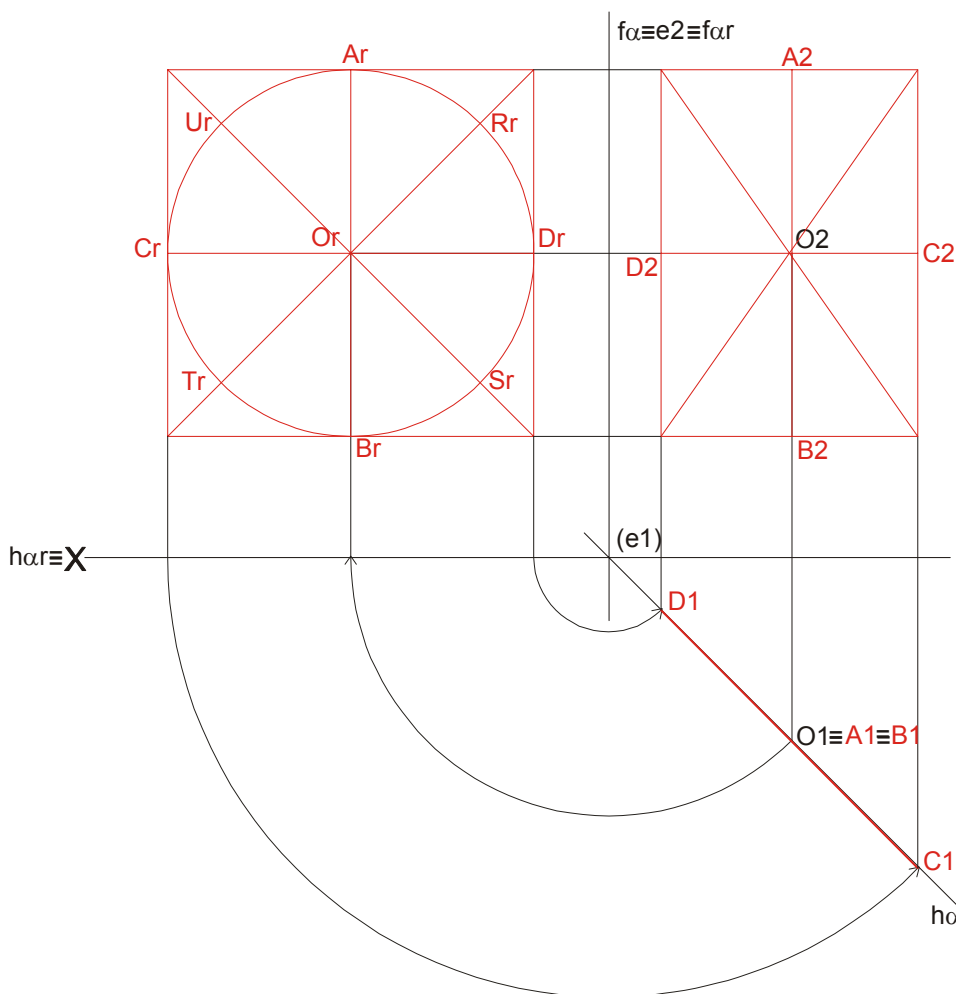
[AB] é o diâmetro da circunferência que é paralelo à charneira – a sua projecção frontal será o eixo maior da elipse.

[CD] é o diâmetro da circunferência que é perpendicular à charneira – a sua projecção frontal será o eixo menor da elipse.

As projecções frontais de A, B, C e D serão os quatro vértices da elipse, pelo que serão, já, quatro pontos da curva.

Para tal, é necessário desenhar as diagonais do quadrado – os pontos em que a circunferência corta as diagonais do quadrado são os pontos R, S, T e U, cujas projecções frontais serão os outros quatro pontos da elipse.

Para determinar as projecções da circunferência, é necessário determinar, antes de mais, as projecções do quadrado no qual a circunferência se inscreve, o que se processa invertendo o rebatimento.



A projecção horizontal do quadrado é um segmento de recta (o segmento  $[C1D1]$  que é, também, a própria projecção horizontal da circunferência (o segmento  $[CD]$  é o diâmetro horizontal da circunferência).

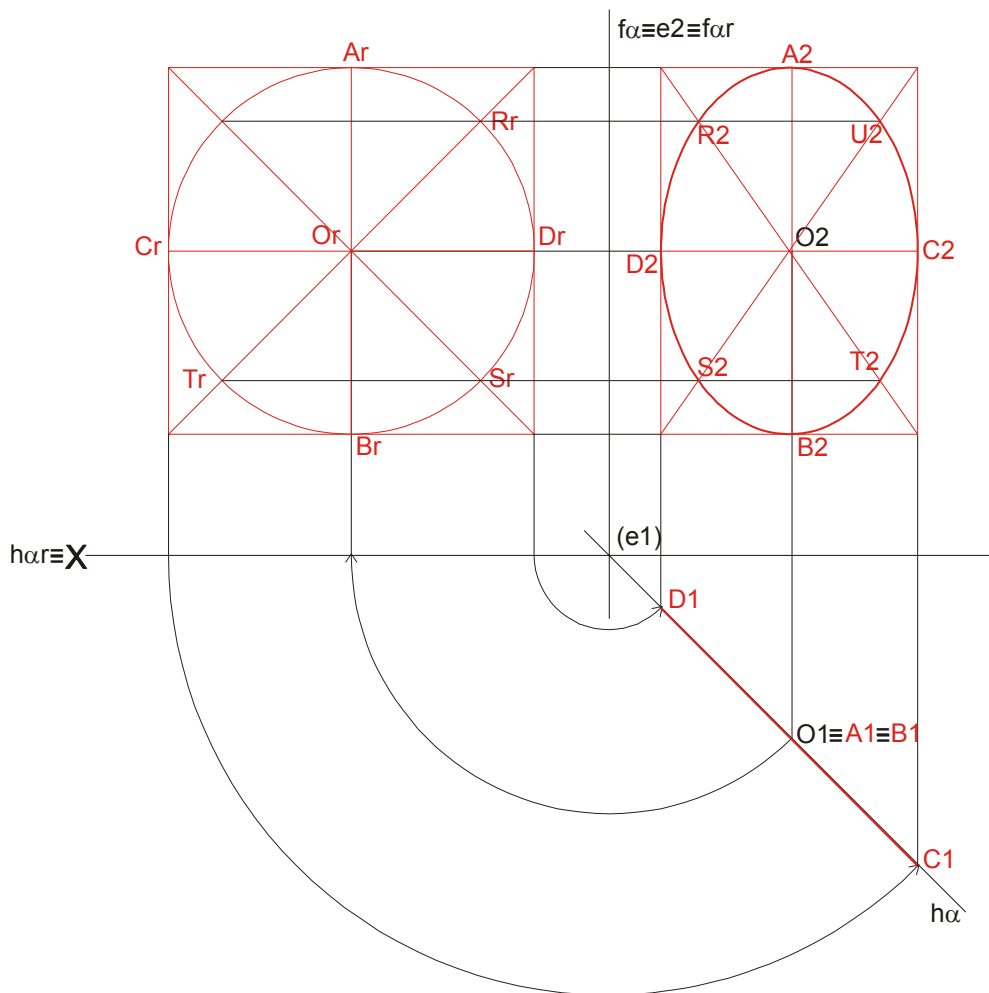
A projecção frontal do quadrado é um rectângulo, que se determinou contra-rebatendo os quatro vértices do quadrado.

Em seguida, desenharam-se as diagonais do rectângulo, que se bissectam em  $O2$ . Por  $O2$  conduziram-se as medianas do rectângulo, que se apoiam nos lados da figura precisamente em  $A2, B2, C2$  e  $D2$ , que são as projecções frontais de  $A, B, C$  e  $D$  e são, imediatamente, os quatro vértices da elipse.

$[A2B2]$  é o eixo maior da elipse.  
 $[C2D2]$  é o eixo menor da elipse.

Por  $Rr, Sr, Tr$  e  $Ur$  conduziram-se as linhas horizontais até às respectivas diagonais do rectângulo, onde se situam, precisamente,  $R2, S2, T2$  e  $U2$ .

Em seguida, desenha a curva da elipse, que passa por  $R2, S2, T2$  e  $U2$  e é tangente aos lados do rectângulo em  $A2, B2, C2$  e  $D2$ .



### Exercício 8

1. É dado um plano vertical  $\lambda$ , que faz, com o Plano Frontal de Projecção, um diedro de  $45^\circ$  (ad). Desenha as projecções de um círculo com 3 cm de raio e o centro no ponto Q (3; 4) contido no plano  $\lambda$ .
2. É dado um plano  $\theta$ , de topo, que faz, com o Plano Horizontal de Projecção, um diedro de  $60^\circ$  (ad). Desenha as projecções de um círculo com 4 cm de raio contido no plano  $\theta$  e tangente aos dois planos de projecção.

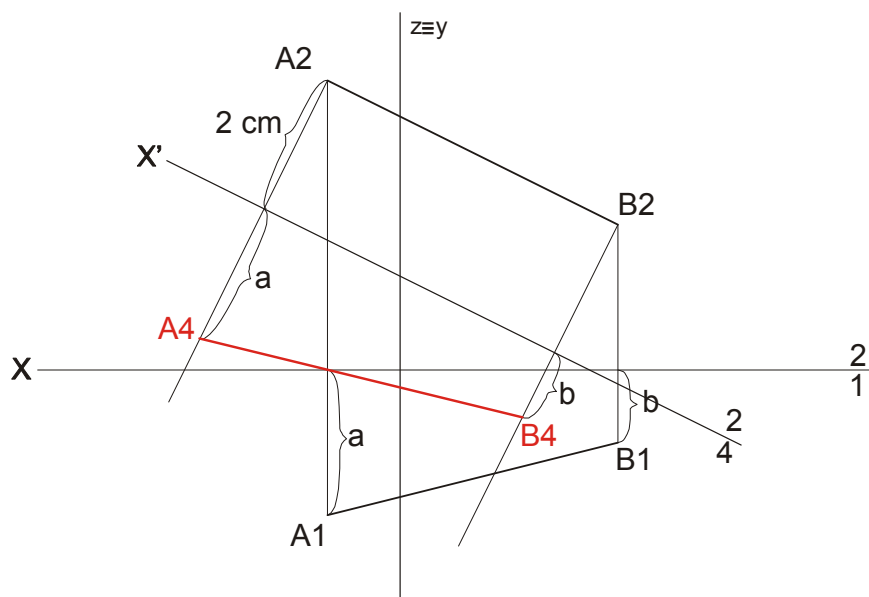


32.	Exercícios práticos de preparação para o teste escrito.	
33.	Teste escrito.	
34.	Teste escrito.	
35.	Entrega e correcção dos testes escritos.	
36.	Auto avaliação e avaliação final.	

