

SOLUÇÕES DOS EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1

CONCEITOS GERAIS RELATIVOS A GEOMETRIA

1.

O ponto, como **elemento visual**, é uma mancha pequena, de forma mais ou menos circular e de dimensões variáveis. O ponto, como **elemento geométrico**, é a unidade base da Geometria, não possuindo qualquer dimensão física real, sendo uma forma infinitamente pequena que assinala uma determinada posição no plano ou no espaço.

2.

Em Geometria, um ponto deve representar-se como a intersecção de duas linhas rectas – o ponto pretendido será o ponto de intersecção dessas duas linhas.

3.

Uma recta tem uma única dimensão – uma recta tem apenas comprimento, pois não tem espessura.

4.

Uma **recta**, em Geometria, pode ser entendida como um conjunto infinito de pontos dispostos sucessivamente e infinitamente próximos uns dos outros ao longo de uma determinada direcção ou, segundo outros autores, como a sequência de posições que um dado ponto ocupa quando se movimenta ao longo de uma dada direcção.

5.

Direcção de uma recta é a posição que a recta ocupa no campo visual (no plano ou no espaço), em relação a um determinado referencial (ou a determinadas referências visuais).

6.

Uma «**família**» de **rectas** é o conjunto de todas as rectas (do plano ou do espaço) com uma mesma direcção.

7.

Duas rectas, no espaço, podem ser **complanares** ou **não complanares**.

8.

Duas rectas, no espaço, podem ser **complanares** ou **não complanares**.

9.

Rectas complanares são rectas que estão contidas no mesmo plano e que, por isso, ou são paralelas ou são concorrentes.

10.

Se duas rectas são complanares, sabe-se que elas são **necessariamente** ou paralelas ou concorrentes.

11.

Rectas concorrentes são rectas que têm direcções diferentes e um ponto em comum situado a distância finita – o ponto de concorrência.

12.

Rectas paralelas são rectas que são concorrentes num ponto do infinito (situado a distância infinita) e que, por isso, têm a mesma direcção.

13.

Se duas rectas têm direcções diferentes, sabe-se que as rectas **não são paralelas** – podem ser concorrentes ou enviesadas.

14.

Rectas enviesadas são rectas que não estão contidas no mesmo plano (não pertencem ao mesmo plano), ou seja, têm direcções diferentes (não são paralelas) e não têm pontos em comum (não são concorrentes), pelo que são rectas que **não são paralelas nem concorrentes**.

(Continua na página seguinte)

15.

Segmento de recta é um troço (uma porção) de uma recta, ou seja, é uma linha recta com princípio e fim (os extremos do segmento).

16.

Recta suporte de um segmento de recta é a recta da qual o segmento é uma parte (uma porção).

17.

Lugar geométrico é a figura geométrica formada por todos os pontos, todas as rectas ou todos os planos que verificam uma dada condição.

18.

Mediatriz de um segmento de recta é o lugar geométrico dos pontos **do plano** que estão equidistantes dos extremos do segmento; a figura geométrica resultante da condição atrás enunciada é uma recta perpendicular ao segmento e que divide o segmento em duas partes iguais, pois contém o ponto médio do segmento de recta.

19.

Plano mediador de um segmento de recta é o lugar geométrico dos pontos **do espaço** que estão equidistantes dos extremos do segmento; a figura geométrica resultante da condição atrás enunciada é um plano ortogonal ao segmento de recta e que divide o segmento em duas partes iguais, pois contém o ponto médio do segmento.

20.

Mediatriz de um segmento de recta e plano mediador de um segmento de recta são, ambos, lugares geométricos de pontos equidistantes dos extremos do segmento. No entanto, enquanto no caso da **mediatriz** se trata de um lugar geométrico **no plano**, já no caso do **plano mediador** se trata de um lugar geométrico **no espaço**.

21.

Um **plano** é uma superfície puramente **bidimensional**, gerada pela deslocação de uma recta, paralelamente a si mesma, ao longo de uma outra recta.

22.

Por **orientação de um plano** entende-se a posição que o plano ocupa no espaço, em relação a um determinado referencial (relativamente a um conjunto de referências visuais).

23.

Enquanto a **orientação de um plano** é a posição que o plano ocupa **no espaço** em relação a um conjunto de referências visuais, a **direcção de uma recta** é a posição que uma recta ocupa **no plano ou no espaço**, em relação, também, a um conjunto de referências visuais.

24.

Enquanto a **orientação de um plano** é a posição que o plano ocupa **no espaço** em relação a um conjunto de referências visuais, a **direcção de uma recta** é a posição que uma recta ocupa **no plano ou no espaço**, em relação, também, a um conjunto de referências visuais.

25.

Para uma recta pertencer a um plano, a recta tem de conter dois pontos desse plano (caso em que fica definida por dois pontos) ou tem de conter um ponto desse plano e ser paralela a uma outra recta desse plano (caso em que fica definida por um ponto e uma direcção).

26.

Um **ângulo** é uma superfície bidimensional (uma porção do plano) que está compreendida entre duas semi-rectas (*lados* do ângulo) com direcções diferentes e a mesma extremidade (*vértice* do ângulo).

27.

A distância de um ponto a uma recta mede-se perpendicularmente à recta, ou seja, conduzindo, pelo ponto, uma recta perpendicular à recta dada – a distância do ponto à recta é, então, o **comprimento** do **segmento** da perpendicular que tem um extremo no ponto e o outro no ponto de intersecção das duas rectas.

28.

Bissectriz de um ângulo é o lugar geométrico dos pontos **do plano** que estão equidistantes dos dois lados do ângulo – a figura geométrica resultante da condição atrás enunciada é uma recta que contém o vértice do ângulo e que divide o ângulo em dois ângulos geometricamente iguais.

29.

Diedro é a região (porção) **do espaço** compreendida entre dois semiplanos (*faces* do diedro) com a mesma recta limite ou recta de origem (esta denomina-se *aresta do diedro*).

30.

Rectilíneo de um diedro é o ângulo formado pelas duas semi-rectas que resultam da intersecção das duas faces do diedro com um plano ortogonal à aresta do diedro.

31.

A distância de um ponto a um plano mede-se perpendicularmente ao plano, ou seja, conduzindo, pelo ponto, uma recta ortogonal ao plano – a distância do ponto ao plano é, então, o **comprimento do segmento** da ortogonal que tem um extremo no ponto e o outro no ponto de intersecção da recta com o plano dado.

32.

Plano bissector de um diedro é o lugar geométrico dos pontos do espaço equidistantes das faces do diedro – a figura geométrica resultante da condição atrás enunciada é um plano que contém a aresta do diedro e que divide o diedro em dois diedros geometricamente iguais.

33.

Enquanto **ângulo** é uma entidade **bidimensional** (é uma porção **do plano** compreendida entre duas semi-rectas), já o **diedro** é uma entidade **tridimensional** (é uma porção **do espaço** compreendida entre dois semiplanos).

34.

Segundo o **Critério de paralelismo entre rectas e planos**, uma recta é paralela a um plano se não estiver contida no plano e for paralela uma recta desse plano, pelo que um plano, por sua vez, será paralelo a uma recta se o plano não contiver a recta e contiver uma recta paralela à recta dada. De outra forma, uma recta é paralela a um plano se não pertencer ao plano e pertencer a uma «família» de rectas que o plano contenha. Assim, um plano é paralelo a uma recta se o plano não contiver a recta mas contiver a «família» de rectas a que a recta pertence.

35.

Uma recta é concorrente com um plano quando não é paralela a esse plano, ou seja, quando não é paralela a nenhuma recta desse plano.

36.

A afirmação é verdadeira. De facto, um plano e uma recta intersectam-se **sempre** num ponto, que é o ponto que pertence simultaneamente à recta e ao plano. Esse ponto, no entanto, pode situar-se a distância finita (que é um **ponto próprio**, no caso de a recta ser concorrente com o plano) ou a distância infinita (que é um **ponto impróprio**, no caso da recta ser paralela ao plano).

37.

Se dois planos têm a mesma orientação, os planos são **paralelos**. Caso tenham orientações diferentes, os planos são **secantes**.

38.

Segundo o **Critério de paralelismo entre planos**, dois planos são paralelos se e só se duas rectas concorrentes de um dos planos forem paralelas a duas rectas concorrentes do outro plano, ou seja, se houver duas «famílias» de rectas que existam, simultaneamente nos dois planos. Assim, dois planos são paralelos se tiverem duas «famílias» de rectas em comum.

39.

Por **planos secantes** entendem-se planos com orientações diferentes e que se intersectam segundo uma recta – a recta de intersecção dos dois planos. Assim, dois planos secantes são planos que têm **uma única** «família» de rectas em comum e a recta de intersecção dos dois planos é **necessariamente** uma recta dessa «família» de rectas.

40.

Rectas perpendiculares são rectas **concorrentes** que fazem, entre si, quatro ângulos rectos (ângulos de 90°).

41.

Rectas perpendiculares são rectas concorrentes (complanares) cujas direcções são ortogonais. **Rectas ortogonais**, por sua vez, são rectas cujas direcções são também ortogonais mas que não são concorrentes, ou seja, são rectas não complanares cujas direcções são ortogonais.

42.

Segundo o **CrITÉrio de ortogonalidade entre rectas e planos**, uma recta é ortogonal a um plano se e só se for ortogonal a duas rectas concorrentes desse plano; da mesma forma, um plano é ortogonal a uma recta se e só se contiver duas rectas concorrentes ortogonais à recta dada.

43.

Segundo o **Teorema da ortogonalidade entre rectas e planos**, uma recta ortogonal a um plano é ortogonal ou perpendicular a **todas** as rectas desse plano, ou seja, se um plano é ortogonal a uma recta, **todas** as rectas desse plano são ortogonais ou perpendiculares à recta dada.

44.

Por **planos ortogonais** entendem-se planos secantes que fazem, entre si, diedros de rectilíneos de 90° , ou seja, planos secantes cujas orientações são ortogonais.

45.

Segundo o **CrITÉrio de ortogonalidade entre planos**, dois planos são ortogonais entre si se e só se um deles contiver uma recta ortogonal ao outro.

46.

Por **figura plana** entende-se toda a região do plano que está limitada por uma linha fechada, linha essa que pode ser quebrada, curva ou mista.

47.

Uma **circunferência** é o lugar geométrico dos pontos do plano que estão equidistantes (à mesma distância – o raio) de um dado ponto, que é o centro da circunferência.

48.

A **circunferência** é a linha plana (curva) que delimita o **círculo**. O **círculo**, por sua vez, é a figura plana limitada por uma linha que é a **circunferência**.

49.

Corda é todo o segmento de recta cujos extremos são dois pontos da circunferência. **Diâmetro** é toda a corda que contém o centro da circunferência, ou seja, é todo o segmento de recta que contém o centro da circunferência e cujos extremos são dois pontos da própria circunferência.

50.

Por **raio de uma circunferência** pode entender-se todo o **segmento de recta** que tem um extremo no centro da circunferência e o outro num ponto qualquer da circunferência. Por outro lado, por **raio da circunferência** pode entender-se, também, a **distância** de qualquer ponto da circunferência ao centro da circunferência, ou seja, o **comprimento** de todo e qualquer segmento de recta a que se aplique a definição de **raio da circunferência**.

51.

Polígono é uma figura plana limitada por uma linha quebrada (uma linha poligonal).

52.

Polígono regular é todo o polígono com todos os lados iguais e todos os ângulos iguais que é, **necessariamente**, inscritível numa circunferência.

53.

Um **rectângulo** é um **polígono irregular**, pois, apesar de ter todos os seus ângulos iguais (são quatro ângulos rectos) e de ser inscritível numa circunferência, **não tem** todos os seus lados iguais.

54.

Um polígono estar inscrito numa circunferência significa que todos os seus vértices são pontos de uma mesma circunferência. Nessa situação, a circunferência, por sua vez, está **circunscrita** ao polígono.

55.

Lado de um polígono é todo o segmento que tem, por extremos, dois vértices consecutivos do polígono. **Diagonal** de um polígono é todo o segmento de recta que tem, por extremos, dois vértices não consecutivos do polígono.

56.

Geratriz é toda a linha cujo movimento gera uma superfície. **Directriz** é a linha (regra, lei) que define (rege) o movimento da geratriz.

57.

Superfície regradada é toda a superfície cuja geratriz é uma linha recta. **Superfície curva** é toda a superfície cuja geratriz é uma linha curva.

58.

Superfície planificável é toda a superfície regradada em que quaisquer duas geratrizes são complanares. **Superfície empenada** é toda a superfície em que tal não se verifica (ou em que existem pelo menos duas geratrizes que não são complanares).

59.

Em ambas as superfícies (cônica e piramidal), as geratrizes são rectas concorrentes num ponto exterior ao plano da directriz. Numa **superfície cônica**, a directriz é uma **linha curva** e numa **superfície piramidal** a directriz é uma **linha quebrada**.

60.

Em ambas as superfícies (piramidal e prismática), a directriz é uma linha quebrada. Numa **superfície piramidal**, as geratrizes são **concorrentes** num ponto situado a distância finita (o vértice da superfície), enquanto que numa **superfície prismática**, as geratrizes são **paralelas** entre si (o vértice da superfície está no infinito).

61.

Por **folha de uma superfície** entende-se uma porção ilimitada da superfície que tem extremo no vértice da superfície. As superfícies cónicas e piramidais, por exemplo, admitem a existência de **duas folhas**, simétricas em relação ao vértice da superfície. Já as superfícies cilíndricas e prismáticas, em que o vértice da superfície se situa no infinito, admitem a existência de **uma única folha**.

62.

Uma superfície de revolução é gerada pelo **movimento rotativo** de uma linha (geratriz) em torno de **um eixo**, de tal forma que qualquer ponto da geratriz, no seu movimento, descreve uma circunferência contida num plano ortogonal ao eixo e cujo centro é o ponto de intersecção desse plano com o eixo.

63.

Uma **superfície cônica oblíqua** não será, nunca, uma superfície de revolução, pois a directriz, mesmo que seja uma circunferência (pode não o ser), está contida num plano **oblíquo** ao eixo da superfície que, dessa forma, não pode ser um eixo de rotação. Assim, caso se considerasse a rotação de uma geratriz em torno do eixo da superfície numa **superfície cônica oblíqua**, o movimento seria elíptico ou ovular e não circular, pois os pontos da geratriz descreveriam elipses ou óvulos em torno do eixo e não circunferências.

64.

Uma **superfície** é uma figura geométrica infinita (sem limites) e sem espessura, resultante do movimento de uma linha (geratriz) em torno de um eixo ou ao longo de uma directriz. Já um **sólido** é o espaço limitado por superfícies (qualquer tipo de superfícies, nas quais se podem incluir planos), resultando num corpo, com massa, volume e peso. A título de exemplo referem-se a **superfície esférica** e a **esfera**, em que a primeira é uma **superfície** e a segunda é um **sólido** limitado pela primeira.

65.

Uma **pirâmide** é o espaço limitado lateralmente por um troço de uma superfície piramidal e por um plano que corta todas as geratrizes da superfície (o plano que contém a base da pirâmide).

66.

Um **cilindro** é o espaço limitado lateralmente por um troço de uma superfície cilíndrica e por dois planos (os planos que contém as bases do sólido).

67.

Por **contorno aparente de um sólido** entende-se a linha fechada (curva, quebrada ou mista) que existe na superfície do sólido e que separa **rigorosamente** a parte visível da superfície que delimita o sólido da parte da mesma que é invisível (para um determinado observador).

68.

Essa aresta não pode nunca integrar o contorno aparente do sólido, pois a aresta referida separa **duas faces visíveis** do sólido. De facto, uma vez que o contorno aparente separa, **sempre**, partes visíveis de partes invisíveis da superfície do sólido, só as arestas do dado que separam uma face visível de uma face invisível é que podem integrar o contorno aparente do dado.

69.

Um **poliedro** é um sólido geométrico limitado apenas por polígonos, ou seja, é um sólido limitado apenas por superfícies planas (as **faces** do poliedro) que se intersectam entre si segundo linhas rectas (as **arestas** do poliedro).

70.

Uma **aresta** é um segmento de recta que é o lado comum aos polígonos de duas faces contíguas do poliedro, ou seja, é o segmento de recta segundo o qual se intersectam duas faces contíguas do poliedro.

71.

Um **poliedro regular** é todo o poliedro cujas faces são polígonos regulares todos iguais e que é inscritível numa superfície esférica.

