Escola Secundária de D. Pedro V

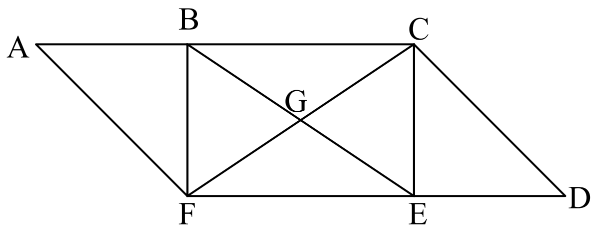
Texto de Apoio nº ……….

Ano: ………. **Turma**: ………….   **Data**: ……. /……. /…….

Assunto: Grafos Eulerianos

Circuito de Euler: é um circuito que passa uma única vez em cada aresta do grafo.
Um **Grafo** diz-se **EULERIANO** se admite um circuito de euler

Exercício 1:
Demonstre que o grafo H é euleriano.

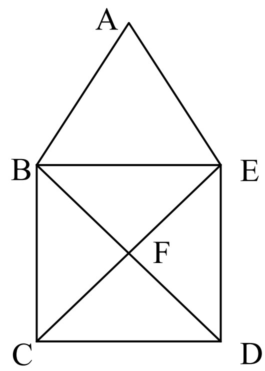


Grafo H

Caminho de Euler ou **Caminho Euleriano:** é um caminho que passa uma única vez em cada aresta do grafo.

Exercício 2: *O desenho da casa*

O grafo seguinte admite um caminho de Euler.
Justifique e Indique um caminho de Euler.



1º Teorema: Teorema de Euler

Um grafo é euleriano se e só se é conexo e todos os seus vértices são de grau par

Ou seja:

- Se um grafo não é conexo, então não admite circuitos de Euler.
- Se um grafo tem vértices de grau ímpar, então não admite circuitos de Euler.
- Se um grafo é conexo e todos os seus vértices são de grau par, então admite, pelo menos, um circuito de Euler (grafo euleriano).
- Se um grafo é euleriano, então é um grafo conexo e todos os seus vértices são de grau par.

Exercício 3:
Consulte a página 24 do seu manual escolar e desenhe um grafo das pontes de Königsberg.
Aplique o Teorema de Euler a este grafo e conclua se é ou não um grafo euleriano.

2º Teorema: Teorema do caminho de Euler

Um grafo admite um caminho euleriano se e só se é conexo e no máximo dois dos seus vértices têm grau ímpar.

Tal caminho terá início num dos vértices de grau ímpar e termina no outro vértice de grau ímpar.

Ou seja:
- Se um grafo não é conexo, então não admite um caminho euleriano
- Se um grafo possuir mais de dois vértices de grau ímpar, então não admite um caminho de Euler;
- Se um grafo é conexo e no máximo dois dos seus vértices têm grau ímpar, então o grafo admite, pelo menos, um caminho de Euler.

Exercício 4:
a) Em relação ao grafo do exercício 2, aplique o teorema do caminho de Euler.
b) Em relação ao grafo que modela o problema das pontes de Königsberg, aplique o teorema do caminho de Euler.

3º Teorema de Euler:

A soma dos graus de todos os vértices de um grafo é igual ao dobro do número de arestas desse mesmo grafo.

Exercício 5:
Justifique que num grafo sem pontos isolados, o número de vértices de grau ímpar tem de ser par.

Como encontrar Circuitos de Euler?

Já se conhece um modo fácil de decidir se um determinado grafo admite, ou não, um caminho ou um circuito de Euler. Em alguns grafos consegue-se descobrir facilmente um caminho ou um circuito de Euler através de simples tentativas.

Mas, haverá algum método, para além da tentativa e erro, para encontrar circuitos de Euler?