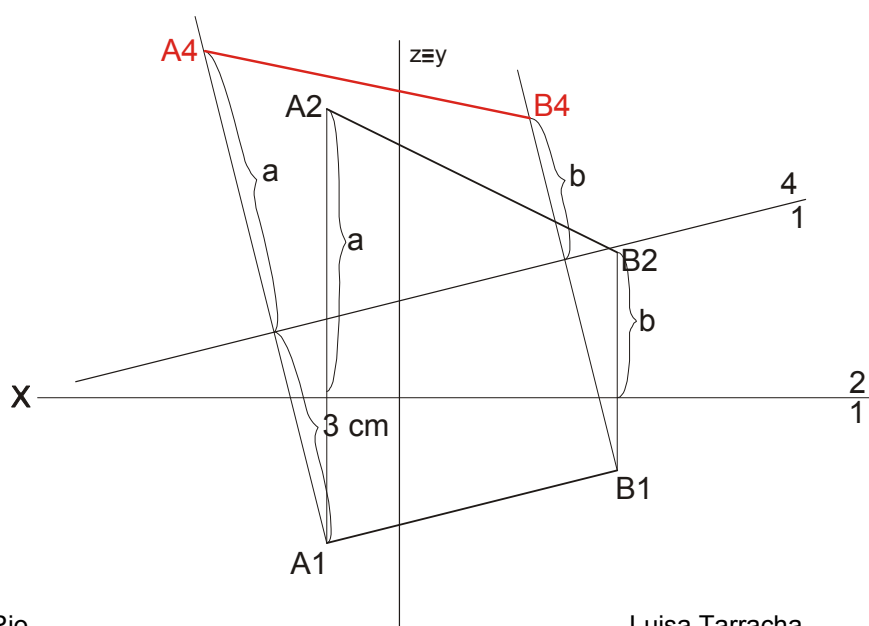
## Resolução de exercícios

**1.1**

É dado um segmento de recta [AB], oblíquo, sendo A (1; 2; 4) e B (-3; 1; 2). Determina a VG do segmento, transformando-o num segmento horizontal (de nível) com 2 cm de cota.

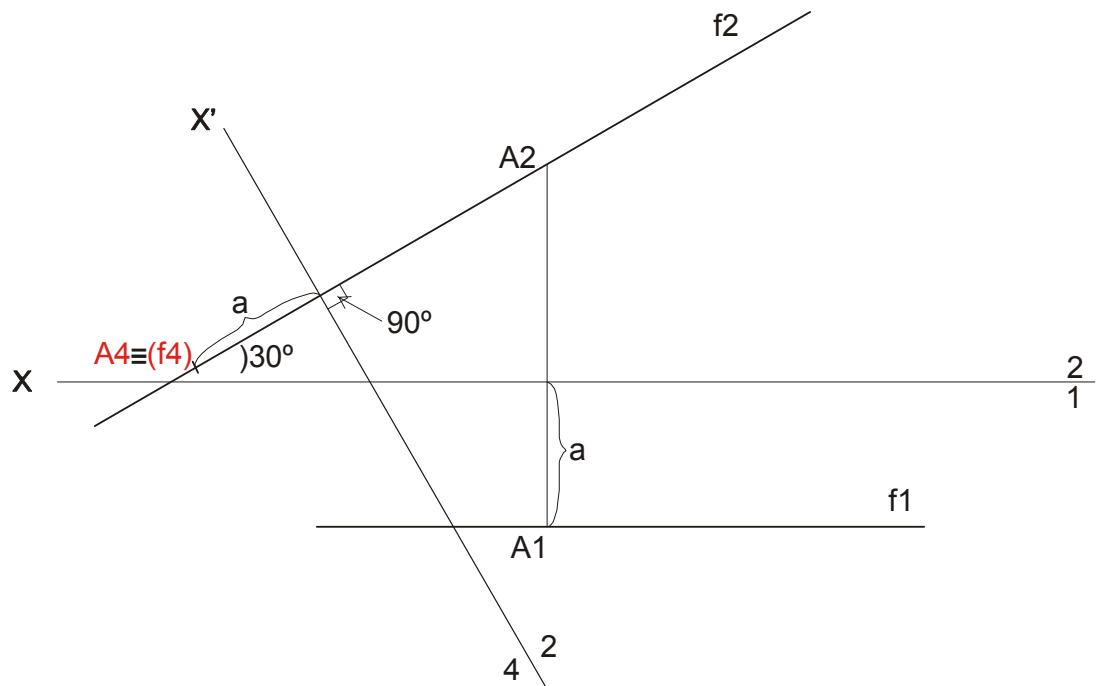
**1.2**

Considera o segmento [AB] do exercício anterior. Transforma o segmento [AB] num segmento de recta frontal (de frente) com 3 cm de afastamento.

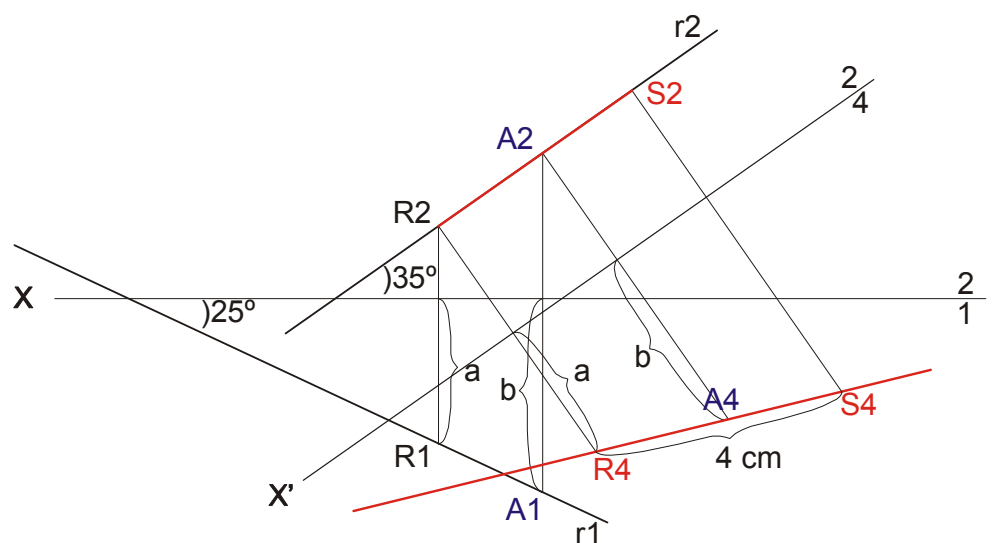


**1.3**

É dada uma recta  $f$ , frontal (de frente). A recta  $f$  passa pelo ponto  $A(2; 3)$  e faz, com o Plano Horizontal de Projectão (plano  $ZY - v0$ ), um ângulo de  $30^\circ$  (ad). Transforma a recta  $f$  numa recta vertical.

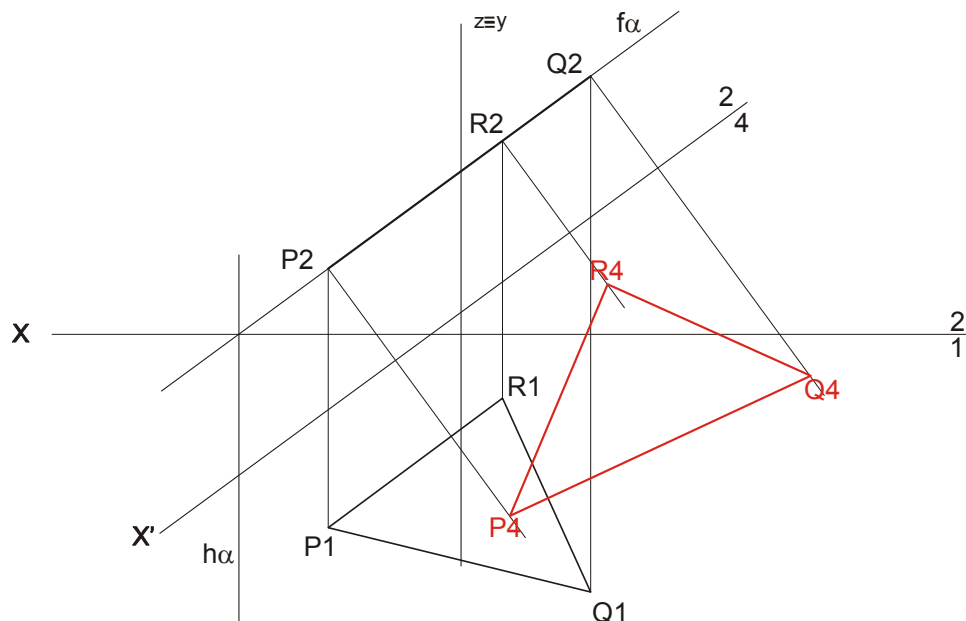
**1.4**

É dada uma recta  $r$ , oblíqua. A recta  $r$  passa pelo ponto  $R(2; 1)$  e as suas projecções fazem, com o eixo  $X$ , ângulos de  $35^\circ$  (ad) e  $25^\circ$  (ad), respectivamente a projecção frontal e a horizontal. Desenha as projecções de um segmento de recta  $[RS]$ , com 4 cm de comprimento, situado no  $1^\circ$  Diedro e contido na recta  $r$ .