72.

Conhecem-se 5 (cinco) poliedros regulares – o tetraedro, o hexaedro (o cubo), o octaedro, o dodecaedro e o icosaedro.

73.

Uma pirâmide quadrangular é necessariamente um poliedro irregular, pois as suas faces não são todas polígonos regulares iguais – a base é um **quadrado** e as faces laterais são **triângulos** (que podem ou não ser equiláteros). Assim, a base e as faces laterais, mesmo que sejam polígonos regulares, **não são iguais**, pelo que uma pirâmide quadrangular (regular ou não) nunca poderá ser um poliedro regular.

74.

A afirmação é **falsa**. A altura de um sólido é a distância entre os planos das bases (no caso dos prismas) ou a distância do vértice ao plano da base (no caso das pirâmides), que é, **necessariamente**, medida perpendicularmente ao plano ou planos das bases. Assim, a altura de um sólido só é o comprimento do seu eixo nas situações particulares em que se trata de prismas ou pirâmides rectas, cujos eixos são ortogonais ao plano ou planos das bases.

75.

Aresta lateral é todo o segmento de recta segundo o qual se intersectam **duas faces laterais** contíguas do sólido (é um **lado** comum aos dois polígonos que são duas faces laterais contíguas do sólido). **Aresta da base** é todo o segmento de recta segundo o qual se intersectam **uma face lateral e uma base** do sólido (é um **lado** comum aos dois polígonos que são uma face lateral e uma base do sólido).

76.

Pirâmide recta é toda a pirâmide cujo eixo é ortogonal ao plano da base, e pode ser regular ou não. Uma **pirâmide regular** é uma **pirâmide recta** cuja base é um polígono regular, pelo que as suas faces laterais são triângulos isósceles, todos iguais entre si. Numa **pirâmide recta**, a base pode não ser um polígono regular, pelo que as faces laterais, embora sendo triângulos isósceles, não são todas iguais.

77.

Prisma recto é todo o prisma cujo eixo é ortogonal aos planos das bases, e pode ser regular ou não. Um **prisma regular** é um **prisma recto** cujas bases são polígonos regulares, pelo que as suas faces laterais são rectângulos todos iguais entre si. Num **prisma recto**, as bases podem não ser polígonos regulares, pelo que as faces laterais, embora sendo rectângulos, não são todas iguais.

78.

Um **cone** é o espaço (um corpo com massa, volume e peso) limitado por **uma folha** de uma **superfície cónica** e por um plano que corta todas as geratrizes e não contém o vértice. Uma **superfície cónica** é uma figura geométrica sem massa, espessura ou peso, gerada pelo movimento de uma recta (geratriz) com um ponto fixo (o vértice) em torno de uma linha curva (a directriz), apresentando **duas folhas** simétricas em relação ao vértice da superfície.

79.

Um **cilindro recto** (ou de revolução) é um sólido limitado lateralmente por um troço de uma **superfície cilíndrica de revolução** e por dois planos, ortogonais ao eixo do sólido (eixo de rotação), que são os planos que contém as duas bases do sólido (que são círculos). Os planos das bases são necessariamente ortogonais às geratrizes do sólido (que são paralelas ao eixo da superfície). Um **cilindro oblíquo** não é um sólido de revolução e o seu eixo é oblíquo aos planos das bases – é um sólido limitado lateralmente por um troço de uma superfície cilíndrica e por dois planos oblíquos em relação ao eixo da superfície (e às respectivas geratrizes).

80.

Uma **esfera** é o espaço (um corpo, com massa, volume e peso) limitado por uma superfície esférica.

81.

O **círculo máximo de uma esfera** é o corte (secção) produzido na esfera por qualquer plano que contenha o centro da esfera.

82.

Por **secção plana de um poliedro** entende-se o polígono limitado pelas intersecções de um plano (plano secante) com as faces de um poliedro.

83.

Por **sólido truncado** (ou **sólido resultante da secção**) entende-se **uma determinada parte do sólido** compreendida entre o plano secante e uma base ou o vértice. Por **figura da secção** entende-se, apenas, **o polígono** resultante da secção produzida no sólido pelo plano secante.

84.

Por **equipamento** afecto ao desenho técnico entende-se todo o material necessário à representação de formas, objectos e espaços através dos códigos de representação do desenho rigoroso e do desenho técnico.

85.

Alguns exemplos de **suportes**: papel vegetal (transparente), papel de máquina, papel cavalinho, etc.

86.

Alguns exemplos de **riscadores**: lápis, lapiseiras, esferográficas, tira-linhas, canetas a tinta da china, etc.

87.

Alguns exemplos de **materiais de precisão**: compasso, réguas, esquadros, escantilhões, etc.

88.

Por **normalização** entende-se a sistematização de um conjunto de normas, regionais ou universais, que pretendem estabelecer regras diversas, de apresentação, de produção, de trabalho, etc., nos mais diversos campos, desde o **desenho técnico** à mecânica, à agricultura (na Comunidade Europeia), à indústria automóvel, têxtil, etc.

89.

A importância da criação de **sistemas de normalização** reside, precisamente, no facto de se estabelecerem regras para as mais diversas áreas profissionais (em termos regionais ou universais), de forma a que, numa determinada área profissional, todos os profissionais possuam uma linguagem comum.

90.

A **Organização Internacional de Normalização** é o organismo internacional que tem, por função, fiscalizar e uniformizar as normas existentes nos diversos países e, dessa forma, estabelecer normas universais e comuns a todos os países, ou seja, reconhecidas internacionalmente.

91.

As **normas ISO** são, precisamente, as normas estabelecidas pela Organização Internacional de Normalização, sendo que aquela sigla provém das iniciais do nome do organismo em inglês – International Standardization Organization.

92.

As **rectas** identificam-se com **letras minúsculas** do alfabeto latino, enquanto que os **pontos** se identificam com **letras maiúsculas** do mesmo alfabeto.

93.

Os **planos** identificam-se com letras minúsculas do **alfabeto grego**.

94.

A palavra **traçado**, em Geometria Descritiva, refere-se genericamente às diferentes formas de utilização da linha, como elemento fundamental de expressão em Geometria Descritiva – essas formas de utilização podem ter a ver com **convenções ao nível do uso da linha** (traço interrompido, tracejado, etc.) ou com a **expressividade (intensidade) da linha** (leve, médio, forte).

95.

[AB] refere-se ao **segmento de recta** que tem extremos nos pontos **A** e **B**, enquanto que \overline{AB} se refere à **distância** entre os pontos **A** e **B**. Assim, \overline{AB} refere-se precisamente ao **comprimento** do segmento de recta [AB].

2

INTRODUÇÃO

96.

A finalidade da Geometria Descritiva é a representação bidimensional (na superfície do plano) dos objectos e das formas que existem no espaço e, por isso, têm uma existência tridimensional.

97.

Em primeiro lugar foi no Renascimento, com **Brunelleschi**, que se formularam as primeiras leis da perspectiva (representação bidimensional rigorosa de objectos tridimensionais). Ainda no século XV, **Leon Battista Alberti** teorizou as descobertas de Brunelleschi que, mais tarde, **Leonardo Da Vinci** desenvolveu. Por fim, foi já no final do século XVIII que **Gaspard Monge** formulou as regras da Geometria Descritiva, enquanto ciência, generalizando os métodos introduzidos por Brunelleschi, Alberti e Leonardo.

98.

A Geometria Descritiva nasceu em França, numa época de grandes mutações tanto sociais como científicas, cujo principal foco foi, precisamente, a França do século XVIII. Assim, tanto as revoluções de ordem social e política (a Revolução Francesa, com a queda do Antigo Regime), como as revoluções de ordem científica e tecnológica (a Revolução Industrial e todas as descobertas científicas da época), criaram um ambiente favorável ao desenvolvimento de um espírito científico, no qual se insere a invenção da Geometria Descritiva.

99.

Um **referencial** é um conjunto de elementos (rectas ou planos) relacionados entre si, que organizam/estruturam uma determinada realidade bidimensional (o plano) ou tridimensional (o espaço) e ao qual são referenciados os objectos existentes nessa realidade.

100.

Um referencial no plano tem **duas dimensões**, porque o plano é uma superfície bidimensional.

101.

Um referencial no espaço tem **três dimensões**, porque o espaço é tridimensional.

102.

O eixo **X** é a recta de intersecção do plano frontal (φ_0) com o plano horizontal (v_0). O eixo **Y** é a recta de intersecção do plano horizontal (v_0) com o plano de perfil (π_0). O eixo **Z** é a recta de intersecção do plano frontal (φ_0) com o plano de perfil (π_0).

103.

SPHA representa o Semi-Plano Horizontal Anterior. **SPHP** representa o Semi-Plano Horizontal Posterior.

104.

SPFS representa o Semi-Plano Frontal Superior. **SPFI** representa o Semi-Plano Frontal Inferior.

105.

O referencial, em Geometria Descritiva, divide o espaço em quatro partes, que se chamam *Diedros*.

106.

As coordenadas são *abscissa*, *afastamento* e *cota*, por esta ordem. **Abscissa** é a distância do ponto ao plano de perfil (π_0). **Afastamento** é a distância do ponto ao plano frontal (φ_0). **Cota** é a distância do ponto ao plano horizontal (v_0).

107.

Sendo **A** (2; 5; 1), sabe-se que o ponto **A** tem 2 cm de abscissa, 5 cm de afastamento e 1 cm de cota.

108.

Se o ponto **A** tem cota positiva, sabe-se que o ponto se situa para cima do plano horizontal (v_0) – pode situar-se no 1º *Diedro*, no 2º *Diedro* ou no **SPFS**.

109.

Se o ponto **B** tem cota negativa, sabe-se que o ponto se situa para baixo do plano horizontal (v_0) – pode situar-se no 3º *Diedro*, no 4º *Diedro* ou no **SPFI**.

110.

O ponto **C** tem afastamento nulo, pelo que a sua distância ao plano frontal (φ_0) é nula – situa-se no próprio plano frontal (φ_0).
O ponto **D** tem cota nula, pelo que a sua distância ao plano horizontal (v_0) é nula – situa-se no próprio plano horizontal (v_0).

111.

Um ponto com afastamento positivo situa-se para a frente do plano frontal (φ_0) – pode situar-se no 1^a Diedro, no 4^a Diedro ou no **SPHA**. Um ponto com afastamento negativo situa-se para trás do plano frontal (φ_0) – pode situar-se no 2^a Diedro, no 3^a Diedro ou no **SPHP**.

112.

Um ponto com cota positiva situa-se para cima do plano horizontal (v_0) – pode situar-se no 1^a Diedro, no 2^a Diedro ou no **SPFS**. Um ponto com afastamento positivo situa-se para a frente do plano frontal (φ_0) – pode situar-se no 1^a Diedro, no 4^a Diedro ou no **SPHA**. Um ponto com cota e afastamento positivos situa-se, assim, no 1^a Diedro.

113.

Um ponto com abcissa positiva situa-se para a esquerda do plano de perfil (π_0), podendo situar-se em qualquer um dos quatro Diedros ou em qualquer um dos outros dois planos – no plano frontal (φ_0) ou no plano horizontal (v_0).

114.

As coordenadas que determinam os diferentes Diedros em que um ponto se pode situar são o **afastamento** e a **cota**, pois são estas as coordenadas que são referenciadas aos planos que dividem o espaço em Diedros – o plano frontal (φ_0) e o plano horizontal (v_0). De facto, e como se pôde observar na resposta à questão anterior, um ponto com uma determinada abcissa pode situar-se em qualquer um dos quatro Diedros ou, ainda, no plano frontal (φ_0) ou no plano horizontal (v_0).

115.

Um ponto com afastamento positivo situa-se para a frente do plano frontal (φ_0) – pode situar-se no 1^a Diedro, no 4^a Diedro ou no **SPHA**. Um ponto com afastamento negativo situa-se para trás do plano frontal (φ_0) – pode situar-se no 2^a Diedro, no 3^a Diedro ou no **SPHP**.

116.

A → 1^a Diedro;	D → 2^a Diedro;	G → 3^a Diedro;
B → 4^a Diedro;	E → SPHP ;	H → SPFS ;
C → SPHA ;	F → eixo X ;	I → SPFI ;
		J → SPHP .

117.

O plano $\beta_{1/3}$ é o plano bissector dos Diedros Ímpares (1^a e 3^a Diedros) – é o lugar geométrico dos pontos do espaço que estão equidistantes do **SPHA** e do **SPFS** (no 1^a Diedro) ou que estão equidistantes do **SPHP** e do **SPFI** (no 3^a Diedro). O plano $\beta_{2/4}$ é o plano bissector dos Diedros Pares (2^a e 4^a Diedros) – é o lugar geométrico dos pontos do espaço que estão equidistantes do **SPHP** e do **SPFS** (no 2^a Diedro) ou que estão equidistantes do **SPHA** e do **SPFI** (no 4^a Diedro).

118.

O 1^a e 2^a Octantes situam-se no 1^a Diedro – o 1^a Octante é o espaço compreendido entre o **SPHA** e o $\beta_{1/3}$ e o 2^a Octante é o espaço compreendido entre o $\beta_{1/3}$ e o **SPFS**. O 5^a e 6^a Octantes situam-se no 3^a Diedro – o 5^a Octante é o espaço compreendido entre o **SPHP** e o $\beta_{1/3}$ e o 6^a Octante é o espaço compreendido entre o $\beta_{1/3}$ e o **SPFI**.

119.

O 3^a e 4^a Octantes situam-se no 2^a Diedro – o 3^a Octante é o espaço compreendido entre o **SPFS** e o $\beta_{2/4}$ e o 4^a Octante é o espaço compreendido entre o $\beta_{2/4}$ e o **SPHP**. O 7^a e 8^a Octantes situam-se no 4^a Diedro – o 7^a Octante é o espaço compreendido entre o **SPFI** e o $\beta_{2/4}$ e o 8^a Octante é o espaço compreendido entre o $\beta_{2/4}$ e o **SPHA**.

120.

A → 2^a D, 3^a Oct.;	B → SPHP ;	C → 1^a D, $\beta_{1/3}$;	D → SPFS ;	E → 2^a D, $\beta_{2/4}$;	F → 1^a D, 2^a Oct.;
G → 2^a D, 4^a Oct.;	H → 1^a D, 1^a Oct.;	I → 3^a D, $\beta_{1/3}$;	J → SPHA ;	L → 3^a D, 5^a Oct.;	M → SPFI ;
N → 3^a D, 6^a Oct.;	O → 4^a D, 8^a Oct.;	P → 4^a D, 7^a Oct.;	Q → 4^a D, $\beta_{2/4}$.		

121.

A → 1^a D, 2^a Oct.;	B → 2^a D, $\beta_{2/4}$;	C → 2^a D, 3^a Oct.;	D → 1^a D, $\beta_{1/3}$;	E → 1^a D, 1^a Oct.;	F → 3^a D, 5^a Oct.;
G → 3^a D, $\beta_{1/3}$;	H → 4^a D, 8^a Oct.;	I → 2^a D, 4^a Oct.;	J → 4^a D, 7^a Oct.;	L → 3^a D, 6^a Oct.;	M → 4^a D, $\beta_{2/4}$

(Continua na página seguinte)

3

PROJEÇÕES

122.

Os elementos constituintes de um **Sistema de Projecção** são **plano de projecção**, **centro de projecção** e **um feixe de rectas (ou linhas) projectantes**. O **plano de projecção** é o plano no qual se processam as projecções dos objectos (no qual se projectam os objectos). O **centro de projecção** é um ponto exterior ao *plano de projecção* e é o ponto de concorrência das *rectas projectantes*. As **rectas (ou linhas) projectantes** são as rectas que projectam os diversos pontos do objecto no *plano de projecção*.

123.

A **projecção de um ponto num plano** é a representação desse ponto no plano (plano de projecção) com o recurso a um qualquer *sistema de projecção*. A **projecção de um ponto num plano** é, assim, o ponto de intersecção do plano de projecção com a recta projectante que passa pelo ponto (a recta projectante que contém o ponto).

124.

Para determinar a **projecção de um ponto** (num plano) conduz-se, pelo ponto, uma recta projectante – o ponto de intersecção da recta projectante com o plano de projecção é a projecção do ponto.

125.

A **projecção de uma figura** num plano (de projecção) é a figura formada, no plano de projecção, pelos pontos em que as rectas projectantes que passam pelos diversos pontos da figura intersectam o plano de projecção.

126.

