Escola Secundária de D. Pedro V

Matemática Aplicada às Ciências Sociais

Texto de Apoio nº ……….

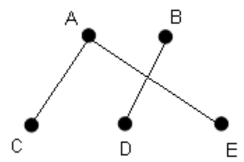
Ano: ………. Turma: …………. Data: ……. /……. /…….

Assunto: Grafos de Hamilton

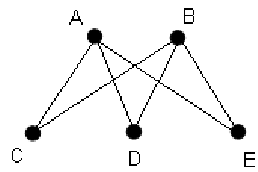
1. Chama-se **Caminho Hamiltoniano** a um caminho que percorre todos os vértices de um grafo não repetindo nenhum deles.
2. Chama-se **Circuito Hamiltoniano** a um caminho hamiltoniano que começa e acaba no mesmo vértice.
3. **Grafo hamiltoniano** ou grafo de Hamilton é um grafo que admite um circuito de Hamilton.
4. **Grafo Bipartido**

   Um grafo diz-se bipartido quando o conjunto dos seus vértices pode ser dividido em dois subconjuntos V_1 e V_2 tais que qualquer aresta do grafo une um vértice de V_1 a um vértice de V_2.

   Exemplo: V_1 = {A, B} V_2 = {C, D, E}



5. Grafo **Completo Bipartido** – cada um dos vértices de uma linha é adjacente a todos os vértices da outra linha.



   - Se o nº de vértices nas duas linhas é igual, o grafo é hamiltoniano (admite circuitos de hamilton).
   - Se a diferença entre o nº de vértices das duas linhas é 1, o grafo admite caminhos mas não circuitos de Hamilton.
   - Se a diferença entre o nº de vértices das duas linhas é superior a 1, o garfo não admite nem caminhos nem circuitos de Hamilton

6. Num **Grafo – Grelha**:

   I. se o nº de colunas e o nº de linhas é par, o grafo admite circuitos de Hamilton

   II. se o nº de colunas é par e o nº de linhas é ímpar ou se o nº de colunas é ímpar e o nº de linhas é par, o grafo admite circuitos de Hamilton

   III. se o nº de colunas e de linhas é ímpar, o grafo não admite circuitos de Hamilton.

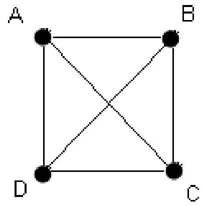
   Conclusão: um grafo-grelha é Hamiltoniano excepto quando o nº de linhas e o nº de colunas é ímpar

7. **Grafos Completos** – têm sempre circuitos de Hamilton

8. **Grafos K_n** (grafos completos e simples com n vértices)

   Um grafo K_n tem (n-1)! Circuitos Hamiltonianos

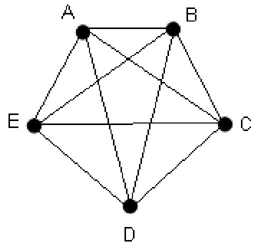
   - K_4 tem $(4-1)! = 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$ circuitos Hamiltonianos. São eles:



ABCDA	ACDBA
ABDCA	ADCBA
ACBDA	ADBCA

   - K_5 tem $(5-1)! = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ circuitos

     Hamiltonianos são eles:



1.	ABCDEA	9.	ACDBEA	17.	ADEBCA
2.	ABCEDA	10.	ACDEBA	18.	ADECBA
3.	ABDCEA	11.	ACEBDA	19.	AEBCDA
4.	ABDECA	12.	ACEDBA	20.	AEBDCA
5.	ABECDA	13.	ADBCEA	21.	AECBDA
6.	ABEDCA	14.	ADBECA	22.	AECDBA
7.	ACBDEA	15.	ADCBEA	23.	AEDBCA
8.	ACBEDA	16.	ADCEBA	24.	AEDCBA

Observação: Metade dos circuitos hamiltonianos encontrados (12) são circuitos espelhos dos restantes. Por exemplo o Circuito 24 é circuito espelho do circuito 1; o circuito 18 é circuito espelho de 2, etc.…

9. Num **grafo k_n pesado**, um circuito hamiltoniano e o correspondente circuito – espelho têm o mesmo peso. Assim, nesta situação, considera-se que os dois circuitos (um circuito e o seu circuito – espelho) são iguais.

   Então, **num grafo pesado K_n existem $\frac{(n-1)!}{2}$ circuitos hamiltonianos distintos**.

10. O **Problema do Caixeiro-viajante** propõe encontrar, num grafo completo K_n pesado, um circuito hamiltoniano com um custo mínimo.

    Para encontrar este circuito existem vários procedimentos algorítmicos possíveis:

    I. **Algoritmo da "Força – Bruta":**

       1º passo: Encontrar todos os circuitos de hamilton possíveis (a partir de um determinado vértice);

       2º passo: Adicionar os pesos das arestas utilizadas em cada um dos circuitos;

       3º passo Escolher o circuito para o qual a soma dos pesos das arestas percorridas é mínimo.

II. **Algoritmo da Cidade mais Próxima** (em grafos pesados K_n):

1º Passo: Definimos a cidade (vértice) de partida.

2º Passo: Seleccionamos a cidade mais próxima tal que:

- Se houver duas à mesma distância escolhemos aleatoriamente;
- Não podemos repetir nenhuma cidade excepto a última, depois de terem sido todas visitadas, voltando ao ponto de partida.

III. **Algoritmo do Peso das Arestas** (em grafos pesados K_n):

1º Passo: Ordenam-se as arestas pelos seus pesos;

2º Passo: Seleccionam-se sucessivamente as arestas com menor peso, tal que:

- Um vértice nunca poderá aparecer três vezes;
- Nunca se fecha um circuito havendo vértices por visitar

3º Passo: Ordena-se a solução conforme o vértice de partida escolhido.

Os algoritmos “cidade mais próxima” e “peso das arestas” não garantem encontrar o circuito hamiltoniano mínimo (o óptimo), garantindo apenas encontrar um dos melhores. Mesmo não obtendo o circuito óptimo, a aplicabilidade destes dois algoritmos é fácil, rápida e rentável. Com o algoritmo da “força bruta” encontra-se o circuito hamiltoniano mínimo, o óptimo, mas ao contrário dos outros é de aplicabilidade difícil e moroso, sendo mesmo impossível, na maioria dos casos, de aplicá-lo sem recorrer aos computadores. Assim, é mais vantajoso utilizar os algoritmos da cidade mais próxima e o do peso das arestas, apesar de não termos a certeza de encontrarmos o circuito hamiltoniano mínimo.

Alzira Rebelo Martins