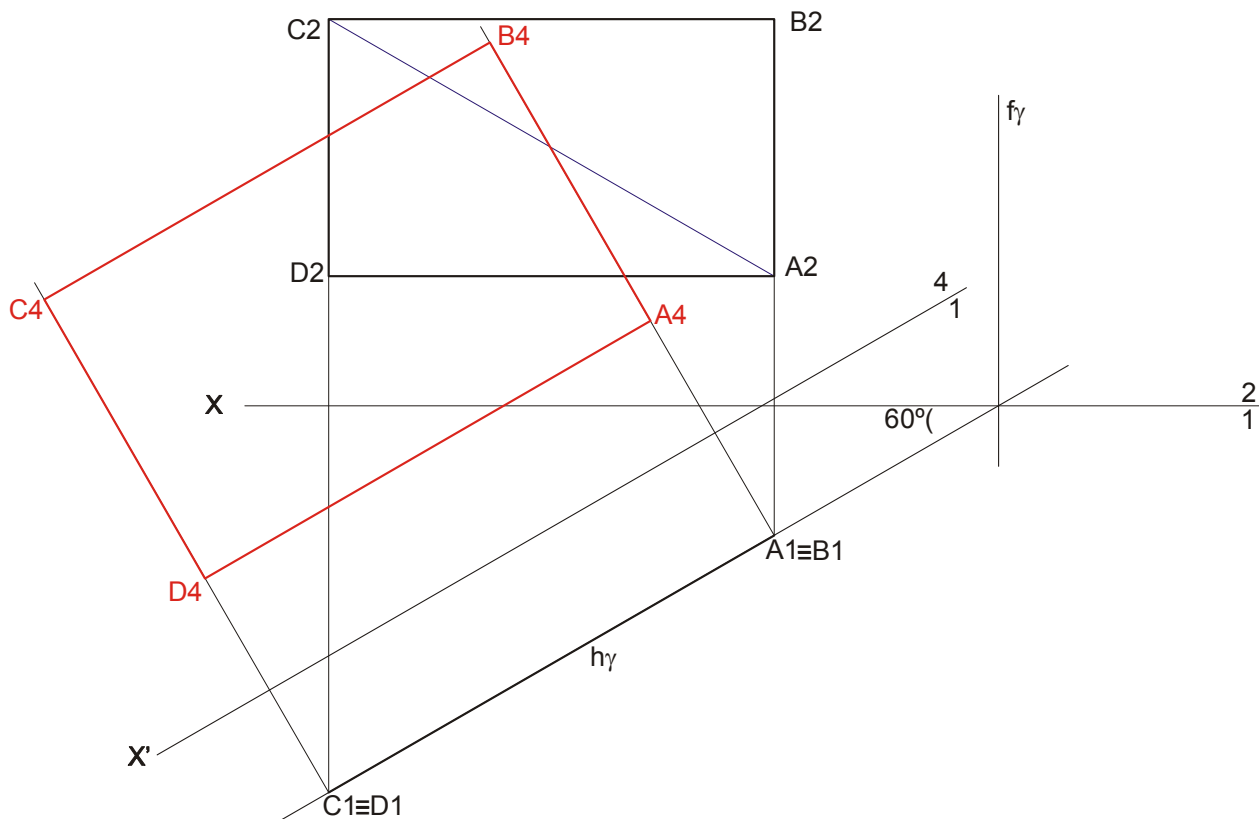
2.1

É dado um triângulo [PQR], contido num plano de topo, sendo P (2; 3; 1), Q (-2; 4; 4) e R (1; 3). Determina a VG do triângulo.



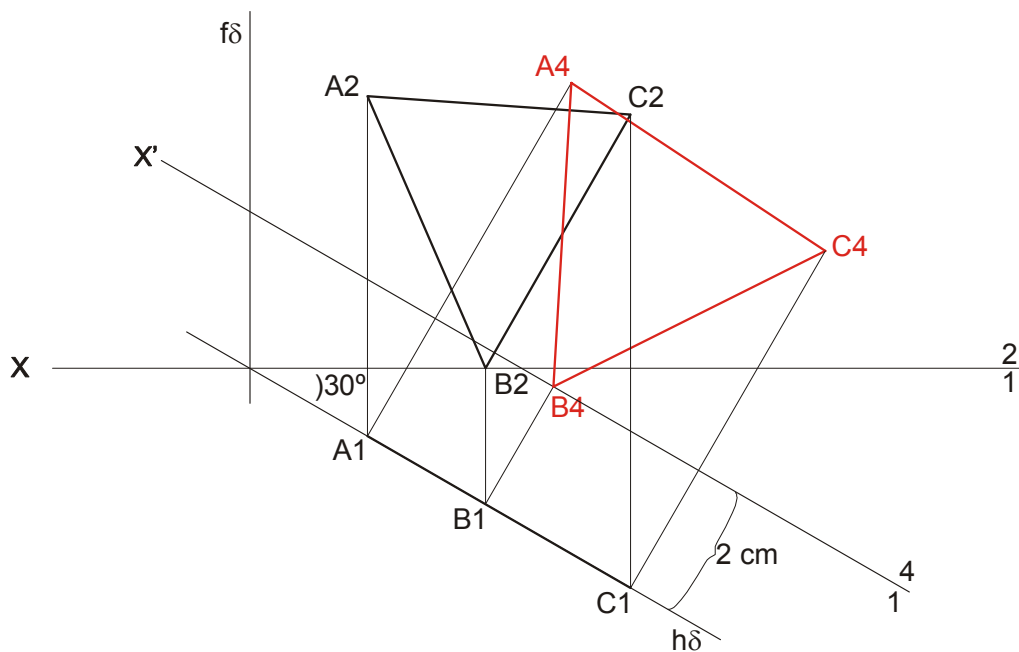
2.2

É dado um rectângulo [ABCD], contido num plano vertical  $\gamma$ . O plano  $\gamma$  faz um diedro de  $60^\circ$  (ae) com o Plano Frontal de Projecção. A diagonal [AC] está contida no  $\beta 1/3$  sendo que A tem 2 cm de cota e C tem 6 cm de afastamento. O lado [AB] do polígono é vertical e o lado [BC] é horizontal (de nível). Desenha as projecções do rectângulo e determina a sua VG.



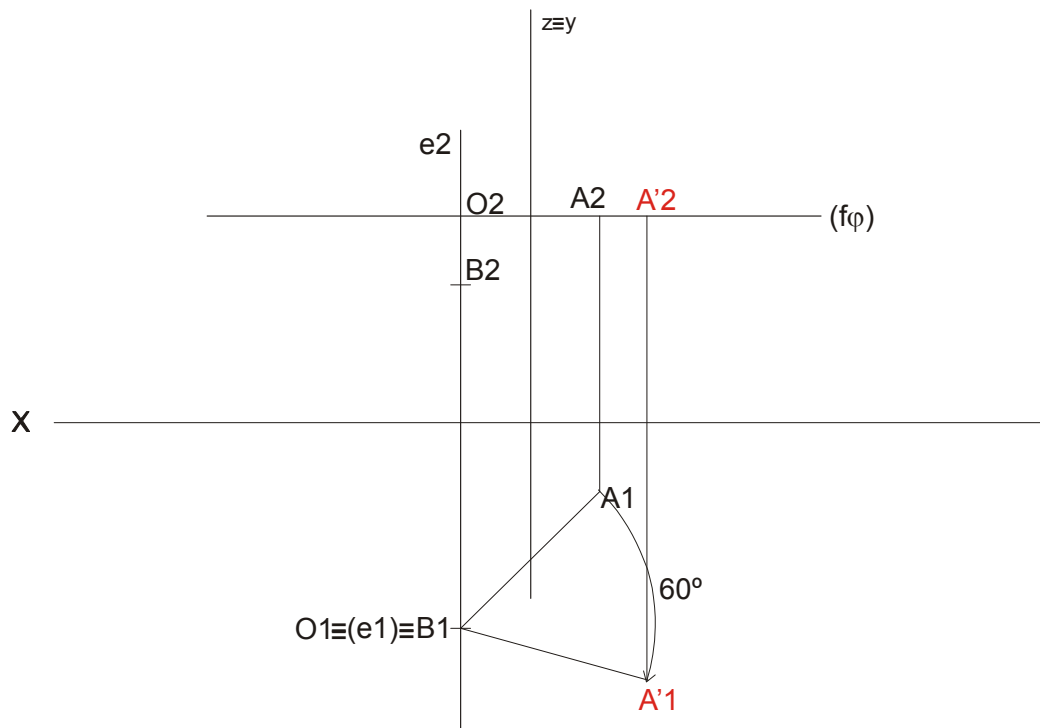
## 2.3

É dado um plano vertical,  $\delta$ , que faz, com o Plano Frontal de Projecção, um diedro de  $30^\circ$  (ad). São dados dois pontos, A (1; 4) e B (2; 0), pertencentes ao plano  $\delta$ . Os pontos A e B são dois vértices de um triângulo equilátero [ABC], contido no plano  $\delta$ . Desenha as projecções do triângulo, construindo previamente a figura em VG, após transformar o plano  $\delta$  num plano frontal (de frente) com 2 cm de afastamento.



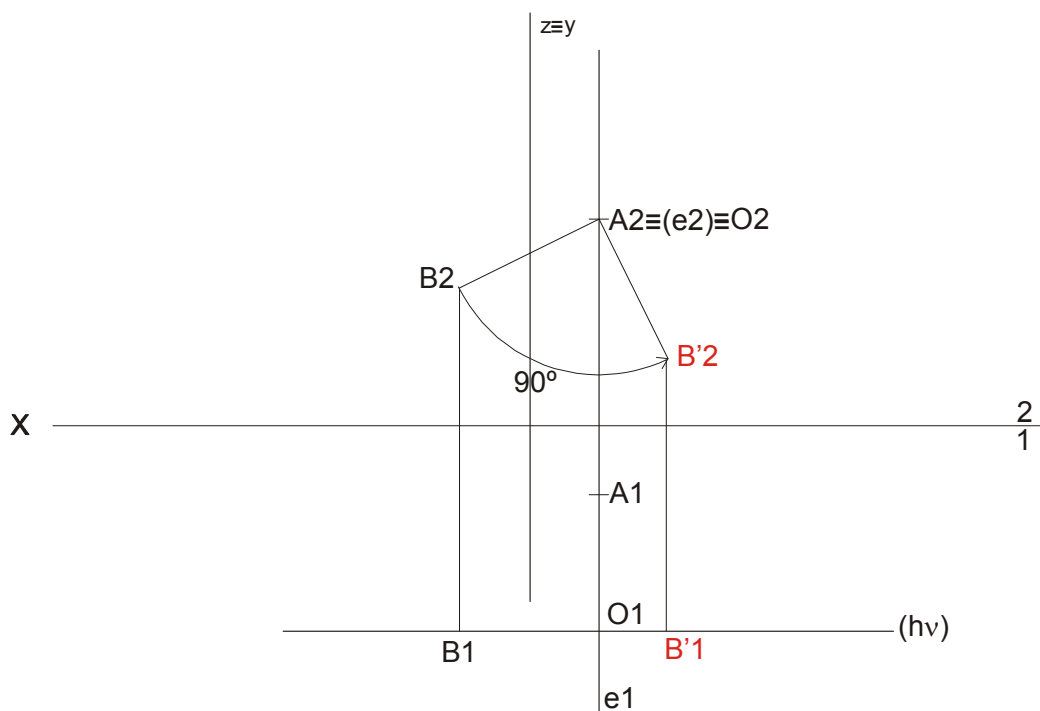
3.1

São dados os pontos A (-1; 1; 3) e B (1; 3; 2). Determina as projecções do ponto A, após uma rotação de  $60^\circ$ , no sentido dos ponteiros do relógio, em torno de uma recta vertical que contém o ponto B.