No **Sistema de Projecção Cónica ou Central**, o centro de projecção está a uma distância finita do plano de projecção (é um **ponto próprio**), pelo que as rectas projectantes são **concorrentes** entre si. No **Sistema de Projecção Paralela ou Cilíndrica**, o centro de projecção está a uma distância infinita do plano de projecção (é um **ponto impróprio**), pelo que as rectas projectantes são **paralelas** entre si (são concorrentes num ponto situado a distância infinita).

127.

O Sistema de Projecção Paralela ou Cilíndrica subdivide-se no **Sistema de Projecção Ortogonal** e no **Sistema de Projecção Oblíqua (ou Clinogonal)**. No primeiro (Projecção Ortogonal), as rectas projectantes são **ortogonais** ao plano de projecção, enquanto que, no segundo (Projecção Clinogonal ou Oblíqua), as rectas projectantes são **oblíquas** ao plano de projecção.

128.

- a) Projecção Cónica ou Central (o centro de projecção situa-se a uma distância finita). Centro de projecção – lâmpada do projector; rectas projectantes – raios luminosos; plano de projecção – ecrã.
- b) Projecção Cónica ou Central (o centro de projecção situa-se a uma distância infinita). Centro de Projecção – lâmpada da lanterna; rectas projectantes – raios luminosos; plano de projecção – parede.
- c) Projecção Paralela ou Cilíndrica (o centro de projecção situa-se a uma distância que se pode considerar infinita), Subsistema de Projecção Oblíqua (ou Clinogonal). Centro de projecção – Sol; rectas projectantes – raios luminosos; plano de projecção – chão da rua. Trata-se da Projecção Clinogonal (ou Oblíqua), pois as rectas projectantes (raios luminosos), ao entardecer, são **oblíquas** ao plano de projecção (o chão).

129.

O **Método das Projecções Cotadas** consiste na projecção ortogonal de um objecto num plano (de projecção), resultando numa representação bidimensional do mesmo, em que a terceira dimensão é fornecida através de um número – a cota.

130.

O **Método da Dupla Projecção Ortogonal** consiste na representação (projecção) de um determinado objecto em **dois** planos de projecção distintos (mas ortogonais entre si), com o recurso à Projecção Ortogonal (as rectas projectantes são ortogonais aos respectivos planos de projecção). Trata-se, portanto, do recurso a dois Sistemas de Projecção Ortogonal distintos mas complementares entre si.

131.

- a) A utilização conjunta de dois planos de projecção distintos prende-se com a necessidade da verificação do Critério de Reversibilidade, para a validade de qualquer Método de Representação. De facto, este Método de Representação permite-nos obter duas representações distintas, mas complementares, de um objecto, sendo que a percepção da terceira dimensão do objecto representado é obtida através da leitura simultânea das suas duas projecções, em que é o conjunto das duas projecções que nos fornece, precisamente, todas as informações sobre a tridimensionalidade do objecto e sua volumetria.

(Continua na página seguinte)

b) As vantagens do Método da Dupla Projecção Ortogonal têm a ver com o facto de a informação fornecida pelas duas projecções, no seu conjunto, de um objecto, ao nível da sua tridimensionalidade, ser bastante mais precisa e de leitura mais clara do que a informação fornecida pelo Método das Projecções Cotadas. Em particular, em objectos de forma mais complexa, a informação fornecida pelo Método das Projecções Cotadas é bastante mais limitada e de leitura mais confusa.

132.

A afirmação é verdadeira, pois, de facto, no Sistema da Dupla Projecção Ortogonal têm-se dois planos de projecção e os respectivos feixes de rectas projectantes (dois feixes de rectas projectantes). Temos, pois, dois sistemas de projecção distintos mas complementares.

133.

O recurso à Múltipla Projecção Ortogonal justifica-se, sobretudo, nas situações em que, dada a complexidade formal do objecto, duas projecções do mesmo (Método da Dupla Projecção Ortogonal) são insuficientes para nos elucidar sobre a exacta volumetria do objecto. As vantagens têm a ver, precisamente, com uma informação mais detalhada e precisa sobre a totalidade do objecto, como que observado a partir de vários pontos de vista distintos, com vista à verificação do Critério de Reversibilidade.

134.

A **Projecção Triédrica** (ou Método da Tripla Projecção Ortogonal) consiste na representação (projecção) de um determinado objecto em **três** planos de projecção distintos (mas ortogonais entre si), com recurso à Projecção Ortogonal – têm-se, pois, três Sistemas de Projecção distintos (três planos de projecção e respectivos feixes de rectas projectantes) mas complementares entre si.

135.

A afirmação é verdadeira, pois, de facto, a representação de um objecto através de seis vistas – todas as vistas possíveis – fornece-nos uma informação bastante detalhada sobre quase todos os aspectos da sua volumetria, permitindo-nos, por isso, um conhecimento quase total da forma do objecto, o que não se passa com a Dupla Projecção Ortogonal e com a Projecção Triédrica.

136.

Uma **perspectiva** distingue-se das restantes representações estudadas por nos fornecer, numa única representação do objecto, uma informação visual global sobre as três dimensões do objecto. Uma **perspectiva** permite, dessa forma, uma percepção empírica e instantânea da tridimensionalidade do objecto, ao passo que as restantes representações exigem algum treino de visualização.

137.

O Sistema Axonométrico recorre à Projecção Oblíqua, sempre que um dos planos coordenados (um plano que contém dois eixos) é paralelo ao plano de projecção. O Sistema Axonométrico recorre à Projecção Ortogonal, sempre que nenhum dos planos coordenados seja paralelo ao plano de projecção. As representações que a Projecção Oblíqua nos fornece, no Sistema Axonométrico, são a Perspectiva Cavaleira e a Perspectiva Militar (ou Planométrica). As representações que a Projecção Ortogonal nos fornece, no Sistema Axonométrico, são a Perspectiva Isométrica, a Perspectiva Dimétrica e a Perspectiva Anisométrica.

138.

Centro de projecção – olho do observador. Rectas projectantes – raios visuais. Plano de projecção – Quadro.

139.

Todas as representações denominadas de **perspectiva** têm a ver com **um único plano de projecção**, pois essa é, afinal, a característica que diferencia as perspectivas das outras representações – é que **uma única representação** do objecto (uma única projecção) permite a verificação do Critério de Reversibilidade, sendo, por isso, desnecessário o recurso a quaisquer outras informações obtidas a partir de qualquer outra projecção (representação) do objecto.

140.

O pintor deverá recorrer à Perspectiva Cónica (ou linear), ou seja, ao Sistema de Projecção Cónica ou Central, por ser aquele que nos permite obter representações muito próximas da nossa percepção visual da realidade envolvente. De facto, a Perspectiva Cónica permite representar a realidade envolvente tal e qual como a vemos, como se o quadro (o plano de projecção) fosse uma janela de vidro.

141.

Recorre à Projecção Ortogonal, mais precisamente à Múltipla Projecção Ortogonal (método das vistas), por ser este método de representação que nos permite representar as várias vistas do objecto de forma articulada e complementar, fornecendo-nos uma informação detalhada e rigorosa sobre o mesmo, à escala.

4

REPRESENTAÇÕES DO PONTO E DA RECTA

142.

Para se obter a projecção frontal de um ponto conduz-se, por esse ponto, uma recta projectante frontal – o ponto de intersecção da recta projectante frontal com o Plano Frontal de Projecção é a projecção frontal do ponto.

143.

Para se obter a projecção horizontal de um ponto conduz-se, por esse ponto, uma recta projectante horizontal – o ponto de intersecção da recta projectante horizontal com o Plano Horizontal de Projecção é a projecção horizontal do ponto.

144.

Em Geometria Descritiva ou, mais correctamente, em Dupla Projecção Ortogonal, um ponto é representado por duas projecções – a sua **projecção frontal** (a projecção do ponto no Plano Frontal de Projecção) e a sua **projecção horizontal** (a projecção do ponto no Plano horizontal de projecção).

145.

Para reduzir a tridimensionalidade à bidimensionalidade da folha de papel, a Geometria Descritiva recorre ao rebatimento do Plano Frontal de Projecção sobre o Plano horizontal de Projecção. Assim, o Plano Frontal de Projecção roda em torno do eixo **X**, até coincidir com o Plano Horizontal de Projecção, fazendo com que o referencial tridimensional se transforme numa superfície bidimensional.

146.

A distância da projecção horizontal de um ponto ao eixo **X** corresponde ao afastamento desse ponto. De forma semelhante, a distância da projecção frontal de um ponto ao eixo **X** corresponde à cota desse ponto.

147.

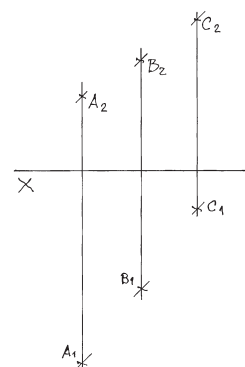
Por **alfabeto do ponto** entende-se o estudo da representação de um ponto em função da sua localização no espaço, relativamente ao referencial.

Nota:

Se bem que os dados métricos dos enunciados dos exercícios seguintes sejam em centímetros, as soluções aqui apresentadas não consideraram o centímetro como unidade. De facto, no sentido do estudante, o objectivo da consulta das soluções dos exercícios deve ser a verificação da correcção dos raciocínios e dos traçados, e não a comparação métrica dos mesmos. Dessa forma, considerou-se de maior utilidade o desenvolvimento dos relatórios e a resolução gráfica dos problemas a uma escala que evite qualquer tentativa de comparação métrica. A escala utilizada foi de $\frac{1}{2}$, o que significa que a cada centímetro da resolução do aluno corresponderá 0,5 cm nestas soluções.

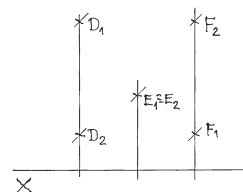
148.

A – 1º Diedro; 1º Octante; **B** – 1º Diedro; $\beta_{1/3}$; **C** – 1º Diedro; 2º Octante. **A**₁, a projecção horizontal do ponto **A**, está no **SPHA**, a 2 cm do eixo **X** (note que **A** tem afastamento positivo). **A**₂, a projecção frontal do ponto **A**, está no **SPFS**, a 5 cm do eixo **X** (note que **A** tem cota positiva). Após o rebatimento do Plano Frontal de Projecção sobre o Plano Horizontal de Projecção, na folha de papel, **A**₁ situar-se-á 2 cm para baixo do eixo **X** e **A**₂ situar-se-á 5 cm para cima do eixo **X**. De forma semelhante, após o rebatimento do Plano Frontal de Projecção sobre o Plano Horizontal de Projecção, **B**₁ (a projecção horizontal de **B**) situar-se-á 3 cm para baixo do eixo **X** e **B**₂ (a projecção frontal de **B**) situar-se-á 3 cm para cima do eixo **X**. Da mesma forma, ainda, **C**₁ (a projecção horizontal de **C**) situar-se-á 1 cm para baixo do eixo **X** e **C**₂ (a projecção frontal de **C**) situar-se-á 4 cm para cima do eixo **X**.

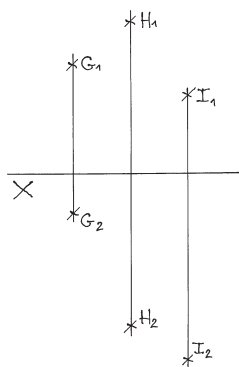


149.

D – 2º Diedro; 4º Octante; **E** – 2º Diedro; $\beta_{2/4}$; **F** – 2º Diedro; 3º Octante. **D**₁, a projecção horizontal do ponto **D**, está no **SPHP**, a 4 cm do eixo **X** (note que **D** tem afastamento negativo). **D**₂, a projecção frontal do ponto **D**, está no **SPFS**, a 1 cm do eixo **X** (note que **D** tem cota positiva). Após o rebatimento do Plano Frontal de Projecção sobre o Plano Horizontal de Projecção, na folha de papel, **D**₁ situar-se-á 4 cm para cima do eixo **X** e **D**₂ situar-se-á 1 cm também para cima do eixo **X**. De forma semelhante, após o rebatimento do Plano Frontal de Projecção sobre o Plano Horizontal de Projecção, **E**₁ (a projecção horizontal de **E**) situar-se-á 2 cm para cima do eixo **X** e **E**₂ (a projecção frontal de **E**) situar-se-á 2 cm também para cima do eixo **X**. Da mesma forma, ainda, **F**₁ (a projecção horizontal de **F**) situar-se-á 1 cm para cima do eixo **X** e **F**₂ (a projecção frontal de **F**) situar-se-á 3 cm também para cima do eixo **X**.



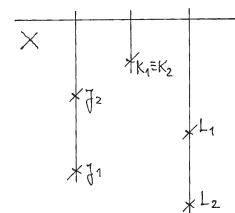
150.



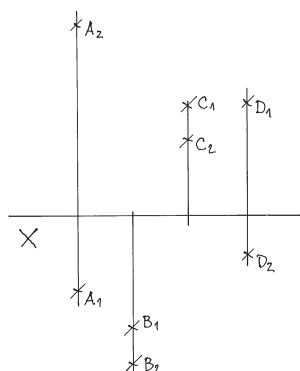
G – 3º Diedro; 5º Octante; **H** – 3º Diedro; $\beta_{1/3}$; **I** – 3º Diedro; 6º Octante. **G**₁, a projecção horizontal do ponto **G**, está no **SPHP**, a 3 cm do eixo **X** (note que **G** tem afastamento negativo). **G**₂, a projecção frontal do ponto **G**, está no **SPFI**, a 1 cm do eixo **X** (note que **G** tem cota também negativa). Após o rebatimento do Plano Frontal de Projecção sobre o Plano Horizontal de Projecção, na folha de papel, **G**₁ situar-se-á 3 cm para cima do eixo **X** e **G**₂ situar-se-á 1 cm para baixo do eixo **X**. De forma semelhante, após o rebatimento do Plano Frontal de Projecção sobre o Plano Horizontal de Projecção, **H**₁ (a projecção horizontal de **H**) situar-se-á 4 cm para cima do eixo **X** e **H**₂ (a projecção frontal de **H**) situar-se-á 4 cm para baixo do eixo **X**. Da mesma forma, ainda, **I**₁ (a projecção horizontal de **I**) situar-se-á 2 cm para cima do eixo **X** e **I**₂ (a projecção frontal de **I**) situar-se-á 5 cm para baixo do eixo **X**.

151.

J – 4º Diedro; 8º Octante; **K** – 4º Diedro; $\beta_{2/4}$; **L** – 4º Diedro; 7º Octante. **J**₁, a projecção horizontal do ponto **J**, está no **SPHA**, a 4 cm do eixo **X** (note que **J** tem afastamento positivo). **J**₂, a projecção frontal do ponto **J**, está no **SPFI**, a 2 cm do eixo **X** (note que **J** tem cota negativa). Após o rebatimento do Plano Frontal de Projecção sobre o Plano Horizontal de Projecção, na folha de papel, **J**₁ situar-se-á 4 cm para baixo do eixo **X** e **J**₂ situar-se-á 2 cm também para baixo do eixo **X**. De forma semelhante, após o rebatimento do Plano Frontal de Projecção sobre o Plano Horizontal de Projecção, **K**₁ (a projecção horizontal de **K**) situar-se-á 1 cm para baixo do eixo **X** e **K**₂ (a projecção frontal de **K**) situar-se-á 1 cm também para baixo do eixo **X**. Da mesma forma, ainda, **L**₁ (a projecção horizontal de **L**) situar-se-á 3 cm para baixo do eixo **X** e **L**₂ (a projecção frontal de **L**) situar-se-á 5 cm também para baixo do eixo **X**.



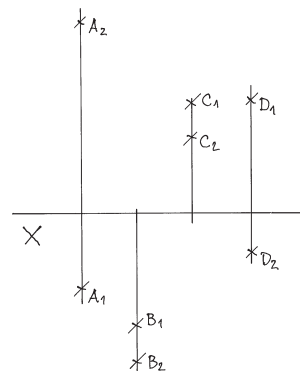
152.



