MACS

MATÉRIA: MODELOS DISCRETOS, MODELOS CONTÍNUOS E MODELO NORMAL (PROBABILIDADES)

1. Modelos discretos

1.1 MODELO DE POISSON

O modelo de Poisson é usado com variáveis que representam o número de vezes que determinado fenómeno ocorre num dado período de tempo. Alguns exemplos do nosso quotidiano são, por exemplo, o número de chegada de aviões, por dia, a um aeroporto; a entrada \2de doentes num hospital por semana; chegada de chamadas a uma central telefónica por hora etc.

É dado pela seguinte fórmula, na qual a variável aleatória discreta é X:

$$\boxed{P\ (X = k) = e^{-\lambda} \times \frac{\lambda^k}{k!}}$$

,sendo *e* o número de Neper e λ um parâmetro (positivo). Para este modelo, o valor esperado e a variância são iguais ao parâmetro λ, isto é:

$$\boldsymbol{\mu = E(X) = \lambda} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\sigma^2 = \mathrm{Var}\ (X) = \lambda}$$

1.2 MODELO GEOMÉTRICO

O modelo geométrico utiliza-se quando queremos saber qual a probabilidade de um determinado acontecimento se realize ao fim de *k* experiências. Isto significa que para haver um sucesso ao fim de *k* experiências, já houve *k* – 1 insucessos.

Contrariamente aos outros modelos, este é o único com a propriedade “falta de memória”, isto é, qualquer resultado que venha a acontecer não está dependente de resultados anteriores, isto é, é independente.

É dado pela seguinte fórmula:

$$\boxed{P\ (X = k) = (1-p)^{k-1} \,.\, p}$$

,onde *p* é a probabilidade de ter sucesso, 1 – *p* é a probabilidade de ter insucesso, X é a variável aleatória associada à experiência e *k* o número da experiência onde ocorre o valor. O valor esperado e a variância são, respetivamente:

$$\boldsymbol{\mu = E(X) = \frac{1}{p}} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\sigma^2 = \mathrm{Var}\ (X) = \frac{1-p}{p^2}}$$

1.3 MODELO BINOMIAL

O modelo binomial é usado quando uma experiência aleatória tem as seguintes caraterísticas:

- é constituída por *n* provas (observações) que se realizam sempre nas mesmas condições;
- em cada prova apenas são possíveis **dois** resultados: o sucesso com probabilidade *p* e o insucesso com probabilidade 1 – *p*;
- o resultado de cada prova é independente dos resultado obtidos nas provas anteriores;
- a probabilidade de sucesso é constante, ou sejas, não varia de prova para prova

É dado pela seguinte fórmula:

$$\boxed{\mathrm{P}\ (\mathrm{X} = \mathrm{k}) = \frac{n!}{k!(n-k)!}\ p^k(1-p)^{n-k}}$$

,onde *p* é a probabilidade de ter sucesso, 1 – *p* é a probabilidade de ter insucesso, *n* é o número de provas, X é a variável aleatória associada à experiência e *k* o número de vezes que ocorre o sucesso. O valor esperado e a variância são, respetivamente:

$$\boldsymbol{\mu = E(X) = \mathbf{n}\,.\,\mathbf{p}} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\sigma^2 = \mathbf{Var}\ (\mathbf{X}) = \mathbf{n}\,.\,\mathbf{p}\,.\,(1-\mathbf{p})}$$

2. Modelos contínuos

2.1 MODELO UNIFORME

O modelo uniforme está associado a variáveis aleatórias contínuas que se encontram uniformemente distribuídas num intervalo qualquer [*a*, *b]*. Isto é, se, por exemplo, considerarmos dois intervalos com a mesma amplitude, têm ambos a mesma probabilidade.

Tem como função densidade de probabilidade:

$$\boxed{\mathrm{f}\ (\mathrm{X}) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}\ se\ X\ \in [a,b] \\ \\ 0\ se\ X\ \notin [a,b] \end{cases}}$$

,sendo o valor médio dado por:

$$\mathbf{E}\ (\mathbf{X}) = \frac{\boldsymbol{a+b}}{\mathbf{2}}$$

Ainda no modelo uniforme, ao valor da área compreendida entre a função densidade de probabilidade e o eixo dos *xx*, num intervalo [*c, d*] ⊆ [*a, b*], corresponde à probabilidade associada aa esse intervalo, isto é:

$$P(c\ \leq X\ \leq d) = \frac{d-c}{b-a}$$

2.2 MODELO EXPONENCIAL

O modelo exponencial, à semelhança do modelo geométrico, também tem a propriedade de "falta de memória", sendo este o único caso nos contínuos.