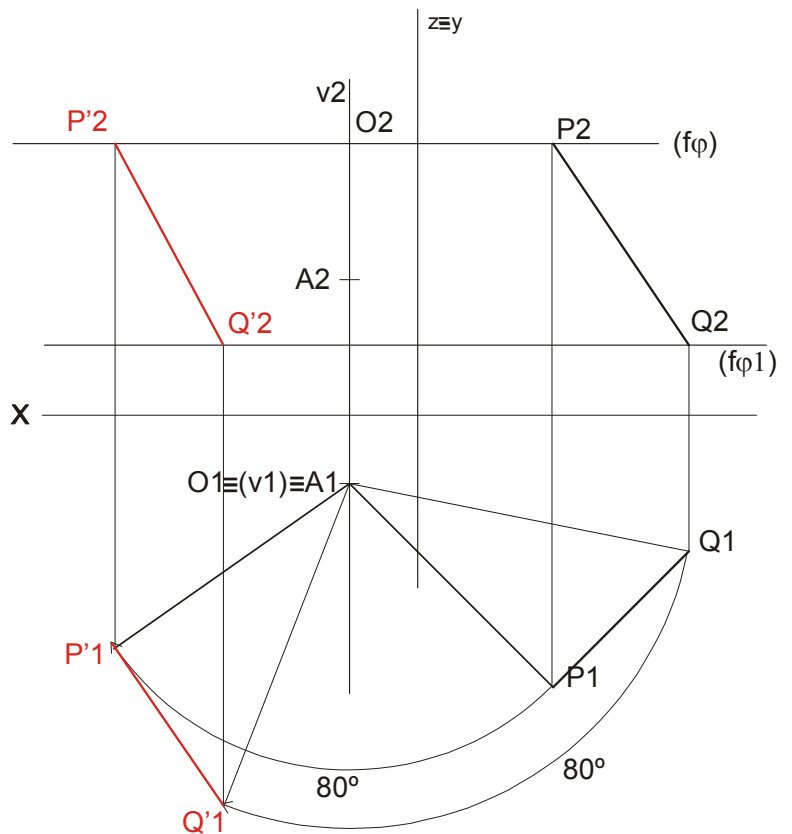
3.2

Considera os pontos A e B do exercício anterior. Determina as projecções do ponto B, após uma rotação de  $90^\circ$ , no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio, em torno de uma recta de topo que contém o ponto A.



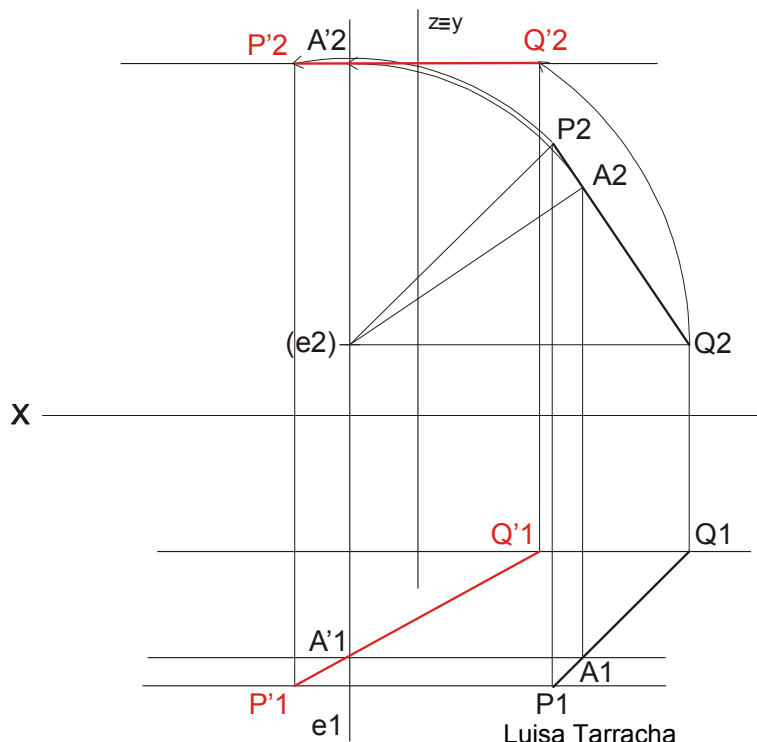
## 3.3

É dado um segmento de recta [PQ], sendo P (-2; 4; 4) e Q (-4; 2; 1). É dada, também, uma recta v, vertical, que contém o ponto A (1; 1; 2). Determina as projecções do segmento [PQ], após uma rotação de  $80^\circ$ , no sentido dos ponteiros do relógio, em torno da recta v.



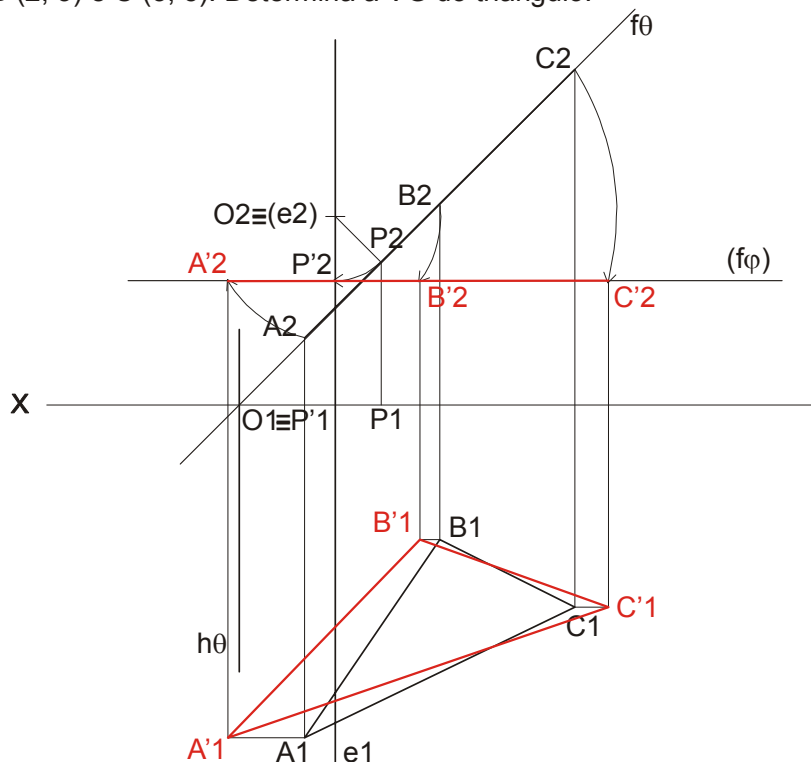
## 3.4

Considera o segmento de recta [PQ] do exercício anterior. Determina a verdadeira grandeza de PQ, transformando [PQ] num segmento de recta horizontal (de nível), com recurso a uma rotação.



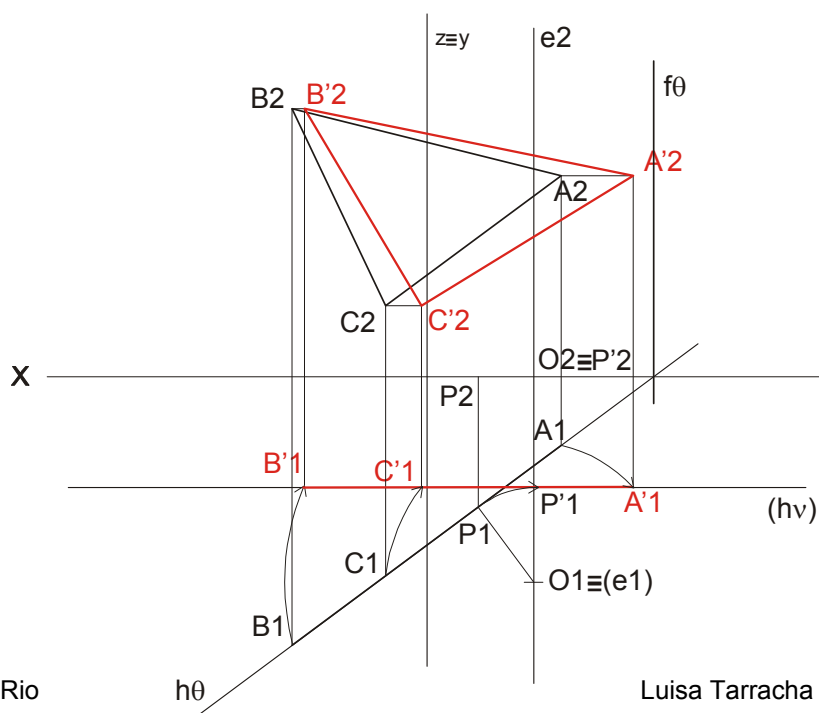
4.1

É dado um plano  $\theta$ , de topo, que faz um diedro de  $45^\circ$  (ad) com o Plano Horizontal de Projecção. É dado, ainda, um triângulo  $[ABC]$ , contido no plano  $\theta$ , sendo A (5; 1), B (2; 3) e C (3; 5). Determina a VG do triângulo.



4.2

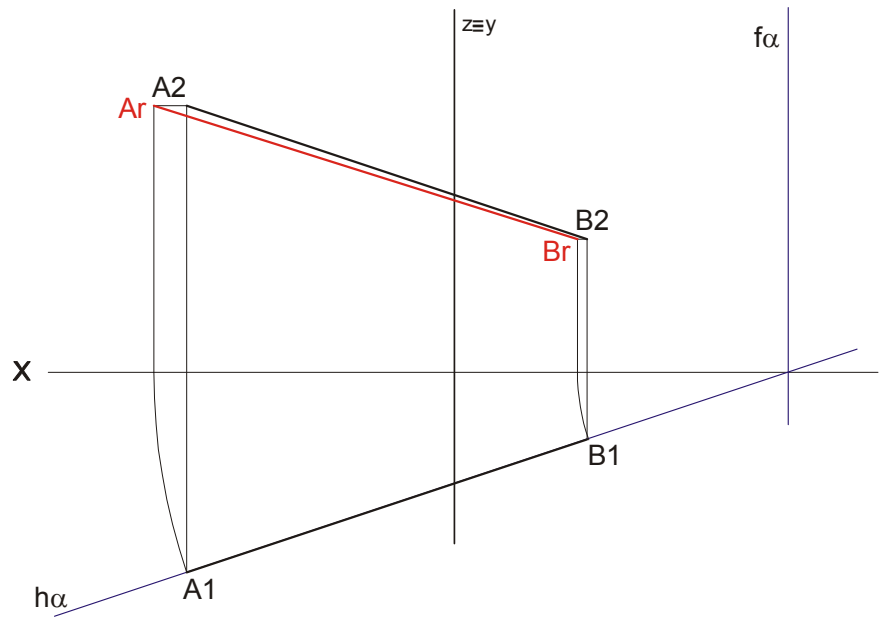
Considera um triângulo  $[ABC]$ , contido num plano vertical  $\phi$ , sendo A (-2; 1; 3), B (2; 4; 4) e C (3; 1). Determina a VG do triângulo.