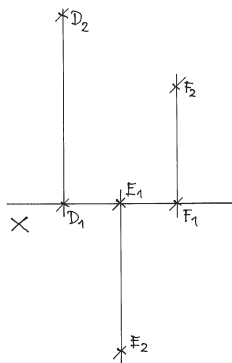
Para desenhar as projecções dos pontos pedidos, teve-se em consideração que **A** se situa no 1º Diedro (tem cota e afastamento positivos – ver relatório do exercício 148), que **B** se situa no 4º Diedro (tem afastamento positivo e cota negativa – ver relatório do exercício 151), que **C** se situa no 2º Diedro (tem afastamento negativo e cota positiva – ver relatório do exercício 149) e, finalmente, que **D** se situa no 3º Diedro (tem afastamento e cota negativos – ver relatório do exercício 150). **A** – 1º Diedro; 2º Octante; **B** – 4º Diedro; 7º Octante; **C** – 2º Diedro; 4º Octante; **D** – 3º Diedro; 6º Octante.

153.

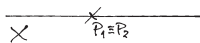
A – SPHA; B – SPHP; C – SPHA. Todos estes pontos têm afastamento nulo, pelo que a distância das suas projecções horizontais ao eixo **X** (ver relatório do exercício 146) é nula – as projecções horizontais dos pontos estão, todas, no eixo **X**. Conclui-se, portanto, que pontos do Plano Horizontal de Projecção têm a sua projecção frontal sobre o eixo **X**.



154.



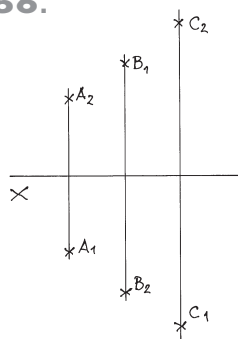
D – SPFS; E – SPFI; F – SPFS. Todos estes pontos têm cota nula, pelo que a distância das suas projecções frontais ao eixo **X** (ver relatório do exercício 146) é nula – as projecções frontais dos pontos estão, todas, no eixo **X**. Conclui-se, portanto, que pontos do Plano Frontal de Projecção têm a sua projecção horizontal sobre o eixo **X**.



155.

P situa-se no eixo **X** (**P** tem cota e afastamento nulos). **P** pertence ao Plano Horizontal de Projecção, pelo que a sua projecção frontal está no eixo **X**. **P** pertence ao Plano Frontal de Projecção, pelo que a sua projecção horizontal também está no eixo **X**. As suas projecções estão coincidentes no eixo **X**.

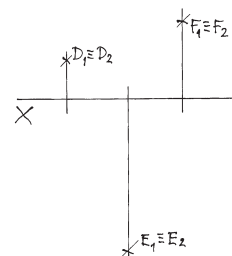
156.



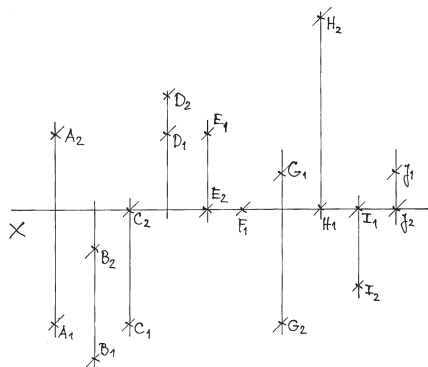
A – 1ª Diedro; $\beta_{1/3}$; B – 3ª Diedro; $\beta_{1/3}$; C – 1ª Diedro; $\beta_{1/3}$. No que respeita às coordenadas, conclui-se que pontos do $\beta_{1/3}$ têm coordenadas iguais. No que respeita às suas projecções, conclui-se que pontos do $\beta_{1/3}$ têm as suas projecções simétricas em relação ao eixo **X**.

157.

D – 2ª Diedro; $\beta_{2/4}$; E – 4ª Diedro; $\beta_{2/4}$; F – 2ª Diedro; $\beta_{2/4}$. No que respeita às coordenadas, conclui-se que pontos do $\beta_{2/4}$ têm coordenadas simétricas. No que respeita às projecções, conclui-se que pontos do $\beta_{2/4}$ têm as suas projecções coincidentes.

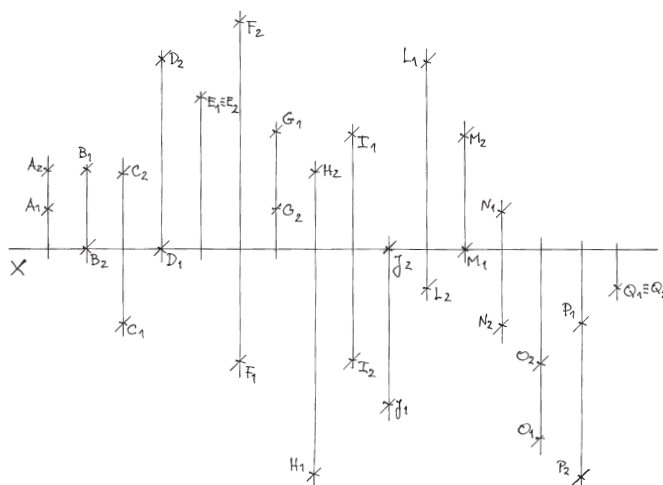


158.



As projecções de cada um dos pontos determinaram-se de acordo com o exposto nos relatórios dos exercícios 148 a 151 (pontos situados em cada um dos *Diedros*), 156 e 157 (pontos situados em cada um dos planos de projecção).

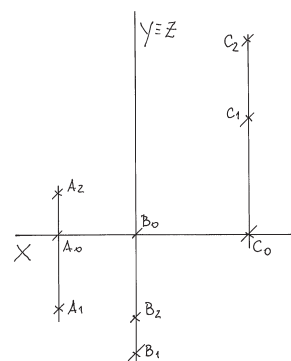
159.



Ver relatórios dos exercícios 148 a 151 (pontos situados em cada um dos *Diedros*), 156 e 157 (pontos situados em cada um dos planos de projecção).

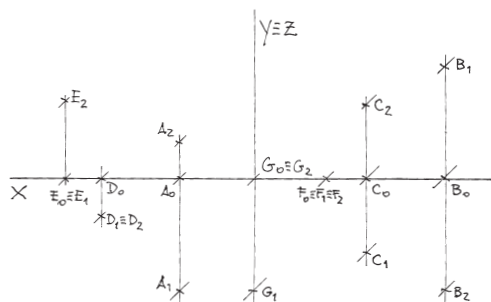
160.

Em primeiro lugar, desenhou-se uma recta vertical (perpendicular ao eixo **X**), sensivelmente a meio da folha – esta recta corresponde à sobreposição do eixo **Y** e do eixo **Z**, após o rebatimento do Plano Frontal de Projecção sobre o Plano Horizontal de Projecção, sendo identificada com **Y=Z** (o eixo **Y** e o eixo **Z** ficam coincidentes). Todos os pontos com abcissa nula situam-se no plano **YZ** (π_0). Os pontos com abcissa positiva situam-se para a esquerda do plano **YZ** (π_0). Os pontos com abcissa negativa situam-se para a direita do plano **YZ** (π_0). O ponto **A** está para a esquerda do plano **YZ** (π_0), pois tem abcissa positiva. O ponto **B** está no plano **YZ** (π_0), pois tem abcissa nula. O ponto **C** está para a direita do plano **YZ** (π_0), pois tem abcissa negativa. As projecções dos três pontos determinaram-se de acordo com o exposto nos relatórios dos exercícios 148 (ponto **A**), 151 (ponto **B**) e 149 (ponto **C**).

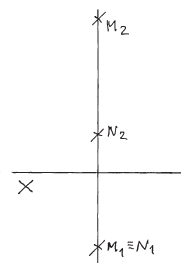
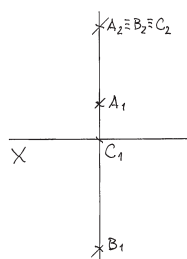


161.

Ver relatório do exercício anterior.

**162.**

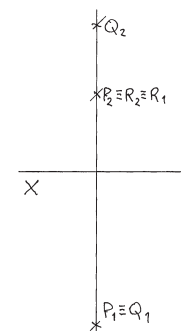
O ponto **N** situa-se na mesma recta projectante horizontal de **M**, pelo que os dois pontos têm necessariamente o mesmo afastamento – as coordenadas de **N** são (2; 1). Uma vez que os dois pontos se situam na mesma recta projectante horizontal, a recta projectante horizontal que projecta o ponto **M** no Plano Horizontal de Projecção é a mesma recta projectante horizontal que projecta o ponto **N** no Plano Horizontal de Projecção – os dois pontos têm, assim, as suas projecções horizontais coincidentes.

**163.**

Desenharam-se as projecções do ponto **A**, de acordo com o exposto no relatório do exercício **149**. Os pontos **B** e **C** situam-se na mesma recta projectante frontal de **A**, pelo que os três pontos têm necessariamente a mesma cota. **B** situa-se no $\beta_{1/3}$, pelo que tem coordenadas iguais (ver relatório do exercício **156**) – as coordenadas de **B** são (3; 3). **C** situa-se no Plano Frontal de Projecção, pelo que tem afastamento nulo – as suas coordenadas são (0; 3). Uma vez que os três pontos se situam na mesma recta projectante frontal, a recta projectante frontal que projecta o ponto **A** no Plano Frontal de Projecção é a mesma recta projectante frontal que projecta os pontos **B** e **C** no Plano Frontal de Projecção – os três pontos têm, assim, as suas projecções frontais coincidentes.

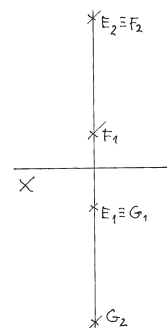
164.

- Desenharam-se as projecções do ponto **P**, de acordo com o exposto no relatório do exercício **148**.
- Os pontos **P** e **Q** têm o mesmo afastamento (ver relatório do exercício **162**) e **Q** situa-se no $\beta_{1/3}$, pelo que as suas coordenadas são (4; 4). **P** e **Q** têm as suas projecções horizontais coincidentes, pois situam-se na mesma recta projectante horizontal (ver relatório do exercício **162**).
- Os pontos **P** e **R** têm a mesma cota (ver relatório do exercício **163**) e **R** situa-se no $\beta_{2/4}$, pelo que as suas coordenadas são (-2; 2). **P** e **R** têm as suas projecções frontais coincidentes, pois situam-se na mesma recta projectante frontal (ver relatório do exercício **163**).

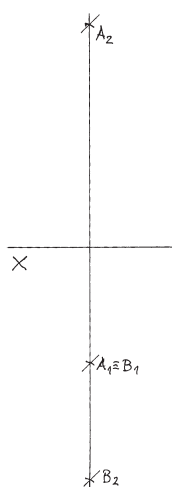


165.

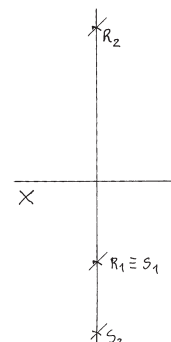
- a) Desenharam-se as projecções do ponto **E**, de acordo com o exposto no relatório do exercício **148**.
- b) Os pontos **E** e **F** são simétricos em relação ao Plano Frontal de Projecção, pelo que se situam necessariamente na mesma recta projectante frontal – têm a mesma cota e as suas projecções frontais estão coincidentes (ver relatório do exercício **163**). Os dois pontos estão equidistantes do Plano Frontal de Projecção, mas situam-se em *Diedros* distintos, pelo que têm afastamentos simétricos – as coordenadas de **F** são $(-1; 4)$.
- c) Os pontos **E** e **G** são simétricos em relação ao Plano Horizontal de Projecção, pelo que se situam necessariamente na mesma recta projectante horizontal – têm o mesmo afastamento e as suas projecções horizontais estão coincidentes (ver relatório do exercício **162**). Os dois pontos estão equidistantes do Plano Horizontal de Projecção, mas situam-se em *Diedros* distintos, pelo que têm cotas simétricas – as coordenadas de **G** são $(1; -4)$.

**166. Relatório**

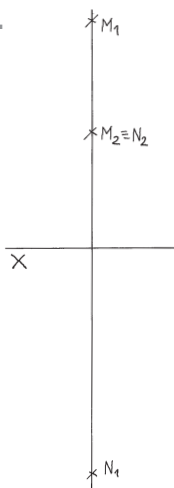
Os pontos **A** e **B** são simétricos em relação ao Plano Horizontal de Projecção, pelo que se situam necessariamente na mesma recta projectante horizontal – têm o mesmo afastamento (que é 3, que é o afastamento de **B**) e as suas projecções horizontais estão coincidentes (ver relatório do exercício **162**). Os dois pontos estão equidistantes do Plano Horizontal de Projecção, mas situam-se em *Diedros* distintos, pelo que têm cotas simétricas. A cota de **A** é dupla do seu afastamento, pelo que **A** tem 6 cm de cota – as coordenadas de **A** são $(3; 6)$. As coordenadas de **B** são $(3; -6)$, pois os dois pontos têm o mesmo afastamento e cotas simétricas.

Resolução**167.**

Ver relatório do exercício anterior. Os dois pontos têm o mesmo afastamento e cotas simétricas – logo, o ponto **R** tem 4 cm de cota. O afastamento de **R** é metade da sua cota, pelo que **R** tem 2 cm de cota – as coordenadas de **R** são $(2; 4)$. As coordenadas de **S** são $(2; -4)$. As projecções horizontais dos dois pontos estão coincidentes, pois os pontos situam-se na mesma recta projectante horizontal.

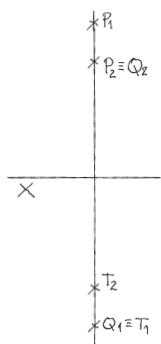


168.



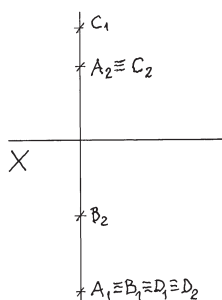
Os pontos **M** e **N** são simétricos em relação ao Plano Frontal de Projecção (plano **XZ** - ϕ_0), pelo que se situam necessariamente na mesma recta projectante frontal – têm a mesma cota e as suas projecções frontais estão coincidentes (ver relatório do exercício 163). O afastamento de **M** é -6, pelo que o de **N** é 6, pois os pontos estão equidistantes do Plano Frontal de Projecção, pelo que têm afastamentos simétricos. A cota de **N** é 3, pois é metade do seu afastamento. O ponto **M** situa-se no 2º *Diedro* e o ponto **N** no 1º – as coordenadas de **M** são (-6; 3) e as de **N** são (6; 3).

169.



- a) O ponto **P** situa-se no 2º *Diedro* – o ponto **Q**, sendo simétrico de **P** em relação ao Plano Frontal de Projecção (plano **XZ** - ϕ_0), situar-se-á necessariamente no 1º *Diedro*. Os dois pontos, porque são simétricos em relação ao Plano Frontal de Projecção, situam-se na mesma recta projectante frontal, têm a mesma cota e afastamentos simétricos. As coordenadas de **Q** são (4; 3). Os dois pontos têm as suas projecções frontais coincidentes.
- b) O ponto **T**, sendo simétrico de **Q** em relação ao Plano Horizontal de Projecção (plano **XY** - ν_0), situa-se no 4º *Diedro* – os dois pontos têm o mesmo afastamento e cotas simétricas. Os dois pontos, porque são simétricos em relação ao Plano Horizontal de Projecção, situam-se na mesma recta projectante horizontal, pelo que têm as suas projecções horizontais coincidentes. As coordenadas de **T** são (4; -3).

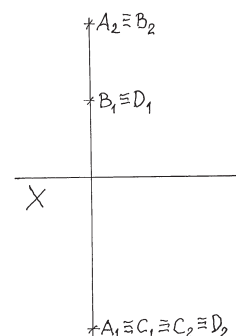
170.



- a) A cota de **B** é 2, em valor absoluto (em módulo), pelo que pode ser negativa ou positiva (o valor absoluto de 2 e de -2 é o mesmo – é 2). Uma vez que os dois pontos são simétricos em relação ao Plano Horizontal de Projecção e **A** se situa no 1º *Octante*, **B** tem de se situar no 8º *Octante*, pelo que tem cota negativa. A cota de **B** é -2. A cota de **A** é 2, pois os dois pontos têm o mesmo afastamento e cotas simétricas (ver relatório do exercício 166). A cota de **A** é metade do seu afastamento, pelo que o afastamento de **A** é 4. **A** (4; 2) e **B** (4; -2). Os dois pontos têm as suas projecções horizontais coincidentes.
- b) Um ponto do 4º *Octante* situa-se no 2º *Diedro* (tem afastamento negativo e cota positiva) e está mais distante do **SPFS** do que do **SPHP**, pelo que, em valor absoluto, o afastamento de **C** tem de ser maior do que a sua cota. As coordenadas de **C** podem ser, por exemplo, (-3; 2). Como **A** e **C** se situam na mesma recta projectante frontal, as suas projecções frontais estão coincidentes (ver relatório do exercício 163).
- c) Um ponto do 2º/4º tem coordenadas simétricas e projecções coincidentes. **D** e **B** têm o mesmo afastamento, pois situam-se na mesma recta projectante horizontal. As coordenadas de **D** são (4; -4). **D** e **B** têm as suas projecções horizontais coincidentes (ver relatório do exercício 162).