O objetivo deste modelo é determinar o tempo até se dar uma ocorrência. Mais uma vez, não é dependente dos resultados anteriores. Algumas situações onde se possa aplicar o modelo exponencial são, por exemplo, no cálculo do tempo entre chegadas numa fila de espera, tempo entre falhas de um dispositivo eletrónico, tempo entre cheadas de pedidos a um servidor de Internet, etc.

O modelo tem como função densidade de probabilidade:

$$\boxed{\mathrm{f}\,(\mathrm{X}) \;=\; \begin{cases} \lambda \,.\, e^{-\lambda X} \; se \; X \;\in [0, +\infty[\\ \\ 0 \; se \; X \;\notin]-\infty, 0] \end{cases}}$$

,sendo o valor médio dado por:

$$\mathbf{E}\,(\mathbf{X}) = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\lambda}}$$

O valor da área compreendida entre esta f.d.p. e o eixo dos *xx* num intervalo [*a, b*] é igual a:

$$P(c \;\le X \;\le d) = \frac{d - c}{b - a}$$

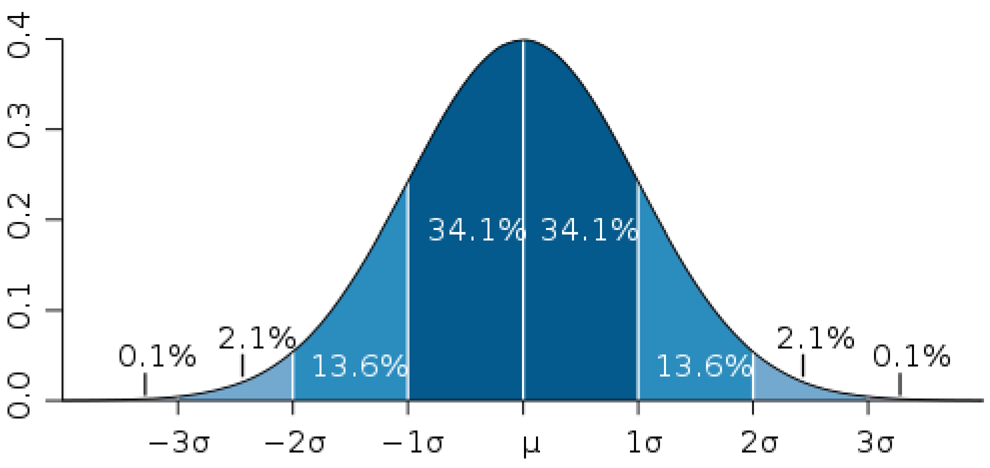
3. Modelo normal

O modelo normal é das mais importantes distribuições contínuas. Para estudarmos este modelo, precisamos de referir-nos a algumas caraterísticas para uma dada variável aleatória:

- a percentagem de valores de uma variável aleatória contidos no intervalo $]\mu - \;\sigma \,, \mu + \sigma[$ é de aproximadamente **68%**.

- a percentagem de valores de uma variável aleatória contidos no intervalo $]\mu - \;2\sigma \,, \mu + 2\sigma[$ é de aproximadamente 95%.

- a percentagem de valores de uma variável aleatória contidos no intervalo $]\mu - \;3\sigma \,, \mu + 3\sigma[$ é de aproximadamente 99,7%.



Sobre a curva que descreve este modelo, também chamada de curva de Gauss, podemos referir várias caraterísticas:

- tem a forma de sino;
- é simétrica relativamente à média, cujo valor representa o máximo da curva;
- é definida pela média e pelo desvio padrão;
- a área total sob a curva é igual a 1, ou seja, 100%.

O modelo normal associa à probabilidade de um determinado valor de uma variável pertencer a um intervalo [*a*, *b*], a área entre a curva normal e o eixo dos *xx*, entre *a* e *b*.

Para facilitar o uso do modelo, existe o chamado modelo normal *standard*, isto é, a média é 0 e o desvio padrão 1, logo N (0, 1).