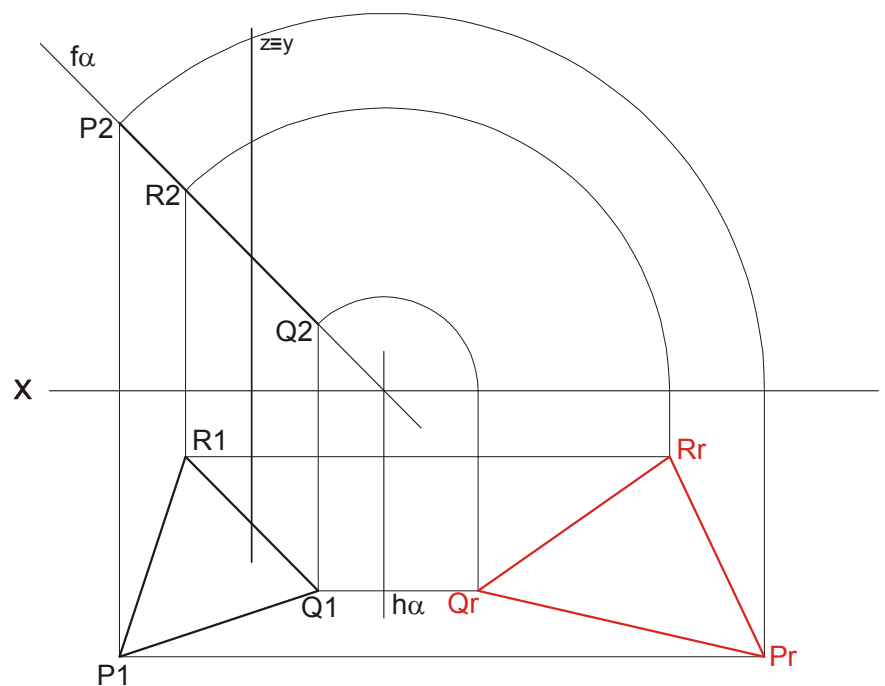
5.1

Considera um segmento de recta  $[AB]$ , oblíquo, sendo A (4; 3; 4) e B (2; 1; 2). Determina a VG do segmento, rebatendo o seu plano projectante horizontal para o Plano Frontal de Projectação.



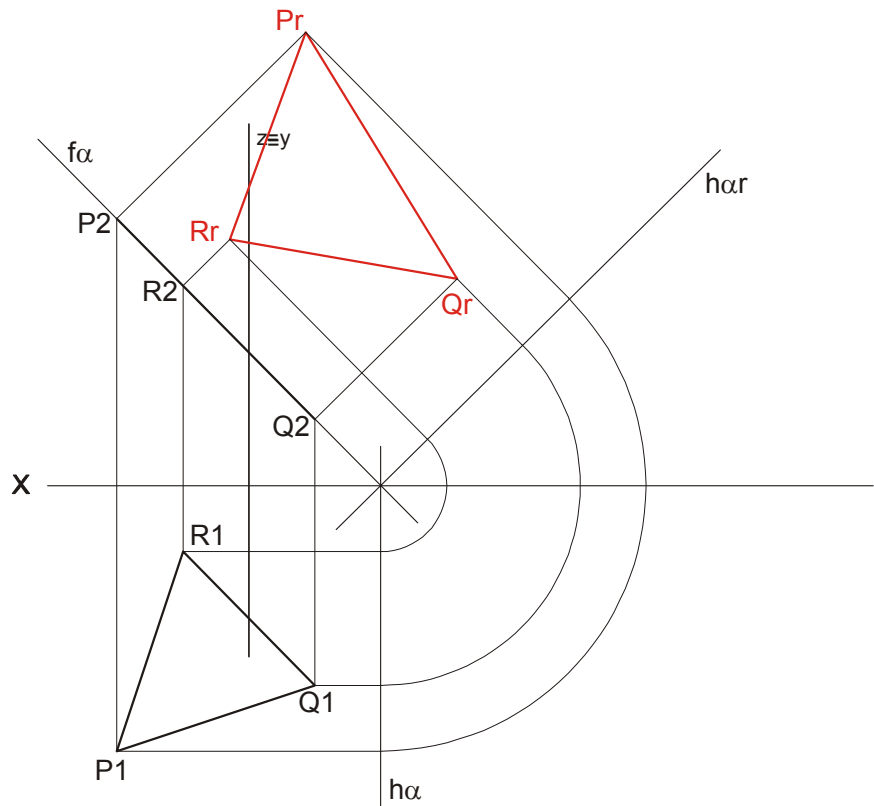
5.2

Considera um triângulo  $[PQR]$ , contido num plano de topo  $\delta$ , sendo P (2; 4; 4), Q (-1; 3; 1) e R (1; 3). Determina a verdadeira grandeza do triângulo, rebatendo o plano  $\delta$  para o Plano Horizontal de Projectação.



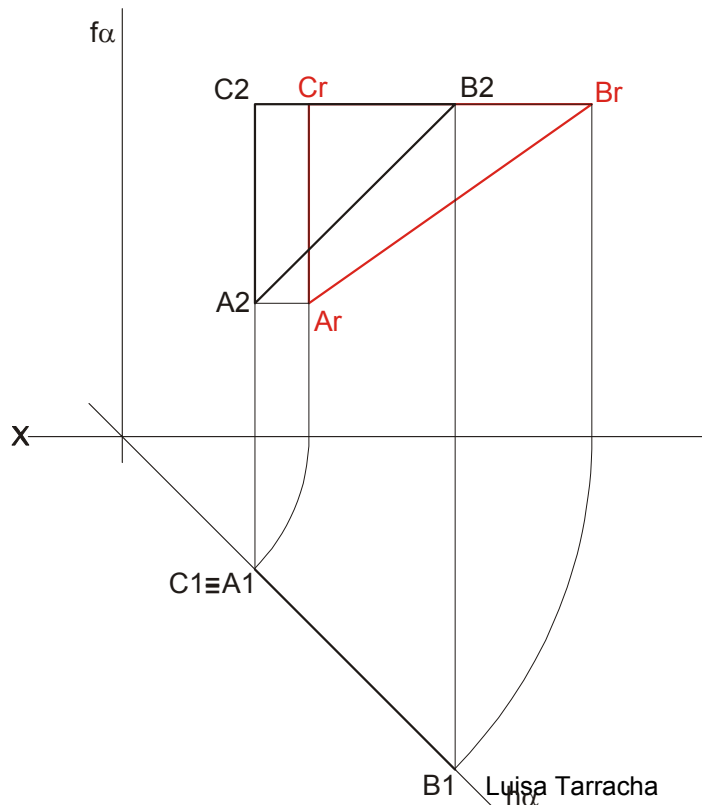
5.3

Considera o triângulo [PQR] do exercício anterior. Determina a verdadeira grandeza do triângulo, rebatendo o plano  $\delta$  para o Plano Frontal de Projecção.



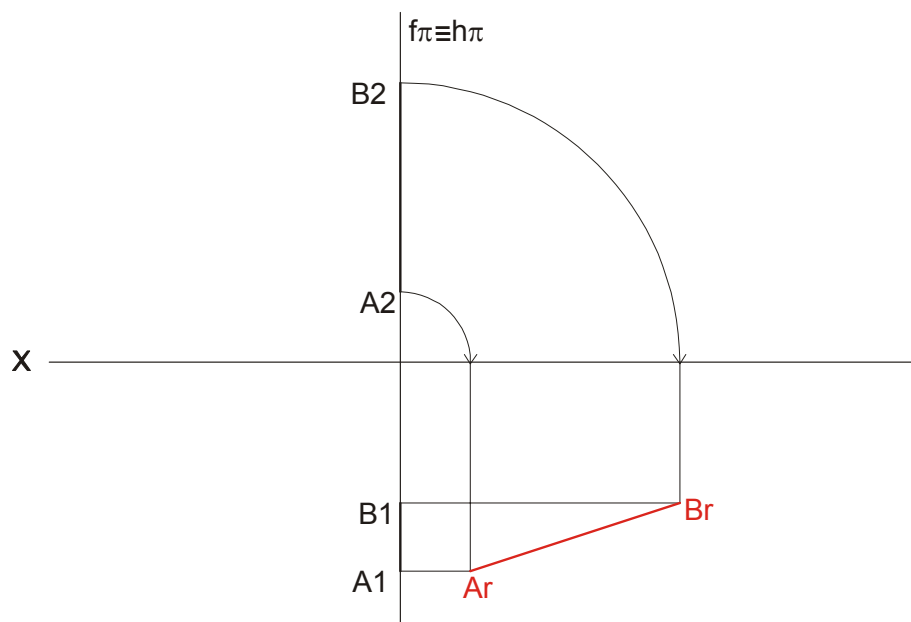
5.4

É dado um triângulo [ABC], contido num plano vertical  $\alpha$ , que faz um diedro de  $45^\circ$  (ad) com o Plano Frontal de Projecção. A e B são dois pontos do  $\beta 1/3$ , sendo que A tem 2 cm de cota e B tem 5 cm de afastamento. O lado [AC] é vertical e o lado [BC] é horizontal (de nível). Desenha as projecções do triângulo e determina a sua VG, rebatendo o plano  $\alpha$  para o Plano Frontal de Projecção.