171.

- a) As coordenadas de **B** são $(-2; 4)$, pois **B** e **D** são simétricos em relação ao Plano Horizontal de Projecção (ver relatório do exercício 166). **A** e **B** têm o mesmo afastamento (ver relatório do exercício 163) e as coordenadas de **A** são iguais, pois **A** situa-se no $\beta_{1/3}$ – as coordenadas de **A** são $(4; 4)$. As coordenadas de **C** são $(4; -4)$, pois **A** e **C** são simétricos em relação ao Plano Frontal de Projecção (ver relatório do exercício 168).
- b) Desenharam-se as projecções dos quatro pontos, atendendo a que as projecções frontais de **A** e **B** estão coincidentes (situam-se na mesma recta projectante frontal), as projecções horizontais de **B** e **D** estão coincidentes (os dois pontos situam-se na mesma recta projectante horizontal) e as projecções horizontais de **A** e **C** estão coincidentes (os dois pontos situam-se na mesma recta projectante horizontal).



172.

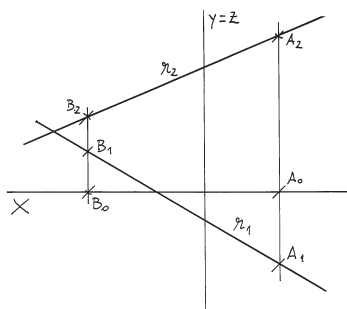
Por **projecção horizontal de uma recta** entende-se o lugar geométrico das projecções horizontais de todos os pontos da recta – é, assim, uma recta do Plano Horizontal de Projecção que contém as projecções horizontais de todos os pontos da recta.

173.

Por **projecção frontal de uma recta** entende-se o lugar geométrico das projecções frontais de todos os pontos da recta – é, assim, uma recta do Plano Frontal de Projecção que contém as projecções frontais de todos os pontos da recta.

174.

Em primeiro lugar, desenharam-se as projecções dos pontos **A** e **B**, que definem a recta. Em seguida, desenharam-se as projecções da recta. A projecção frontal da recta (r_2) está definida pelas projecções frontais dos dois pontos – r_2 passa por A_2 e por B_2 . A projecção horizontal da recta (r_1) está definida pelas projecções horizontais dos dois pontos – r_1 passa por A_1 e por B_1 . As projecções da recta estão, assim, definidas pelas projecções **homónimas** (do mesmo nome) dos dois pontos que a definem.

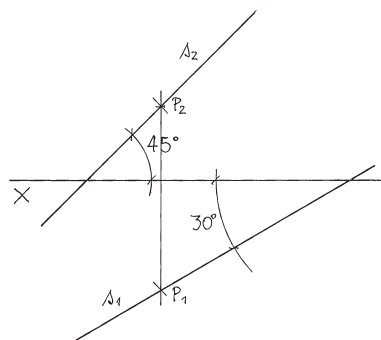


175.

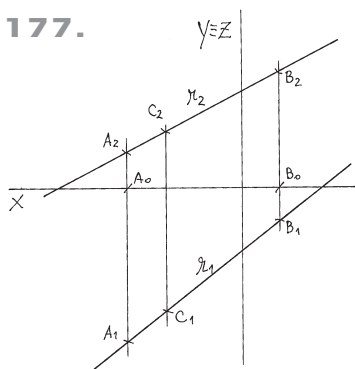
A sigla **a.d.** significa **abertura à direita** e refere-se ao sentido da abertura que a projecção (horizontal ou frontal) de uma determinada recta faz com o eixo X , no espaço do 1^{a} Diedro. De forma idêntica, a sigla **a.e.** significa **abertura à esquerda** e refere-se ao sentido da abertura que a projecção (horizontal ou frontal) de uma determinada recta faz com o eixo X , no espaço do 1^{a} Diedro.

176.

Em primeiro lugar, desenharam-se as projecções do ponto P . Em seguida, desenharam-se as projecções da recta, tendo em conta os ângulos que aquelas fazem com o eixo X – s_2 (a projecção frontal da recta) contém P_2 e faz, com o eixo X , um ângulo de 45° , de abertura para a direita (medido acima do eixo X); s_1 (a projecção horizontal da recta) contém P_1 e faz, com o eixo X , um ângulo de 30° , de abertura para a esquerda (medido abaixo do eixo X).



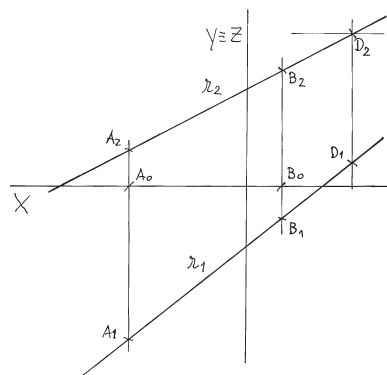
177.



Em primeiro lugar, desenharam-se as projecções dos pontos A e B e as projecções da recta, passando pelas projecções homónimas dos dois pontos (ver exercício 174). Em seguida, determinaram-se as projecções de um ponto C , qualquer, da recta, tal que C_2 (a projecção frontal do ponto) esteja sobre r_2 (a projecção frontal da recta) e C_1 (a projecção horizontal do ponto) esteja sobre r_1 (a projecção horizontal da recta). Nesse sentido, a **condição para que um ponto pertença a uma recta** é que as projecções do ponto têm que pertencer às projecções homónimas da recta. O ponto C pertence à recta r , pois as suas projecções estão sobre as projecções homónimas da recta.

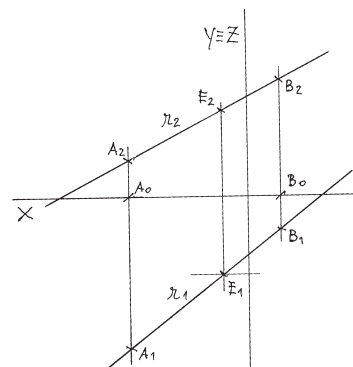
178.

Para que o ponto D tenha 4 cm de cota, a sua projecção frontal tem de estar 4 cm acima do eixo X . Por outro lado, para que o ponto D pertença à recta r , as suas projecções têm de pertencer às projecções homónimas da recta (ver relatório do exercício 177). Assim, D_2 , a projecção frontal de D , tem de se situar sobre r_2 , 4 cm acima do eixo X . D_1 , a projecção horizontal de D , tem de se situar sobre r_1 .

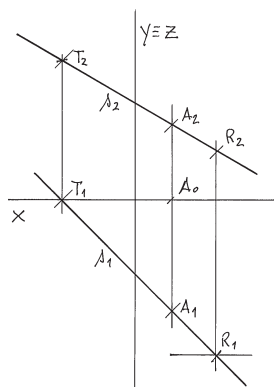


179.

Ver relatório do exercício anterior, atendendo a que as projecções do ponto **E** se determinaram em função do seu afastamento – E_1 tem de se situar sobre r_1 , 2 cm abaixo do eixo **X**. As projecções do ponto **E** têm de pertencer às projecções homónimas da recta.



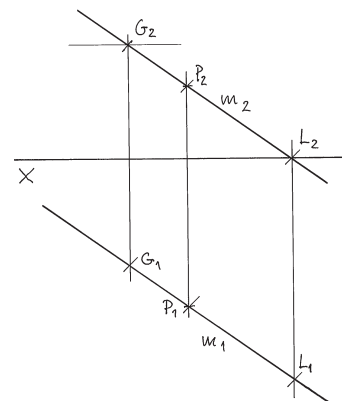
180.



- As projecções da recta **s** passam pelas projecções homónimas do ponto **A**, com os ângulos dados em relação ao eixo **X** (ver exercício 176).
- As projecções do ponto **R** estão sobre as projecções homónimas da recta **s** e R_1 está 4 cm abaixo do eixo **X** (ver exercício 179).
- Um ponto com 0 de afastamento (afastamento nulo) está no Plano Frontal de Projectão e tem necessariamente a sua projecção horizontal no eixo **X** (ver exercício 154). O ponto **T** é um ponto da recta **s**, pelo que tem de verificar a condição para que um ponto pertença a uma recta – **T** é o ponto da recta cuja projecção horizontal está no eixo **X**. **T** situa-se no **SPFS**, pois tem cota positiva.

181.

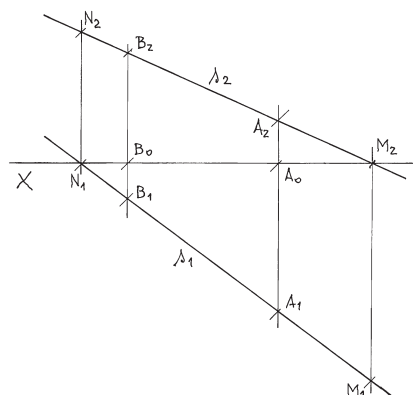
- Desenharam-se as projecções da recta **m** de acordo com os dados. Note que as projecções da recta são paralelas apenas na folha de papel pois, no espaço, as duas projecções não são nunca paralelas – m_2 situa-se no Plano Frontal de Projectão e m_1 situa-se no Plano Horizontal de Projectão.
- Determinaram-se as projecções do ponto **G**, pertencente à recta **m** e com 3 cm de cota, de acordo com o exposto no relatório do exercício 178.
- Pontos com 0 de cota (cota nula) pertencem ao Plano Horizontal de Projectão e têm necessariamente a sua projecção frontal sobre o eixo **X** (ver exercício 153). O ponto **L** é um ponto da recta **m**, pelo que tem de verificar a condição para que um ponto pertença a uma recta relativamente à recta **m** – **L** é o ponto da recta cuja projecção frontal está no eixo **X**. O ponto **L** situa-se no **SPHA**, pois tem afastamento positivo.



182. Relatório

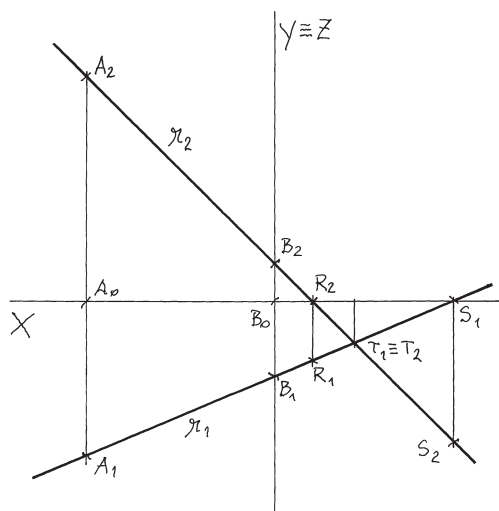
Em primeiro lugar, desenharam-se as projecções da recta **s**, em função dos dados (ver exercício 174). Note que, não sendo dadas as abcissas dos dois pontos, é dada a relação existente entre as respectivas linhas de chamada – a linha de chamada do ponto **B** situa-se 4 cm para a esquerda da linha de chamada do ponto **A**. Em seguida, determinaram-se as projecções dos pontos **M** e **N**. O ponto **M**, que tem cota nula, é o ponto da recta tal que M_2 se situa no eixo **X** (ver alínea c) do exercício anterior). O ponto **N**, que tem afastamento nulo, é o ponto da recta tal que N_1 se situa no eixo **X** (ver alínea c) do exercício 180). **M** situa-se no **SPHA** (tem afastamento positivo) e **N** no **SPFS** (tem cota positiva).

Resolução



183.

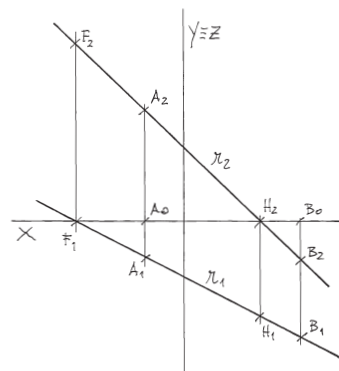
Em primeiro lugar, desenharam-se as projecções da recta r , em função dos dados. O ponto R , que tem cota nula, é o ponto da recta tal que R_2 se situa no eixo X (ver alínea **c**) do exercício 181). O ponto S , que tem afastamento nulo, é o ponto da recta tal que S_1 se situa no eixo X (ver alínea **c**) do exercício 180). O ponto T , que tem projecções coincidentes, tem de ter a sua projecção horizontal sobre a projecção horizontal da recta e a sua projecção frontal sobre a projecção frontal da recta. T é, assim, o ponto em que as duas projecções da recta se intersectam (na folha de papel).

**184.**

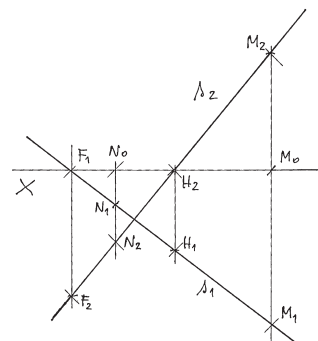
O **traço horizontal de uma recta** é o ponto de intersecção da recta com o Plano Horizontal de Projecção – é o único ponto da recta que tem cota nula. O **traço frontal de uma recta** é o ponto de intersecção da recta com o Plano Frontal de Projecção – é o único ponto da recta que tem afastamento nulo.

185.

Em primeiro lugar, desenharam-se as projecções da recta, em função dos dados. Em seguida, determinaram-se os traços da recta. O traço horizontal (**H**) de r é o ponto de intersecção da recta com o Plano Horizontal de Projecção – é o ponto da recta com cota nula (ver alínea **c**) do exercício 180). O traço frontal (**F**) de r é o ponto de intersecção da recta com o Plano Frontal de projecção – é o ponto da recta com afastamento nulo (ver alínea **c**) do exercício 181).

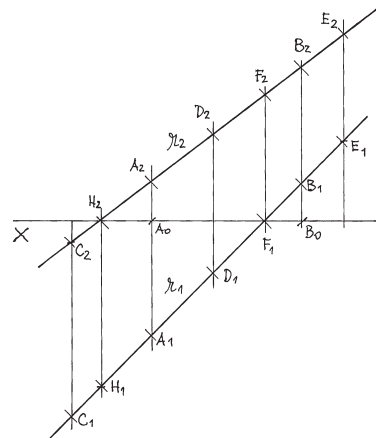
**186.**

Em primeiro lugar, desenharam-se as projecções da recta s (ver relatório do exercício 182). Sobre a determinação dos traços da recta nos planos de projecção, ver relatório do exercício anterior. Note que o traço frontal da recta, o ponto F , tem cota negativa (situa-se no **SPFI**).



187.

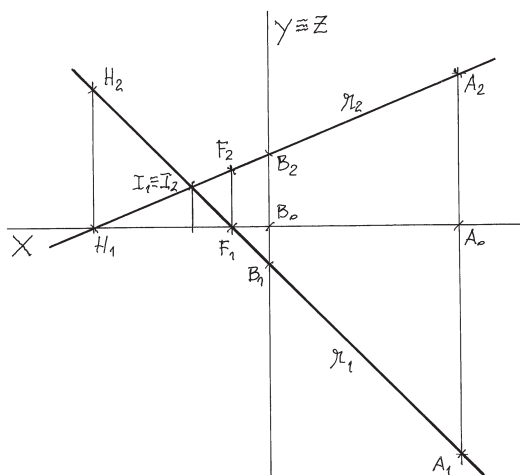
Sobre a determinação dos traços da recta, ver relatório do exercício 185. Em seguida, determinaram-se as projecções dos três pontos pedidos, **C**, **D** e **E** – os três pontos pertencem à recta, pois têm as suas projecções sobre as projecções homónimas da recta. O ponto **C** está no 4º *Diedro*, pois tem cota negativa e afastamento positivo. O ponto **D** está no 1º *Diedro*, pois tem cota e afastamento positivos. O ponto **E** está no 2º *Diedro*, pois tem cota positiva e afastamento negativo. Os três pontos situam-se, portanto, em *Diedros* distintos. Note que a recta atravessa **três** *Diedros* (os três *Diedros* nos quais se localizam os pontos **C**, **D** e **E**).