Seja X uma variável aleatória contínua, tal que *X* ~ *N* (μ, σ)

Então, a variável aleatória $U = \frac{X-\mu}{\sigma}$ é tal que *U* ~ *N* (0, 1)

$$\boldsymbol{P(U \leq a) = \phi(a)}$$

U ~ N(0, 1)

X	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,50000	0,50399	0,50798	0,51197	0,51595	0,51994	0,52392	0,52790	0,53188	0,53586
0,1	0,53983	0,54380	0,54776	0,55172	0,55567	0,55962	0,56356	0,56749	0,57142	0,57535
0,2	0,57926	0,58317	0,58706	0,59095	0,59483	0,59871	0,60257	0,60642	0,61026	0,61409
0,3	0,61791	0,62172	0,62552	0,62930	0,63307	0,63683	0,64058	0,64431	0,64803	0,65173
0,4	0,65542	0,65910	0,66276	0,66640	0,67003	0,67364	0,67724	0,68082	0,68439	0,68793
0,5	0,69146	0,69497	0,69847	0,70194	0,70540	0,70884	0,71226	0,71566	0,71904	0,72240
0,6	0,72575	0,72907	0,73237	0,73565	0,73891	0,74215	0,74537	0,74857	0,75175	0,75490
0,7	0,75804	0,76115	0,76424	0,76730	0,77035	0,77337	0,77637	0,77935	0,78230	0,78524
0,8	0,78814	0,79103	0,79389	0,79673	0,79955	0,80234	0,80511	0,80785	0,81057	0,81327
0,9	0,81594	0,81859	0,82121	0,82381	0,82639	0,82894	0,83147	0,83398	0,83646	0,83891
1,0	0,84134	0,84375	0,84614	0,84849	0,85083	0,85314	0,85543	0,85769	0,85993	0,86214
1,1	0,86433	0,86650	0,86864	0,87076	0,87286	0,87493	0,87698	0,87900	0,88100	0,88298
1,2	0,88493	0,88686	0,88877	0,89065	0,89251	0,89435	0,89617	0,89796	0,89973	0,90147
1,3	0,90320	0,90490	0,90658	0,90824	0,90988	0,91149	0,91308	0,91466	0,91621	0,91774
1,4	0,91924	0,92073	0,92220	0,92364	0,92507	0,92647	0,92785	0,92922	0,93056	0,93189
1,5	0,93319	0,93448	0,93574	0,93699	0,93822	0,93943	0,94062	0,94179	0,94295	0,94408
1,6	0,94520	0,94630	0,94738	0,94845	0,94950	0,95053	0,95154	0,95254	0,95352	0,95449
1,7	0,95543	0,95637	0,95728	0,95818	0,95907	0,95994	0,96080	0,96164	0,96246	0,96327
1,8	0,96407	0,96485	0,96562	0,96638	0,96712	0,96784	0,96856	0,96926	0,96995	0,97062
1,9	0,97128	0,97193	0,97257	0,97320	0,97381	0,97441	0,97500	0,97558	0,97615	0,97670
2,0	0,97725	0,97778	0,97831	0,97882	0,97932	0,97982	0,98030	0,98077	0,98124	0,98169
2,1	0,98214	0,98257	0,98300	0,98341	0,98382	0,98422	0,98461	0,98500	0,98537	0,98574
2,2	0,98610	0,98645	0,98679	0,98713	0,98745	0,98778	0,98809	0,98840	0,98870	0,98899
2,3	0,98928	0,98956	0,98983	0,99010	0,99036	0,99061	0,99086	0,99111	0,99134	0,99158
2,4	0,99180	0,99202	0,99224	0,99245	0,99266	0,99286	0,99305	0,99324	0,99343	0,99361
2,5	0,99379	0,99396	0,99413	0,99430	0,99446	0,99461	0,99477	0,99492	0,99506	0,99520
2,6	0,99534	0,99547	0,99560	0,99573	0,99585	0,99598	0,99609	0,99621	0,99632	0,99643
2,7	0,99653	0,99664	0,99674	0,99683	0,99693	0,99702	0,99711	0,99720	0,99728	0,99736
2,8	0,99744	0,99752	0,99760	0,99767	0,99774	0,99781	0,99788	0,99795	0,99801	0,99807
2,9	0,99813	0,99819	0,99825	0,99831	0,99836	0,99841	0,99846	0,99851	0,99856	0,99861
3,0	0,99865	0,99869	0,99874	0,99878	0,99882	0,99886	0,99889	0,99893	0,99896	0,99900
3,1	0,99903	0,99906	0,99910	0,99913	0,99916	0,99918	0,99921	0,99924	0,99926	0,99929
3,2	0,99931	0,99934	0,99936	0,99938	0,99940	0,99942	0,99944	0,99946	0,99948	0,99950
3,3	0,99952	0,99953	0,99955	0,99957	0,99958	0,99960	0,99961	0,99962	0,99964	0,99965
3,4	0,99966	0,99968	0,99969	0,99970	0,99971	0,99972	0,99973	0,99974	0,99975	0,99976