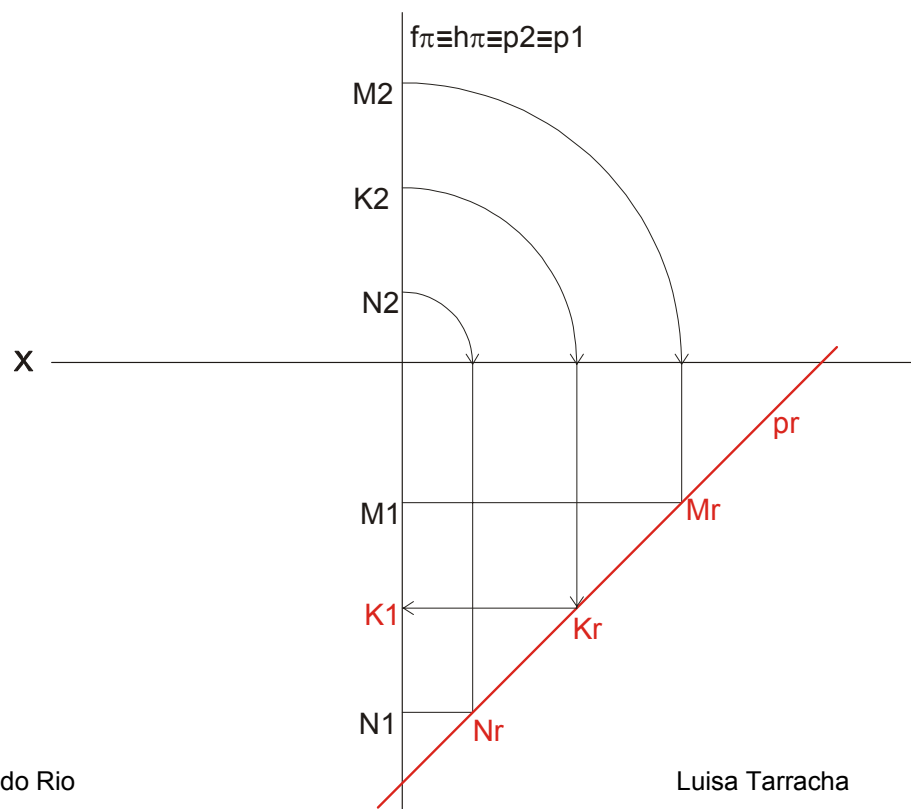
6.1

É dado um segmento de recta [AB], de perfil, sendo A (3; 1) e B (2; 4). Determina a VG de [AB].



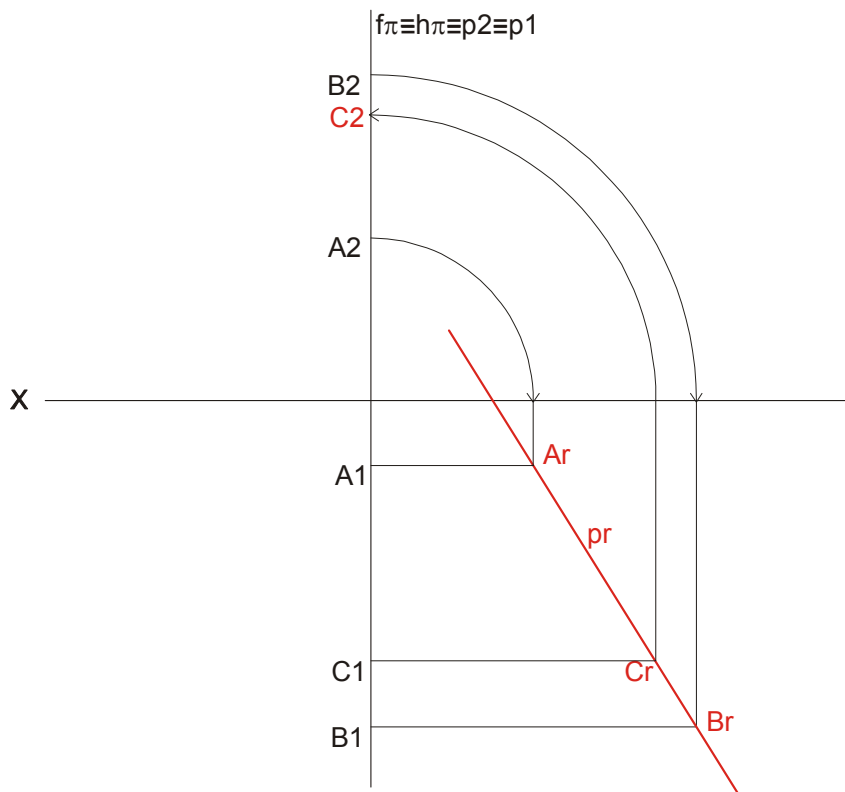
6.2

É dada uma recta p, de perfil, definida pelos pontos M (2; 4) e N (5; 1). Determina as projecções de um ponto K, pertencente à recta p e com 3 cm de cota.



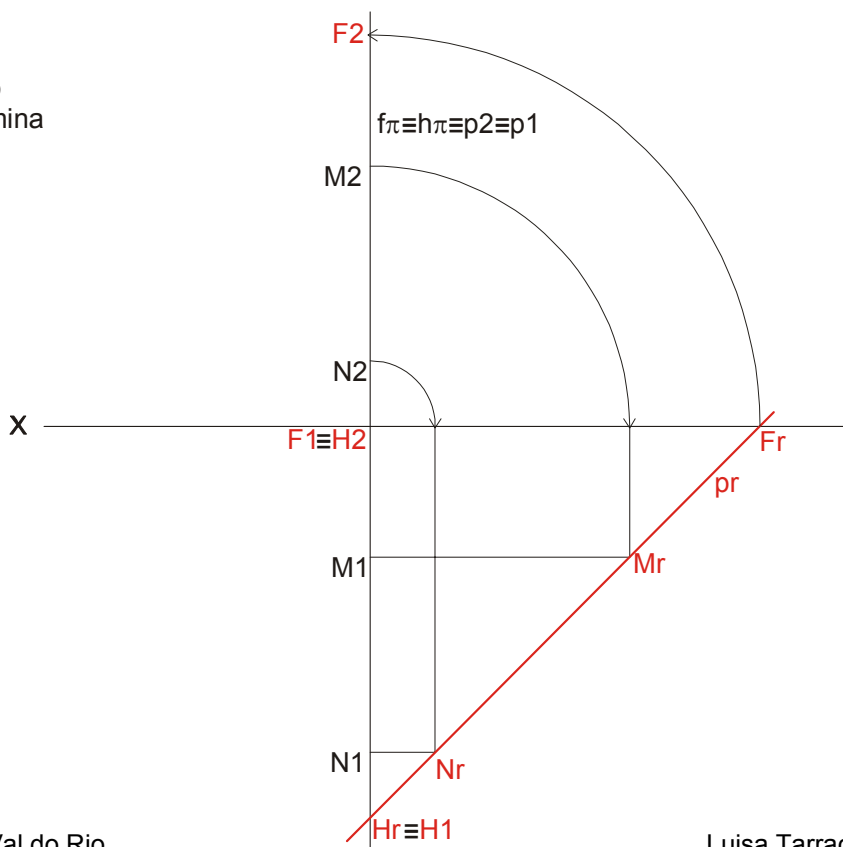
## 6.3

É dada uma recta  $p$ , de perfil, definida pelos pontos A (1; 3) e B (5; 5). Determina as projecções de um ponto C, pertencente à recta  $p$  e com 4 cm de afastamento.



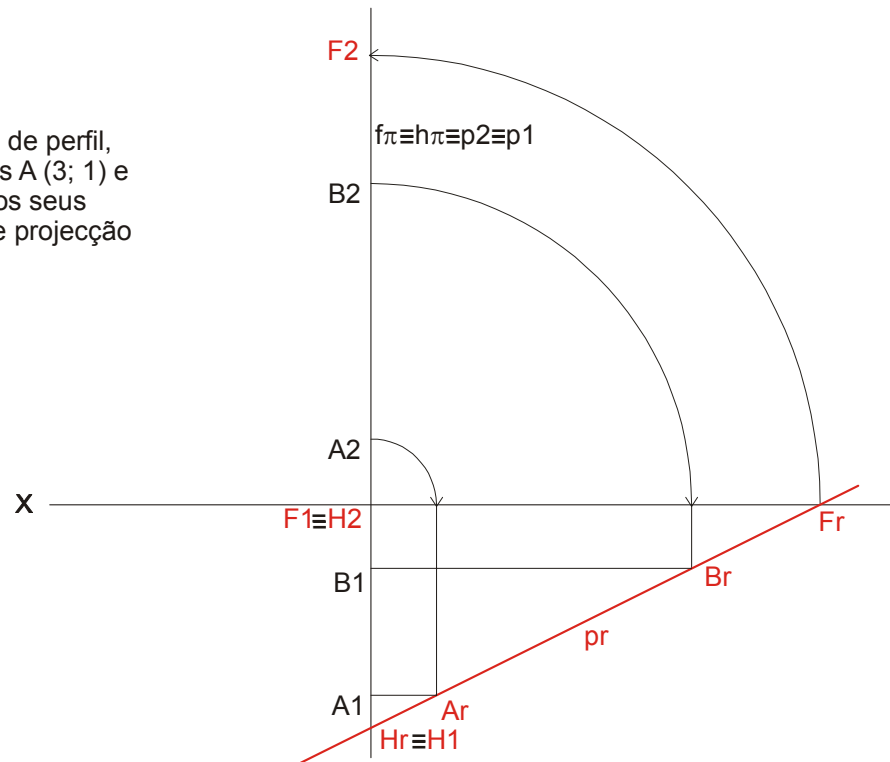
## 6.4

Considera a recta do exercício 6.2. Determina os seus traços nos planos de projecção.