**188.**

O **traço de uma recta no $\beta_{1/3}$** é o ponto de intersecção da recta com o plano bissector $\beta_{1/3}$ – é o único ponto da recta que tem projecções simétricas em relação ao eixo **X**. O **traço de uma recta no $\beta_{2/4}$** é o ponto de intersecção da recta com o plano bissector $\beta_{2/4}$ – é o único ponto da recta que tem projecções coincidentes.

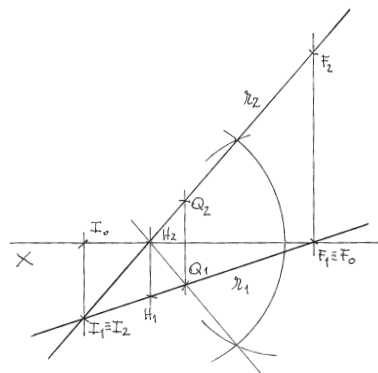
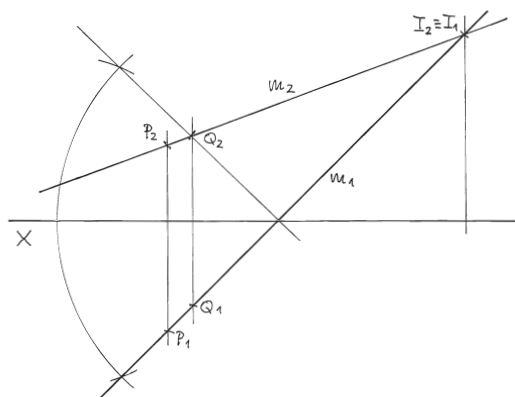
189.

Sobre a determinação dos traços da recta, ver relatório do exercício 185. O traço da recta no $\beta_{2/4}$ é o ponto de intersecção da recta com o $\beta_{2/4}$ – pertence simultaneamente à recta e ao $\beta_{2/4}$. Para o ponto pertencer ao $\beta_{2/4}$ tem de ter as suas projecções coincidentes. Para o ponto pertencer à recta, tem de ter as suas projecções sobre as projecções homónimas da recta. O ponto **I** é, assim, o **único ponto** que pertence à recta e que tem as suas projecções coincidentes – **I** é, pois, o traço da recta no $\beta_{2/4}$ (ver relatório do exercício 183 sobre o ponto **T**).



190. Resolução

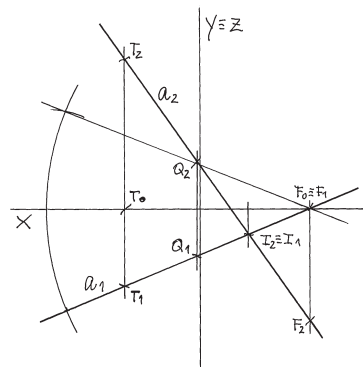
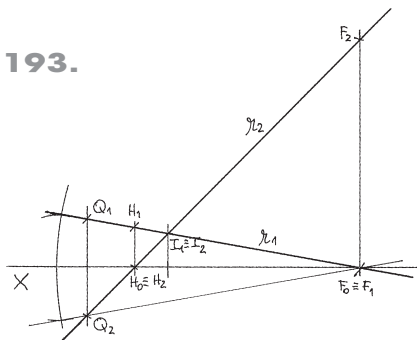
As projecções de r estão definidas pelas projecções homónimas de F e I (note que I é o traço da recta no $\beta_{2/4}$). O ponto F é já o traço frontal de r , pois tem afastamento nulo. H , o traço horizontal de r , é o ponto de r com cota nula. O traço da recta no $\beta_{1/3}$ é o ponto de intersecção da recta com o $\beta_{1/3}$ – pertence simultaneamente à recta e ao $\beta_{1/3}$. Para pertencer à recta, tem de ter as suas projecções sobre as projecções homónimas da recta. Para pertencer ao $\beta_{1/3}$ tem de ter as suas projecções simétricas em relação ao eixo X . Para determinar as projecções de Q (traço de r no $\beta_{1/3}$ ou 1^a Bisector), utilizou-se uma linha recta auxiliar, simétrica de r_2 em relação ao eixo X – o ponto de intersecção daquela com r_1 é Q_1 e Q_2 situa-se sobre r_2 . Q tem as suas projecções simétricas em relação ao eixo X . Note que se poderia ter determinado o ponto Q (traço da recta no $\beta_{1/3}$) com o recurso a uma linha recta auxiliar simétrica de r_1 em relação ao eixo X , como se explicita no relatório do exercício seguinte.

**191.**

Sobre a determinação do ponto I (traço de m no $\beta_{2/4}$) ver relatório do exercício 189. O ponto Q (traço de m no $\beta_{1/3}$) é o ponto de m com projecções simétricas em relação ao eixo X . Para determinar Q utilizou-se uma linha recta auxiliar, simétrica de m_1 em relação ao eixo X – o ponto de intersecção dessa linha auxiliar com m_2 é Q_2 e Q_1 situa-se sobre m_1 .

192.

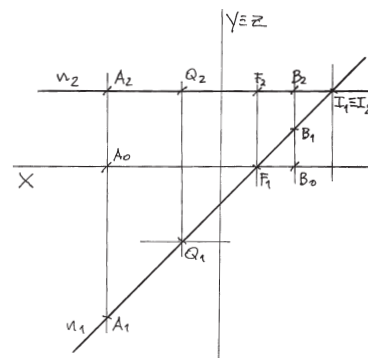
Em primeiro lugar, desenharam-se as projecções da recta a . Note que a recta a está definida por dois pontos – o ponto T (cujas coordenadas são dadas) e o ponto F (cujas coordenadas são implicitamente dadas, uma vez que se sabe que o traço frontal de uma recta tem **necessariamente** afastamento nulo). Sobre a determinação dos traços da recta nos planos bissectores, ver relatório do exercício anterior.

**193.**

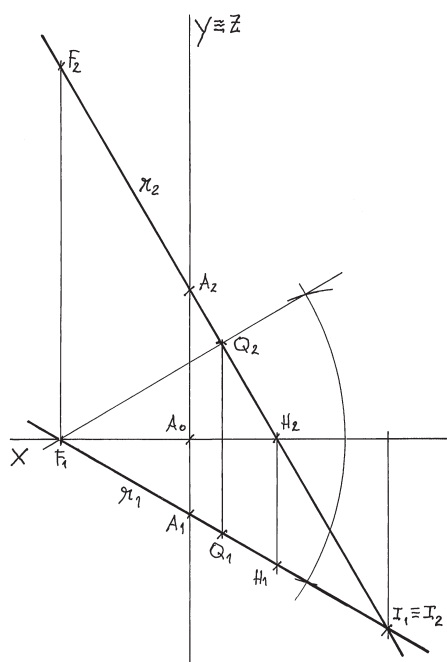
A recta está definida pelos seus traços nos planos de projecção – H tem cota nula (é um ponto do Plano Horizontal de Projecção) e F tem afastamento nulo (é um ponto do Plano Frontal de Projecção). Sobre a determinação dos traços da recta nos planos bissectores, aconselha-se a leitura do relatório do exercício 191. A linha recta auxiliar a que se recorreu para a determinação do ponto Q (o traço de r no $\beta_{1/3}$) foi uma linha simétrica de r_1 em relação ao eixo X – esta linha auxiliar permitiu-nos determinar, em primeiro lugar, Q_2 (que está sobre r_2) e, em seguida, Q_1 (que está sobre r_1).

194.

Em primeiro lugar, desenharam-se as projecções da recta. **F** (traço frontal de **n**) é o ponto de **n** com afastamento nulo. Não há nenhum ponto de **n** com cota nula, pois todos os seus pontos têm a mesma cota, que é 2. Por isso, esta recta não intersecta o Plano Horizontal de Projecção (é paralela a este), logo não tem traço horizontal. **I** (traço de **n** no $\beta_{2/4}$) é o ponto de **n** que tem projecções coincidentes. Para a determinação de **Q** (o traço da recta **n** no $\beta_{1/3}$) recorreu-se a um raciocínio ligeiramente diferente do utilizado nos exercícios anteriores. De facto, atendendo a que todos os pontos da recta **n** têm 2 cm de cota, **Q** é **necessariamente** o ponto de **n** que tem 2 cm de afastamento (pontos do $\beta_{1/3}$ têm coordenadas iguais). Note que este raciocínio só é possível nesta recta, porque todos os pontos da recta têm a mesma cota.



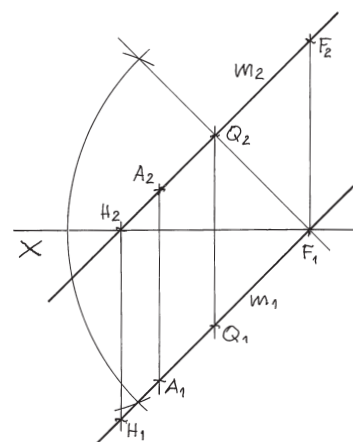
195.



Sobre a determinação dos traços da recta nos planos de projecção, ver relatório do exercício 185. Sobre a determinação do traço da recta no $\beta_{2/4}$, ver relatório do exercício 189. Sobre a determinação do traço da recta no $\beta_{1/3}$, ver relatório do exercício 190, atendendo a que, neste exercício, se recorreu a uma linha recta auxiliar, simétrica de **r**₁ em relação ao eixo **X**.

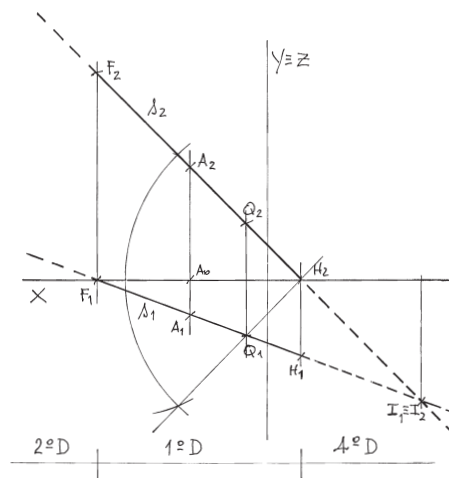
196.

Note que, à semelhança do referido no relatório do exercício 181, as projecções da recta, **no espaço**, não são paralelas, pois **r**₁ situa-se no Plano Horizontal de Projecção e **r**₂ no Plano Frontal de Projecção. As projecções são paralelas entre si apenas no papel, após o rebatimento do Plano Frontal de Projecção sobre o Plano Horizontal de Projecção. Sobre a determinação dos pontos notáveis da recta, ver relatório do exercício anterior. Esta recta não intersecta o $\beta_{2/4}$, pois não é possível determinar nenhum ponto da recta que tenha projecções coincidentes – não há traço da recta no $\beta_{2/4}$.

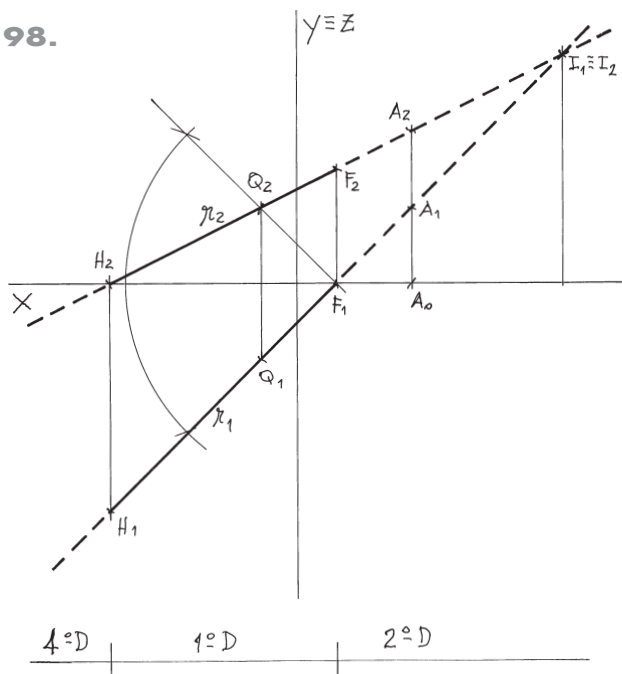


197.

Em primeiro lugar, desenharam-se as projecções da recta em função dos dados (ver relatório do exercício 176). Em seguida, determinaram-se os traços da recta nos planos de projecção – **F** (traço frontal de **s**) é o ponto de **s** com afastamento nulo e **H** (traço horizontal de **s**) é o ponto de **s** com cota nula. **Q** (traço de **s** no $\beta_{1/3}$) é o ponto de **s** com projecções simétricas em relação ao eixo **X**. **I** (traço de **s** no $\beta_{2/4}$) é o ponto de **s** com projecções coincidentes. Em seguida, indicou-se o percurso da recta numa linha recta auxiliar, paralela ao eixo **X**. Note que os traços da recta nos planos de projecção (**H** e **F**) são os pontos em que a recta atravessa os planos de projecção e passa de um *Diedro* para outro. Como a recta intersecta os **dois** planos de projecção, a recta muda de *Diedro* **duas vezes**. A parte da recta que se situa à esquerda de **F** situa-se no **2º Diedro** (os pontos têm afastamento negativo e cota positiva). A parte da recta compreendida entre **F** e **H** situa-se no **1º Diedro** (os pontos têm cota e afastamento positivos). A parte da recta situada para a direita de **H** situa-se no **4º Diedro** (os pontos têm cota negativa e afastamento positivo). Só a parte da recta que se situa no **1º Diedro** é que é **visível** – representou-se a **traço contínuo**. As partes da recta que não se situam no **1º Diedro** são **invisíveis** – representaram-se a **traço interrompido**.



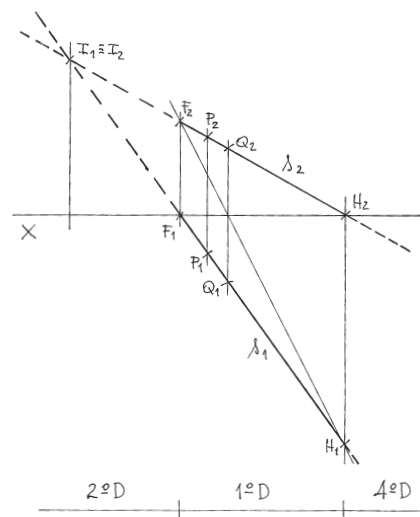
198.



Em primeiro lugar, desenharam-se as projecções da recta, em função dos dados (ver exercício 192, atendendo a que, nesta situação, é dado o traço horizontal da recta, que tem cota nula). Sobre a determinação dos pontos notáveis da recta, ver relatório do exercício 195. Sobre o percurso da recta e a representação das suas invisibilidades, ver relatório do exercício anterior.

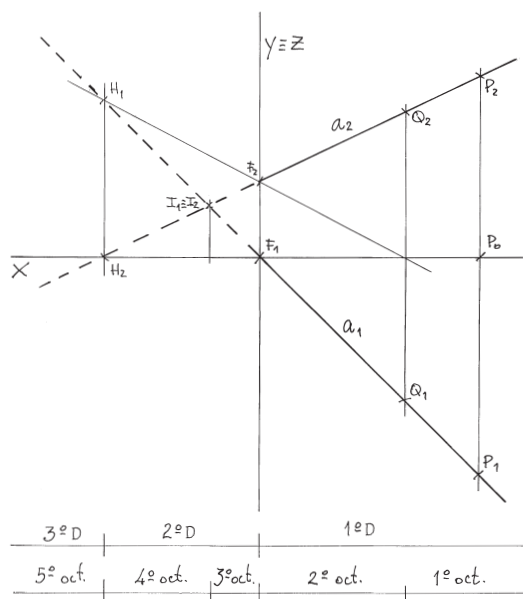
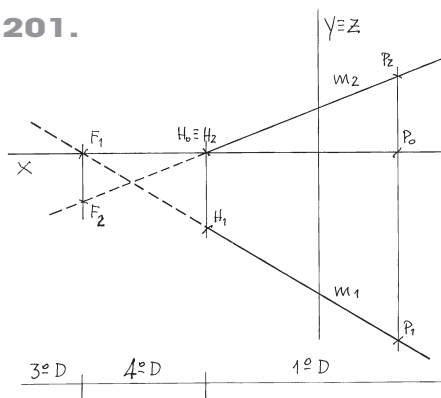
199.