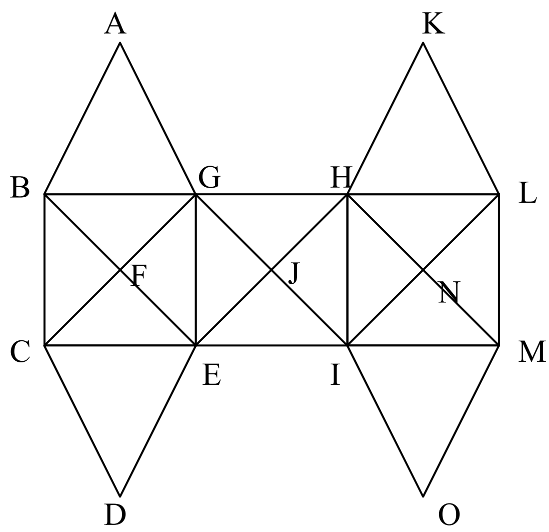
O procedimento que a seguir se descreve, designado por Algoritmo de Fleury, permite obter um circuito de Euler nos grafos que o têm.

Algoritmo de Fleury:

1. **Verifique se o grafo é conexo.**
2. **Partir de um vértice qualquer.**
3. **Percorrer uma aresta se:**
    a. **esta não for uma *ponte* para a parte não atravessada do grafo;**
    b. **não existir outra alternativa.**
4. **Assinalar as arestas conforme a ordem com que forem percorridas.**
5. **Quando não for possível continuar, terminar. Está encontrado o circuito de Euler.**

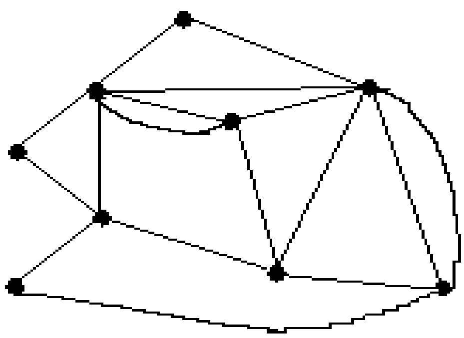
Exercício 6: *Distribuição de propaganda*

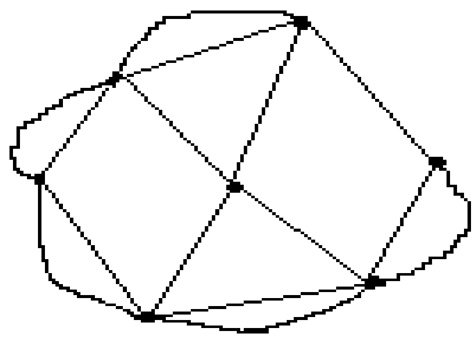
Dois distribuidores de propaganda têm que se deslocar por uma zona da cidade esquematicamente modelada pelo gráfico seguinte, em que os pontos representam cruzamentos e as arestas ruas.



1. Aplique o teorema de Euler e conclua se o grafo é, ou não, euleriano.
2. Aplique o algoritmo de Fleury ao grafo dado.

Exercício 7:
Aplique, caso seja possível, o algoritmo de Fleury aos seguintes grafos:





EULERIZAÇÃO DE GRAFOS:

É o processo de, a partir de um grafo dado, se acrescentar arestas, por duplicação das já existentes, até que se obtenha um grafo conexo só com vértices de grau par. O grafo produzido passa a ser euleriano.

Exercício 8:

O grafo representa as ruas que o Sr. José tem de percorrer para distribuir o correio. O Sr. José quer cumprir a sua tarefa da forma mais eficiente possível:

- Percorrer todas as ruas do bairro;
- Acabar a distribuição no sítio em que começou;
- Não repetir passos a não ser que seja absolutamente necessário.

1. Justifique que não existe um circuito de Euler para este grafo.
2. O Sr. José vai ter que forçosamente repetir algumas ruas. Tente encontrar uma forma de repetir um número mínimo de arestas para que o grafo se torne euleriano (eulerização).