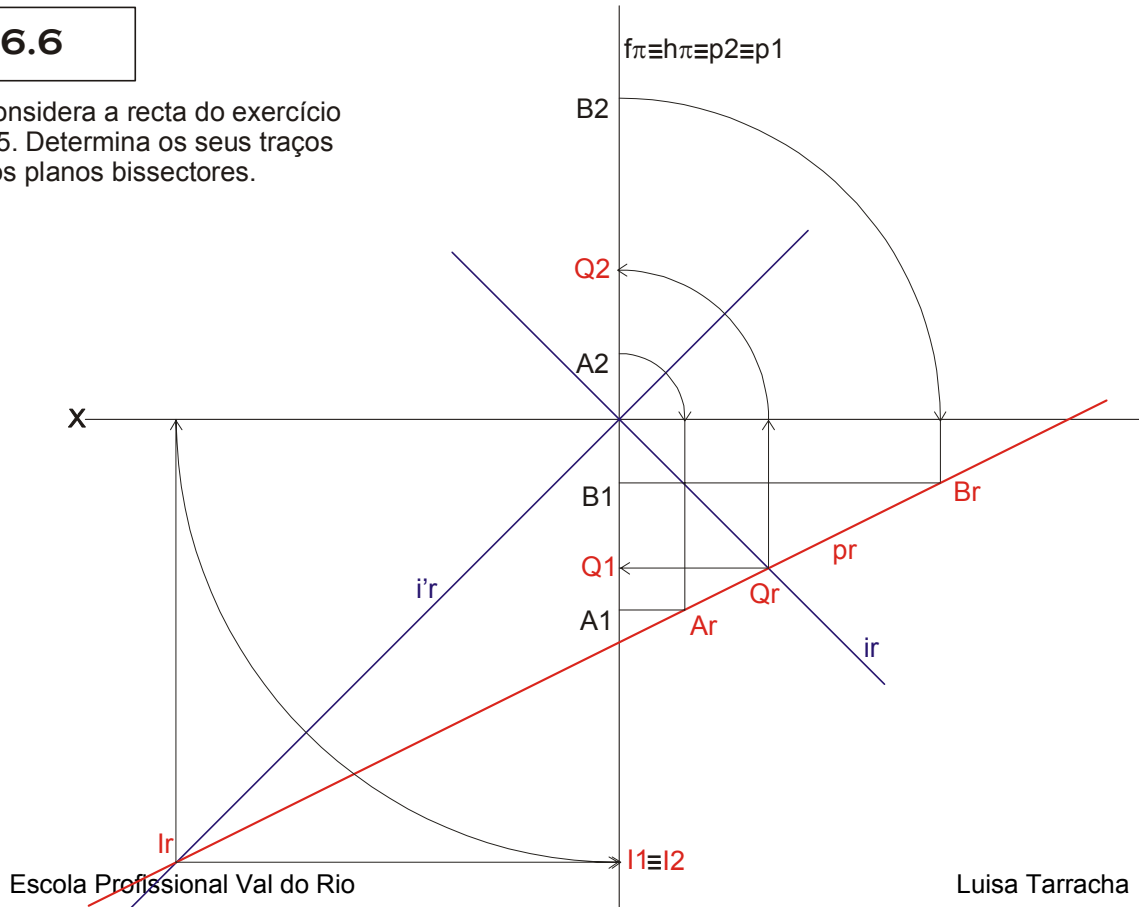
6.5

É dada uma recta  $p$ , de perfil, definida pelos pontos  $A (3; 1)$  e  $B (1; 5)$ . Determina os seus traços nos planos de projecção



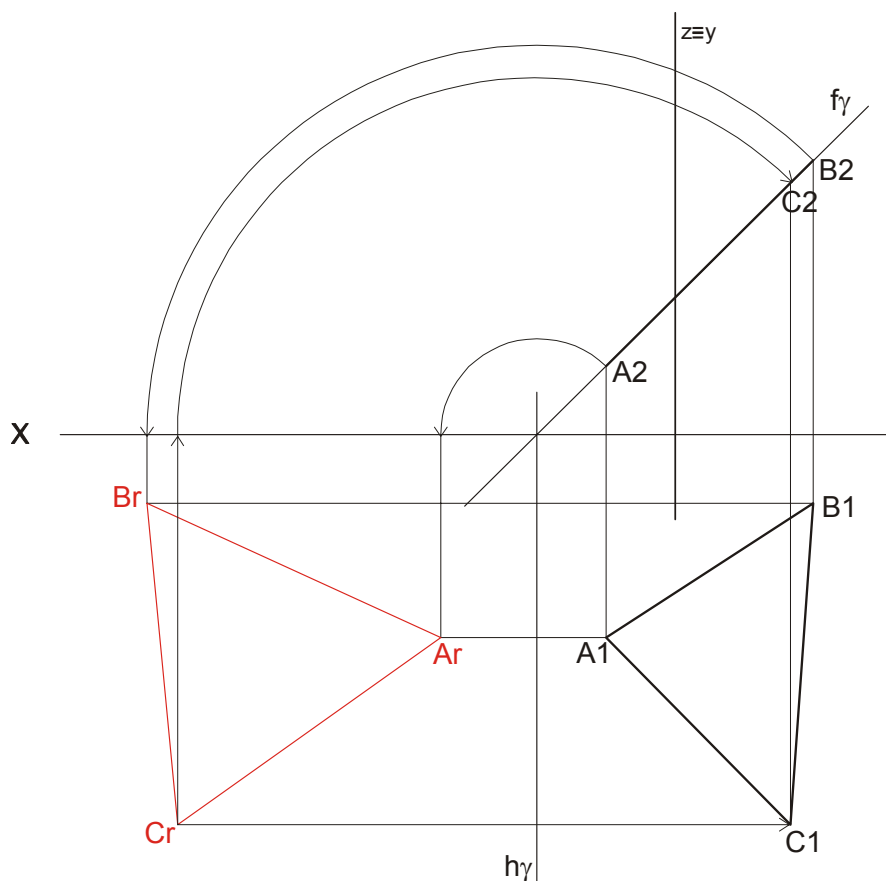
6.6

Considera a recta do exercício 6.5. Determina os seus traços nos planos bissectores.



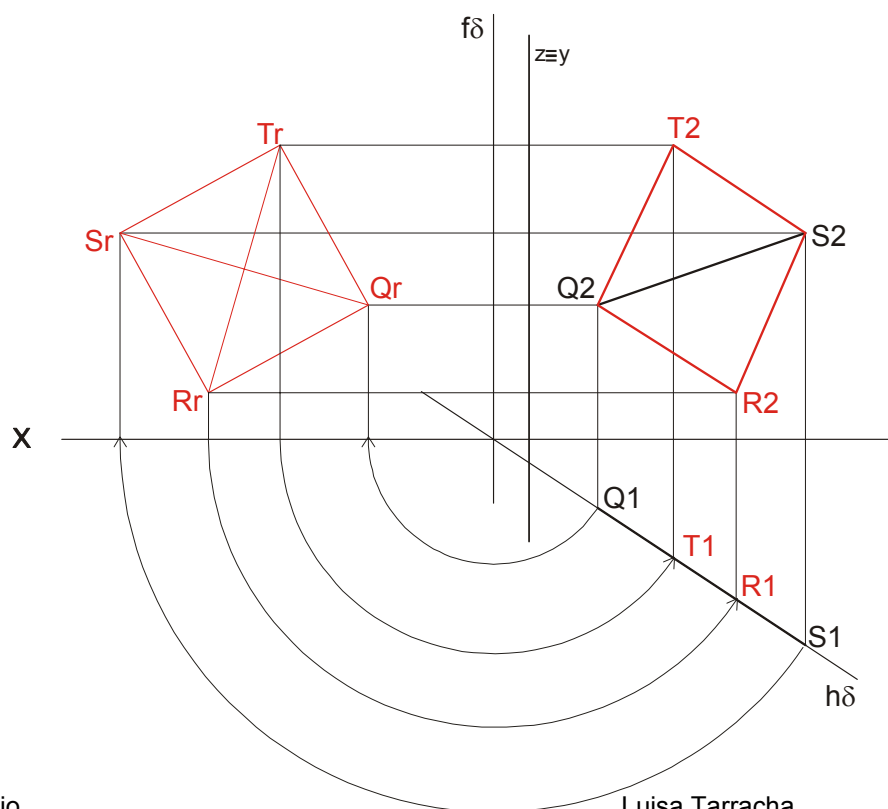
## 7.1

São dados dois pontos, A (1; 3; 1) e B (-2; 1; 4). Os pontos A e B são dois vértices de um triângulo equilátero contido num plano de topo  $\gamma$  e situado no 1º Diedro. Desenha as projecções do triângulo, recorrendo ao processo do rebatimento.



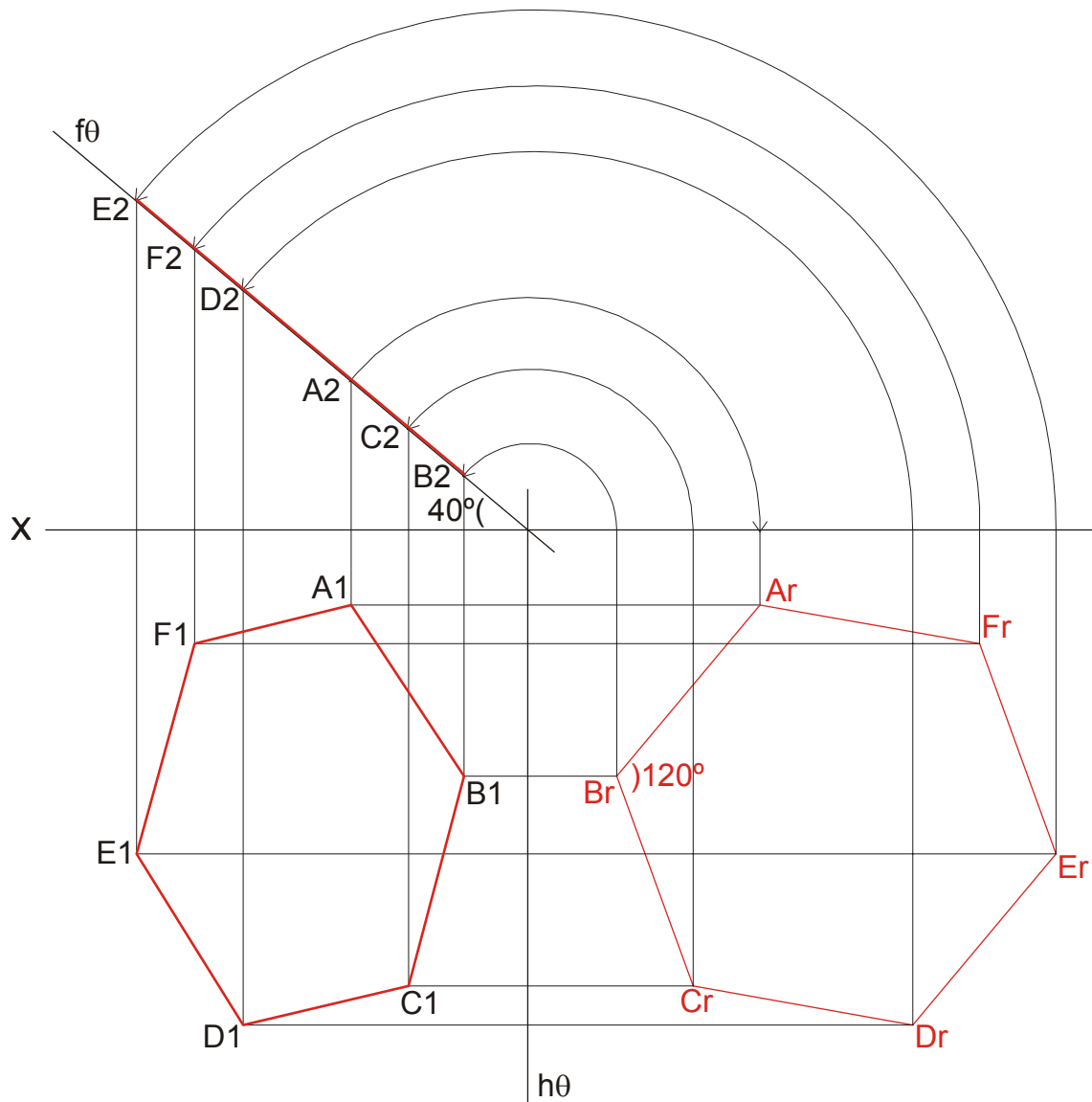
## 7.2

É dado um quadrado [QRST], situado e contido num plano vertical  $\delta$ . Sabe-se que Q (-1; 1; 2) e S (-4; 3; 3) são dois vértices opostos do quadrado. Desenha as projecções do quadrado, recorrendo ao processo do rebatimento.