Em primeiro lugar, desenharam-se as projecções do ponto **P** e a projecção frontal da recta, em função do ângulo dado. A partir da projecção frontal da recta determinou-se **H₂**, a projecção frontal do traço horizontal da recta, que se situa no eixo **X** (**H** tem cota nula) – **H₁** situa-se 6 cm abaixo do eixo **X** (**H** tem 6 cm de afastamento). A partir de **P₁** e de **H₁** desenhou-se a projecção horizontal da recta – **s₁**. Para a determinação de **F** (traço frontal da recta), **I** (traço da recta no $\beta_{2/4}$), percurso da recta e suas invisibilidades, ver relatório do exercício 197. A determinação de **Q** (traço da recta no $\beta_{1/3}$) processou-se de uma forma distinta das atrás referidas – recorreu-se a uma linha recta auxiliar que passa por **F₂** e **H₁** – o ponto de intersecção dessa linha auxiliar com o eixo **X** indica-nos a posição da linha de chamada de **Q**. As projecções de **Q** estão sobre as projecções homónimas de **s**.



200.

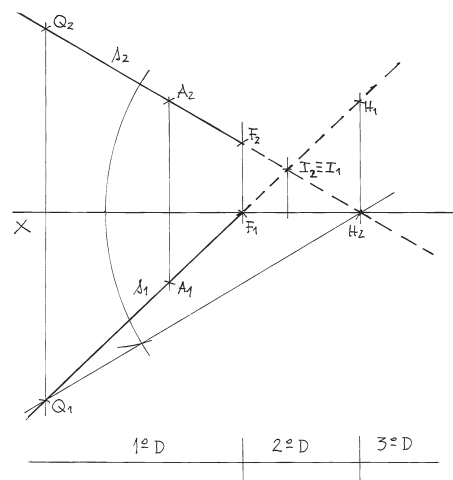
Em primeiro lugar, desenharam-se as projecções do ponto **P** e a projecção horizontal da recta, em função do ângulo dado. A partir da projecção horizontal da recta determinou-se **F**₁, a projecção horizontal do traço frontal da recta, que se situa no eixo **X** (**F** tem afastamento nulo) – **F**₂ situa-se 2 cm acima do eixo **X** (**F** tem 2 cm de cota). A partir de **P**₂ e de **F**₂ desenhou-se a projecção frontal da recta – **a**₂. Para a determinação dos pontos notáveis de **a**, aconselha-se a leitura do relatório do exercício anterior. A recta **a** atravessa o 3º, o 2º e o 1º Diedros, por esta ordem, da esquerda para a direita (sugere-se o estudo da variação do sinal das coordenadas dos pontos da recta, à semelhança do exposto no relatório do exercício 197). Só a parte situada o 1º Diedro é que é visível (ver relatório do exercício 197). No que respeita aos Octantes, note que sempre que a recta atravessar um dos planos de projecção ou um dos planos bissectores (que são os planos que dividem o espaço em Octantes), a recta muda de Octante. Nesse sentido, observe que a recta atravessa os **quatro** planos, pelo que muda de Octante **quatro vezes**. Assim, a recta **a** atravessa os dois Octantes do 1º Diedro, pois **Q** situa-se no 1º Diedro. Da mesma forma, atravessa os dois Octantes do 2º Diedro, pois **I** está no 2º Diedro. A parte da recta situada no 3º Diedro situa-se, na totalidade, no 5º Octante. Sugere-se o estudo das relações de grandeza (maior/menor) entre as coordenadas dos pontos da recta.

**201.**

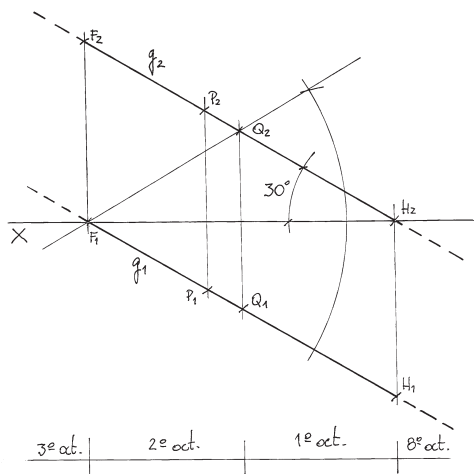
Em primeiro lugar, desenharam-se as projecções da recta, em função dos dados (ver exercício 192, atendendo a que, nesta situação, é dado o traço horizontal da recta, que tem cota nula). Em seguida, para indicar o percurso é necessária a determinação do traço frontal da recta (o traço horizontal é dado). A partir dos traços da recta, indicou-se o seu percurso e as partes visíveis da recta. A parte da recta situada para a esquerda de **F** situa-se no 3º Diedro (os pontos têm cota e afastamento negativos). A parte da recta compreendida entre **F** e **H** situa-se no 4º Diedro (os pontos têm afastamento positivo e cota negativa). A parte da recta situada para a direita de **H** situa-se no 1º Diedro (os pontos têm cota e afastamento positivos). Apenas esta última é visível.

202.

Em primeiro lugar, desenharam-se as projecções da recta, em função dos dados (ver exercício 199, atendendo a que, nesta situação, o afastamento do traço horizontal da recta é negativo). Sobre a determinação do percurso da recta e a representação das suas invisibilidades, ver relatório do exercício anterior.

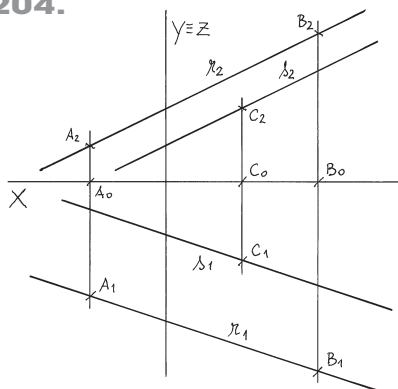


203.



Em primeiro lugar, desenharam--se as projecções da recta em função dos dados (ver exercício 181) e determinaram-se os seus pontos notáveis. Não há nenhum ponto de g com projecções coincidentes, pelo que a recta não intersecta o $\beta_{2/4}$ (a recta é paralela ao $\beta_{2/4}$) – assim, as suas partes situadas no 2º *Diedro* e no 4º *Diedro* não mudam de *Octante* (é o $\beta_{2/4}$ que divide os 2º e 4º *Diedros* em *Octantes* e a recta não intersecta o $\beta_{2/4}$).

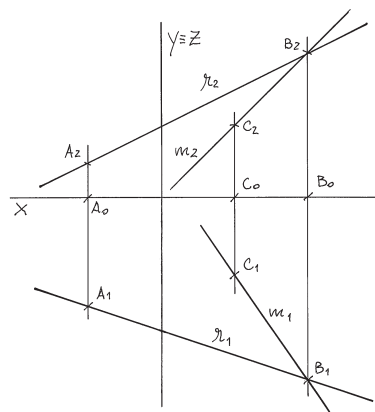
204.



Em primeiro lugar, desenharam-se as projecções da recta r , que estão definidas pelas projecções homónimas dos pontos A e B . Em seguida, desenharam-se as projecções da recta s , paralelas às projecções homónimas de r e contendo as projecções homónimas de C – s_1 é paralela a r_1 e passa por C_1 e s_2 é paralela a r_2 e passa por C_2 . **Conclusão:** rectas paralelas têm as projecções homónimas paralelas entre si.

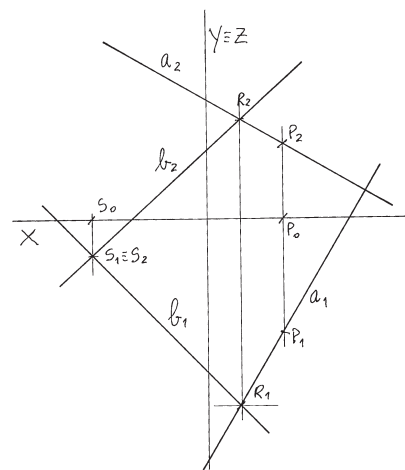
205.

Em primeiro lugar, desenharam-se as projecções da recta r . Em seguida, desenharam-se as projecções da recta m , que estão definidas pelas projecções homónimas dos pontos C e B (B é o ponto de concorrências de m com r , pelo que B é também um ponto da recta m). **Conclusão:** as projecções homónimas de rectas concorrentes são concorrentes entre si sobre as projecções homónimas do ponto de concorrência.



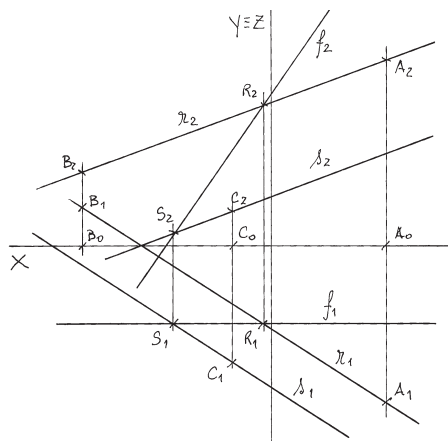
206.

- a) Desenharam-se as projecções da recta **a**, em função dos dados.
- b) Em primeiro lugar, determinaram-se as projecções do ponto **R**, pertencente à recta **a** e com 5 cm de afastamento – **R** é o **ponto de concorrência** das duas rectas. Em seguida, representou-se o ponto **S** e desenharam-se as projecções da recta **b**, passando pelas projecções homónimas dos pontos **R** e **S**. Note que o ponto **R** é um ponto que pertence às duas rectas.

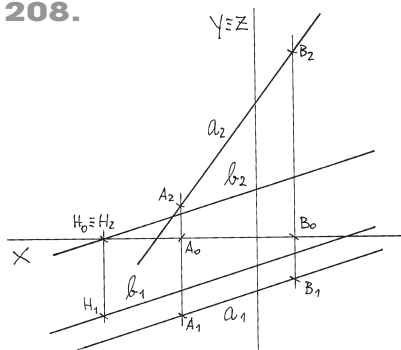


207.

- a) Ver exercício 204.
- b) Em primeiro lugar, desenhou-se **f₁**, a projecção horizontal da recta **f**. A recta **f** é concorrente com **r** e **s**, pelo que se torna necessário determinar os **pontos de concorrência**. A recta **f** é concorrente com a recta **r** no ponto **R** e concorrente com a recta **s** no ponto **S**. Para determinar as projecções do ponto **R**, teve-se em conta que **R** tem de pertencer às duas rectas (**r** e **f**) – **f₁** é concorrente com **r₁** em **R₁** e **R₂** situa-se sobre **r₂**, pois **R** é um ponto de **r**. Determinaram-se as projecções do ponto **S** de forma semelhante (**f₁** é concorrente com **s₁** em **S₁** e **S₂** situa-se sobre **s₂**). A projecção frontal de **f** fica definida por **R₂** e **S₂**.



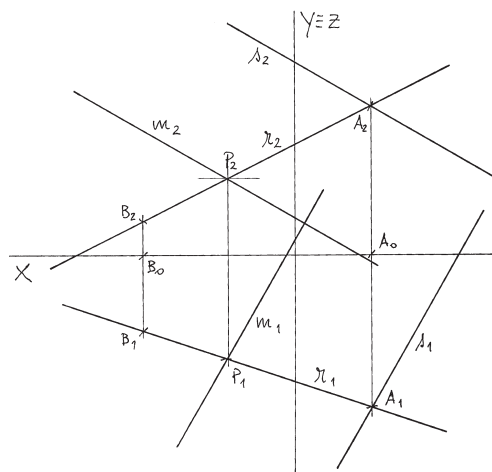
208.



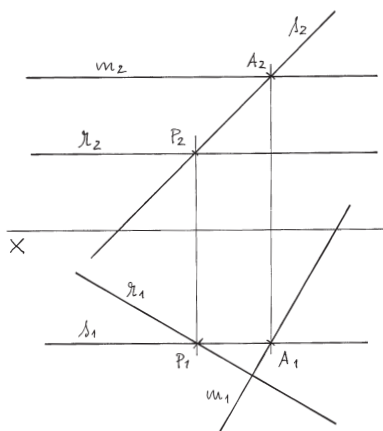
Desenharam-se as projecções da recta **a** e localizou-se o traço horizontal de **b** (**H**) – **b₁** passa por **H₁** e é paralela a **a₁**. As projecções de **b** são paralelas entre si (ver relatório do exercício 181), pelo que **b₂** passa por **H₂** e é paralela a **b₁**. As rectas **a** e **b** são **enviesadas** (não coplanares), pois **não são paralelas** (as projecções homónimas não são paralelas entre si) **nem concorrentes** (não é possível determinar as projecções de um ponto comum às duas rectas – um **ponto de concorrência**).

209.

- a) Desenharam-se as projecções das duas rectas, em função dos dados. Note que as duas rectas contêm o ponto **A**, que é o ponto de concorrência das duas rectas (pertence simultaneamente às duas rectas).
- b) Determinaram-se as projecções do ponto **P** – **P** é o ponto da recta **r** que tem 2 cm de cota. A recta **m** é paralela a **s** e concorrente com **r** em **P**, pelo que as projecções de **m** são paralelas às projecções homónimas de **s** e contêm as projecções homónimas do ponto **P**. A recta **m** está definida por um ponto (**P**) e por uma direcção (a direcção de **s**).



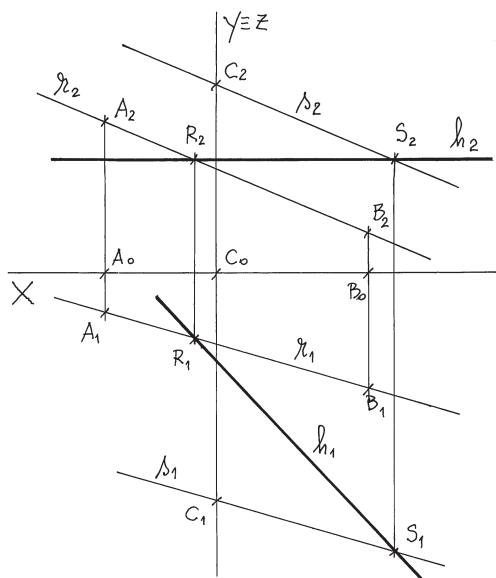
210.



- a) Em primeiro lugar, desenharam-se as projecções da recta **r**, em função dos dados – desenhou-se a sua projecção frontal, paralela ao eixo **X**, e a sua projecção horizontal, de forma arbitrária mas respeitando o ângulo pedido. Em seguida, desenhou-se a projecção horizontal da recta **s**, paralela ao eixo **X** e determinou-se o ponto de concorrência das duas rectas – o ponto **P**. **P**₁ é o ponto de concorrência de **s**₁ com **r**₁ e **P**₂ situa-se sobre **r**₂. Passando por **P**₂ desenhou-se a projecção frontal da recta **s**, com o ângulo pedido.
- b) Determinaram-se as projecções do ponto **A** (**A** é o ponto da recta **s** que tem 4 cm de cota) e, em seguida, desenharam-se as projecções da recta **m** em função dos dados e passando pelas projecções homónimas do ponto **A**.
- c) As rectas **r** e **m** são **enviesadas** (são não complanares), pois **não são paralelas** (as projecções homónimas das duas rectas não são paralelas entre si) **nem concorrentes** (não existe nenhum ponto **comum** às duas rectas).

211.

Em primeiro lugar, desenharam-se as projecções das rectas **r** e **s**, em função dos dados (ver exercício 204). Sobre a determinação das projecções da recta **h**, ver relatório do exercício 207, atendendo a que, neste caso, a projecção dada é a projecção frontal. Assim, os pontos de concorrência da recta **h** com as rectas **r** e **s** foram determinados primeiramente em projecção frontal. A partir das projecções frontais dos pontos **R** e **S** (respectivamente os pontos de concorrência da recta **h** com as rectas **r** e **s**), determinaram-se as suas projecções horizontais (**R**₁ e **S**₁). A partir destas desenhou-se a projecção horizontal da recta **h**. A recta **h** ficou definida por dois pontos.

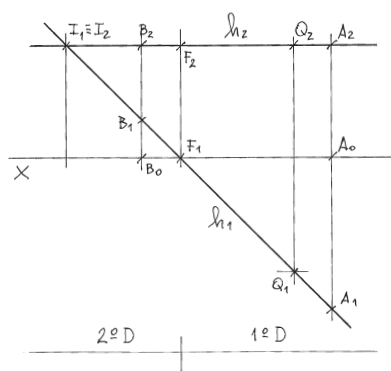
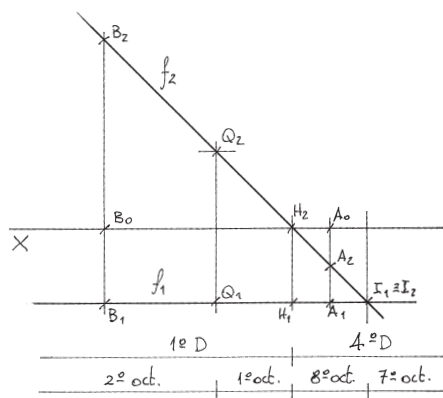


212.