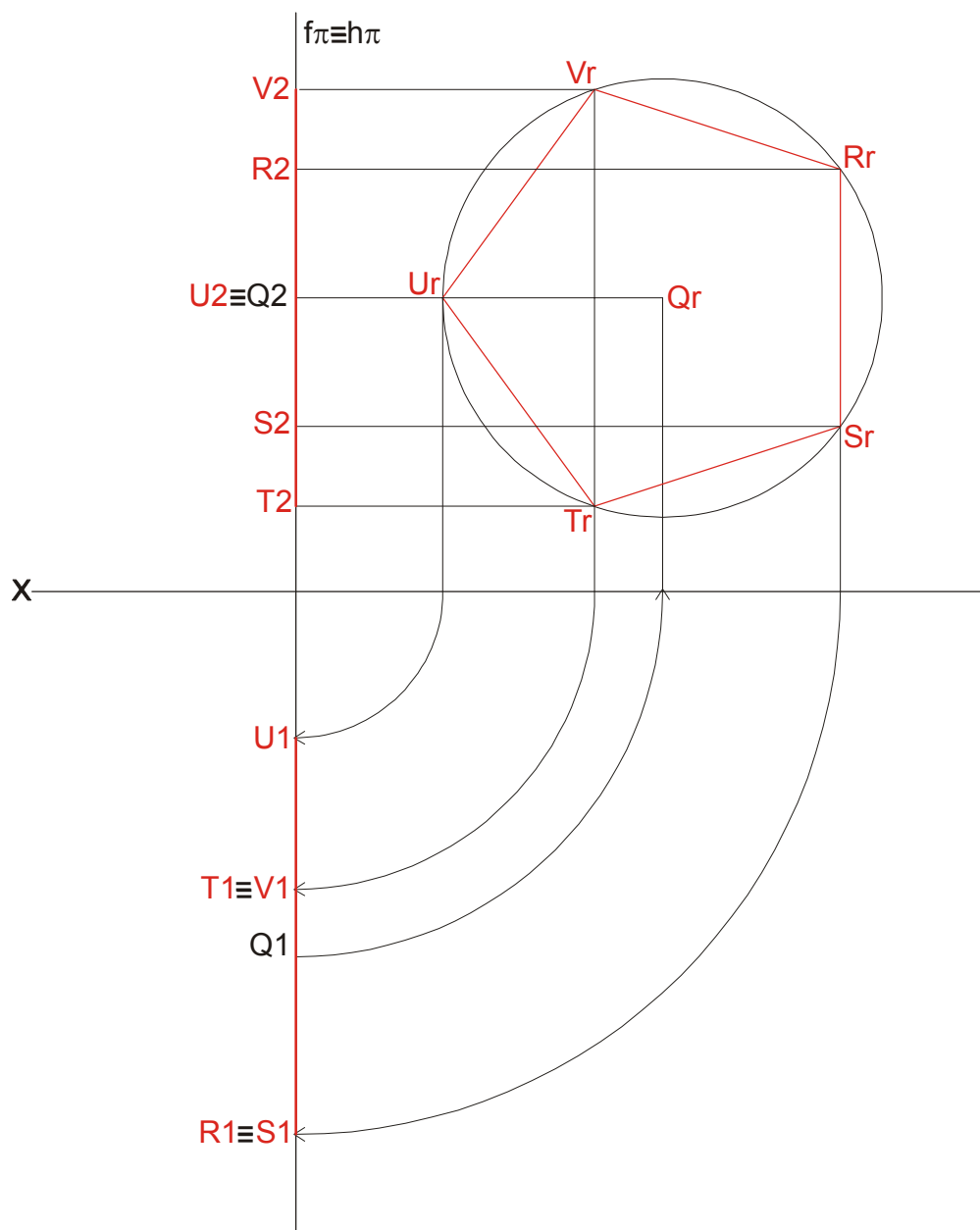
## 7.3

É dado um ponto A (1; 2). Este é um dos vértices de um hexágono regular [ABCDEF], situado no 1º Diedro e contido num plano de topo  $\theta$ , que faz um diedro de  $40^\circ$  (ae) com o Plano Horizontal de Projecção. Sobre o hexágono sabe-se, ainda, que o lado [AB] mede 3 cm e faz, com  $f\theta$ , um ângulo de  $50^\circ$ , sendo que B tem cota inferior a A. Desenha as projecções do hexágono.



## 7.4

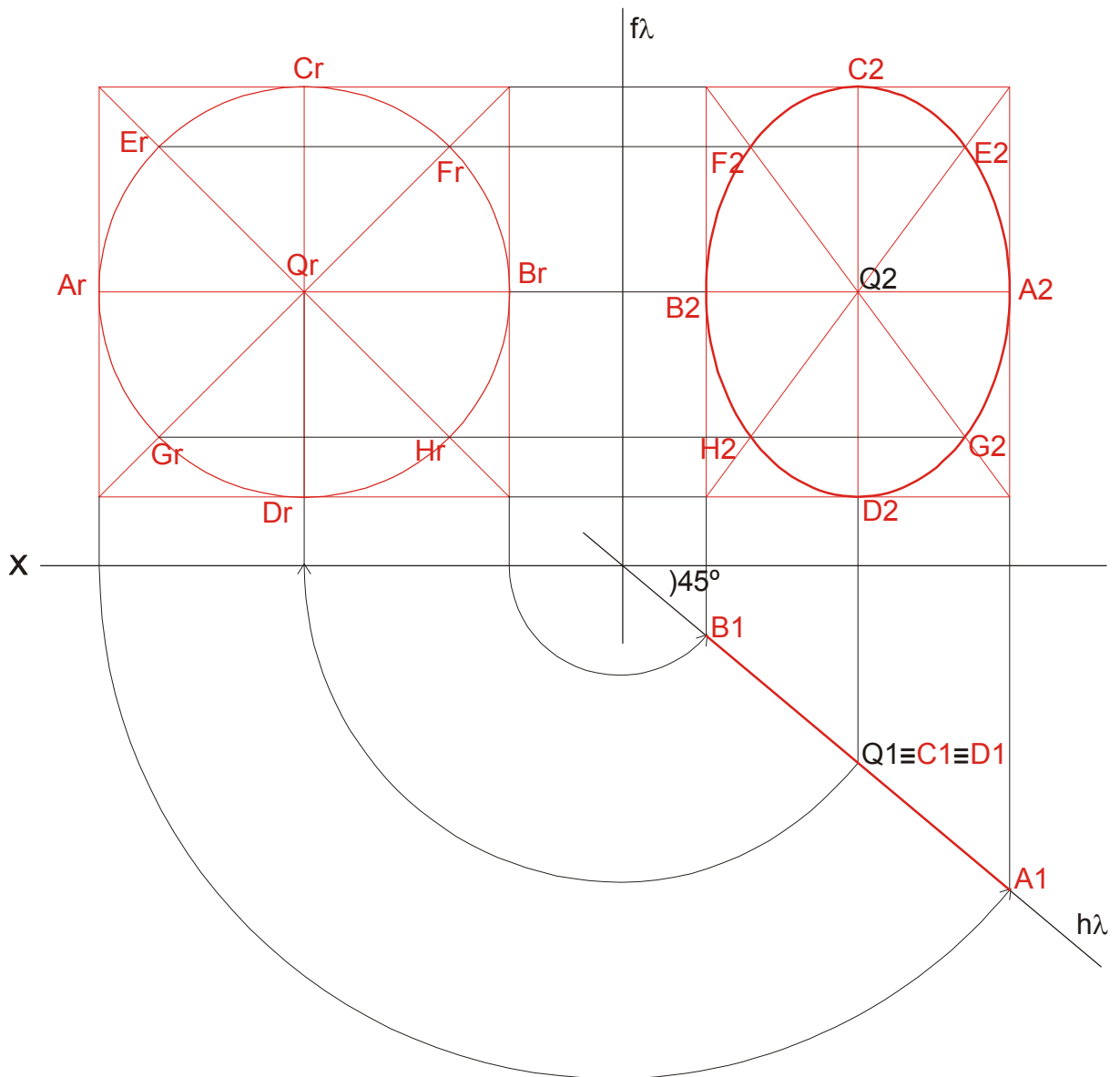
Desenha as projecções de um pentágono regular [RSTUV], situado no 1º Diedro e contido num plano de perfil  $\pi$ , sabendo que o pentágono se inscreve numa circunferência com 3 cm de raio, cujo centro é o ponto Q (5; 4). Sabe-se, ainda, que o lado de maior afastamento do pentágono é o lado [RS], que é vertical, sendo que a cota de R é superior à de S.





## 8.1

É dado um plano vertical  $\lambda$ , que faz, com o Plano Frontal de Projecção, um diedro de  $45^\circ$  (ad). Desenha as projecções de um círculo com 3 cm de raio e o centro no ponto Q (3; 4) contido no plano  $\lambda$ .



## 8.2

É dado um plano  $\theta$ , de topo, que faz, com o Plano Horizontal de Projecção, um diedro de  $60^\circ$  (ad). Desenha as projecções de um círculo com 4 cm de raio contido no plano  $\theta$  e tangente aos dois planos de projecção.