Por **alfabeto da recta** entende-se a classificação das rectas, em função das posições que podem ter no espaço, relativamente ao referencial, bem como o estudo das respectivas representações.

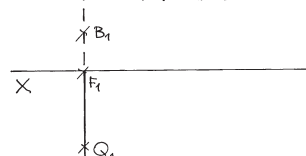
213.

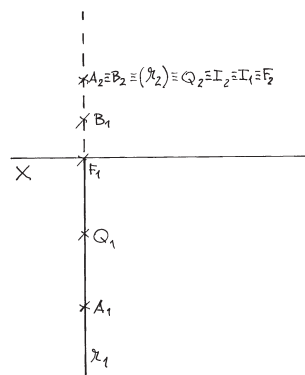
Em primeiro lugar, desenharam-se as projecções da recta **h**. Em seguida, determinaram-se os seus pontos notáveis. **I** é o traço de **h** no $\beta_{2/4}$ – tem projecções coincidentes (ver exercício 189). **Q** é o traço de **h** no $\beta_{1/3}$ – tem projecções simétricas em relação ao eixo **X** (ver exercício 194). **F** é o traço frontal de **h** (é o ponto de **h** com afastamento nulo). A recta **h** não tem traço horizontal – note que a recta não intersecta o Plano Horizontal de Projecção, pois não há nenhum ponto de **h** com cota nula. A característica fundamental desta recta é que todos os seus pontos têm a mesma cota (que é 3, neste caso) – é uma **recta horizontal (de nível)**. Esta recta é paralela ao Plano Horizontal de projecção e oblíqua ao Plano Frontal de Projecção. A recta atravessa o 1º e o 2º Diedros. Note que, como a recta não intersecta o Plano Horizontal de Projecção, não há nenhum ponto da recta com cota negativa, pelo que não há parte nenhuma da recta que se situe nos 3º e 4º Diedros.

**214.**

Em primeiro lugar, desenharam-se as projecções da recta **f**. Em seguida, determinaram-se os seus pontos notáveis. **I** é o traço de **f** no $\beta_{2/4}$ – tem projecções coincidentes. **Q** é o traço de **f** no $\beta_{1/3}$ – tem projecções simétricas em relação ao eixo **X** (note que, como todos os pontos desta recta têm 3 cm de afastamento, **Q** é o ponto de **f** que tem também 3 cm de cota, pois pontos do $\beta_{1/3}$ têm coordenadas iguais). **H** é o traço horizontal de **f** – é o ponto de **f** com cota nula. Esta recta não tem traço frontal – note que a recta não intersecta o Plano Frontal de Projecção, pois não há nenhum ponto da recta que tenha afastamento nulo. A característica fundamental desta recta é que todos os seus pontos têm o mesmo afastamento (que é 2, neste caso) – trata-se de uma **recta frontal (de frente)**. A recta é paralela ao Plano Frontal de projecção e oblíqua ao Plano Horizontal de projecção. A recta atravessa o 1º e o 4º Diedros (bem como todos os Octantes contidos nestes Diedros). Note que, como a recta não intersecta o Plano Frontal de Projecção, não há nenhum ponto da recta com afastamento negativo, pelo que não há parte nenhuma da recta que se situe nos 2º e 3º Diedros.

215.

- a) Ver relatório do exercício 163. Os pontos **A** e **B** têm a mesma cota, pelo que se tem **A** (4; 2) e **B** (-1; 2). **A** → 1ª D., 1ª Oct.; **B** → 2ª D., 3ª Oct.
- b) A projecção horizontal da recta passa por **A**₁ e por **B**₁ - **r**₁ é uma recta perpendicular ao eixo **X**. A projecção frontal da recta é um único ponto, pois a projecção frontal de uma recta é o lugar geométrico das projecções frontais de todos os seus pontos, e as projecções frontais de todos os pontos desta recta estão coincidentes num único ponto - o ponto no qual se projecta a própria recta. Note que, neste caso, em que a projecção frontal da recta é um único ponto, tal se deve assinalar **necessariamente** entre parêntesis - (**r**₂). Trata-se de uma **recta de topo** (ou **recta projectante frontal**). Para determinar os pontos notáveis da recta, teve-se em conta que as projecções frontais de todos os pontos da recta estão coincidentes num único ponto - o ponto de intersecção da recta com o Plano Frontal de Projectação (o seu traço frontal). **I** tem as suas projecções coincidentes, pelo que a determinação das suas projecções é imediata, a partir de **I**₂. **Q** tem as suas projecções simétricas em relação ao eixo **X**, pelo que **Q**₁ está para baixo do eixo **X** (note que o ponto **Q** tem coordenadas iguais). **F** tem afastamento nulo - a sua projecção horizontal está no eixo **X**. Note que as projecções horizontais de todos estes pontos estão sobre **r**₁. Esta recta não tem traço horizontal, pois nenhum dos seus pontos tem cota nula - é paralela ao Plano Horizontal de Projectação e ortogonal ao Plano Frontal de Projectação. Esta recta é um caso particular das rectas horizontais (de nível) - é uma recta horizontal (de nível) que é ortogonal ao Plano Frontal de Projectação). A recta atravessa o 1ª e o 2ª Diedros.
- c) A parte invisível da recta é aquela que se situa no 2ª Diedro - é a parte da recta cujos pontos têm afastamento negativo. Note que o traço frontal da recta, que é o ponto da recta que tem afastamento nulo, é o ponto que separa a parte visível da recta da que é invisível. Note, ainda, que só há lugar à representação de invisibilidades na projecção horizontal (que é uma recta) e **nunca** na projecção frontal, que é um único ponto.
- 

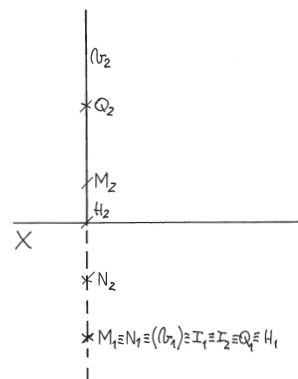


216.

Uma **recta de topo** e uma **recta horizontal (de nível)** são, ambas, rectas paralelas ao Plano Horizontal de Projecção. A **recta de topo** é, assim, um caso particular das **rectas horizontais (de nível)** – é uma **recta horizontal (de nível)** que é ortogonal ao Plano Frontal de Projecção.

217

Os dois pontos têm o mesmo afastamento e, uma vez que os dois pontos se situam em *Diedros* distintos (**M** situa-se no 1.^a *Diedro*), as coordenadas de **N** são (3; -1,5). A projecção frontal da recta passa por **M**₂ e por **N**₂ – **v**₂ é uma recta perpendicular ao eixo **X**. A projecção horizontal da recta é um único ponto, pois a projecção horizontal de uma recta é o lugar geométrico das projecções horizontais de todos os seus pontos, e as projecções horizontais de todos os pontos desta recta estão coincidentes num único ponto – o ponto no qual se projecta a própria recta. Note que, neste caso, em que a projecção horizontal da recta é um único ponto, tal se deve assinalar **necessariamente** entre parêntesis – (**v**₁). Trata-se de uma **recta vertical** (ou **recta projectante horizontal**). Para determinar os pontos notáveis da recta, teve-se em conta que as projecções horizontais de todos os pontos da recta estão coincidentes num único ponto – o ponto de intersecção da recta com o Plano Horizontal de Projecção (o seu traço horizontal). **I** tem as suas projecções coincidentes, pelo que a determinação das suas projecções é imediata, a partir de **I**₁. **Q** tem as suas projecções simétricas em relação ao eixo **X**, pelo que **Q**₂ está para cima do eixo **X** (note que o ponto **Q** tem coordenadas iguais). **H** tem cota nula – a sua projecção frontal está no eixo **X**. Note que as projecções frontais de todos estes pontos estão sobre **v**₂. Esta recta não tem traço frontal, pois nenhum dos seus pontos tem afastamento nulo – é paralela ao Plano Frontal de Projecção e ortogonal ao Plano Horizontal de Projecção. Esta recta é um caso particular das rectas frontais (de frente) – é uma recta frontal (de frente) que é ortogonal ao Plano Horizontal de Projecção). A recta atravessa o 1.^a e o 4.^a *Diedros*. A parte invisível da recta é aquela que se situa no 4.^a *Diedro* – é a parte da recta cujos pontos têm cota negativa. Note que o traço horizontal da recta, que é o ponto da recta que tem cota nula, é o ponto que separa a parte visível da recta da que é invisível. Note, ainda, que só há lugar à representação de invisibilidades na projecção frontal (que é uma recta) e **nunca** na projecção horizontal, que é um único ponto.

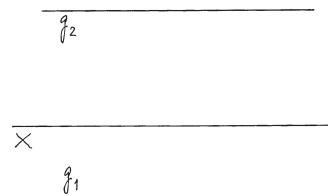


218.

Uma **recta vertical** e uma **recta frontal (de frente)** são, ambas, rectas paralelas ao Plano Frontal de Projecção. A **recta vertical** é, assim, um caso particular das **rectas frontais (de frente)** – é uma **recta frontal (de frente)** que é ortogonal ao Plano Horizontal de Projecção.

219

As projecções da recta **g** são, ambas, paralelas ao eixo **X**. Trata-se de uma **recta fronto-horizontal** – é, simultaneamente, um caso particular das rectas horizontais (de nível) e um caso particular das rectas frontais (de frente). A característica fundamental desta recta é que todos os seus pontos têm a mesma cota e o mesmo afastamento. A recta é paralela a ambos os planos de projecção. Não admite a existência de pontos notáveis, pois a recta é paralela a ambos os planos de projecção (não intersecta nenhum dos planos de projecção, pelo que não tem traço horizontal nem traço frontal) e paralela aos dois planos bissectores (não intersecta nenhum dos dois planos bissectores, pelo que não tem traço no $\beta_{1/3}$ nem traço no $\beta_{2/4}$). Toda a recta se situa no 1^{a} Diedro, pois todos os seus pontos se situam no espaço do 1^{a} Diedro.

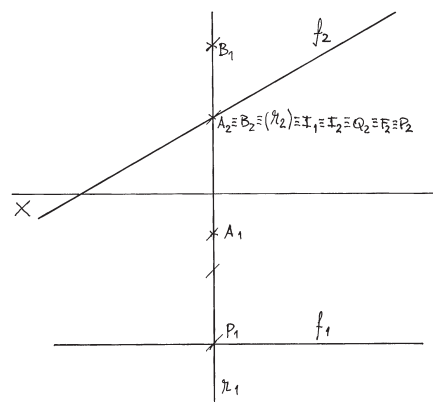


220.

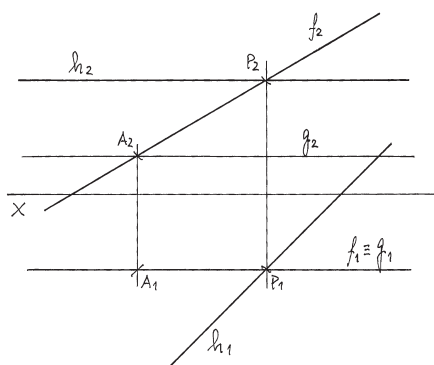
Uma **recta fronto-horizontal** e uma **recta horizontal (de nível)** são, ambas, rectas paralelas ao Plano Horizontal de Projectão. A **recta fronto-horizontal** é, assim, um caso particular das **rectas horizontais (de nível)** – é uma **recta horizontal (de nível)** que é paralela ao Plano Frontal de Projectão. Por outro lado, uma **recta fronto-horizontal** e uma **recta frontal (de frente)** são, ambas, rectas paralelas ao Plano Frontal de Projectão. A **recta fronto-horizontal** é, assim, também um caso particular das **rectas frontais (de frente)** – é uma **recta frontal (de frente)** que é paralela ao Plano Horizontal de Projectão. Uma **recta fronto-horizontal** é simultaneamente um caso particular das **rectas frontais (de frente)** e um caso particular das **rectas horizontais (de nível)**.

221.

- a) Os dois pontos têm a mesma cota (ver relatório do exercício 163), pelo que se tem **A** (1; 2) e **B** (-4; 2). **A** → 1^{a} D., 2^{a} Oct.; **B** → 2^{a} D., 4^{a} Oct.
 b) Ver relatório do exercício 215.
 c) Em primeiro lugar, determinaram-se as projecções do ponto **P**, o ponto de concorrência das duas rectas. O ponto **P** pertencente à recta, pelo que a determinação de **P**₂ é imediata (as projecções frontais de todos os pontos da recta estão coincidentes num único ponto, que é a projecção frontal da recta). O ponto **P** tem 5 cm de afastamento, o que nos permitiu determinar **P**₁. Em seguida, pelas projecções de **P** conduziram-se as projecções homónimas da recta **f**, de acordo com os dados. A recta **f** é uma recta frontal (de frente), pelo que todos os seus pontos têm o mesmo afastamento – a sua projecção horizontal é paralela ao eixo **X**. Por outro lado, o ângulo que a recta **f** faz com o Plano Horizontal de Projectão projecta-se no Plano Frontal de Projectão, no ângulo que **f**₂ faz com o eixo **X**.



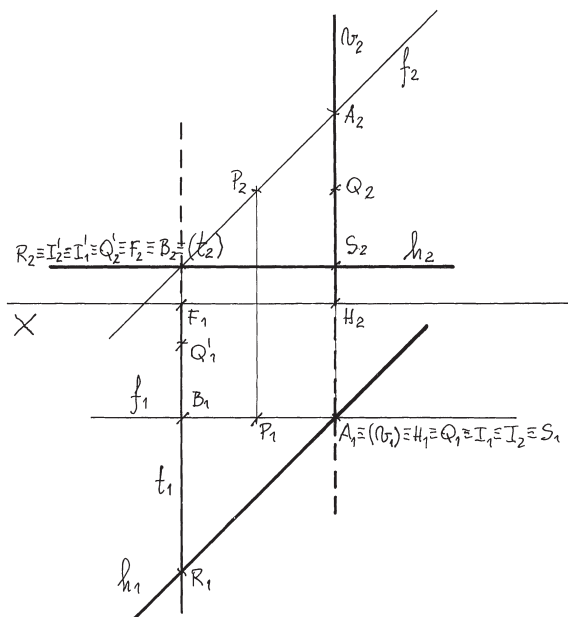
222.



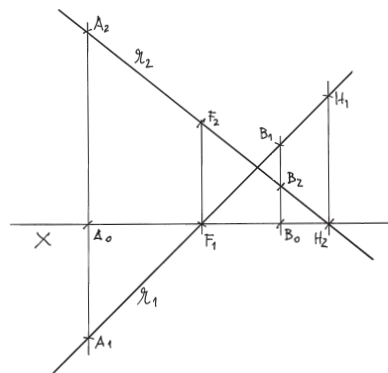
- a) Desenharam-se as projecções da recta **h**, em função dos dados – **h**₂ é paralela ao eixo **X** e o ângulo que a recta faz com o Plano Frontal de Projectão projecta-se no Plano Horizontal de Projectão, no ângulo que **h**₁ faz com o eixo **X**. Em seguida, desenhou-se **f**₁, paralela ao eixo **X**, e determinou-se o ponto de concorrência das duas rectas – o ponto **P**. **P**₁ é o ponto de concorrência de **f**₁ com **h**₁ e **P**₂ situa-se sobre **h**₂. Passando por **P**₂ desenhou-se **f**₂, com o ângulo pedido (o ângulo que a recta faz com o Plano Horizontal de Projectão projecta-se no Plano Frontal de Projectão, no ângulo que **f**₂ faz com o eixo **X**).
- b) Determinaram-se as projecções do ponto **A** – o ponto da recta **f** que tem 1 cm de cota. Pelas projecções de **A** conduziram-se as projecções homónimas da recta **g**, paralelas ao eixo **X** – **g**₁ fica coincidente com **f**₁. As rectas **h** e **g** são **enviesadas**, pois **não são paralelas** (as suas projecções homónimas não são paralelas) **nem concorrentes** (não existe nenhum ponto comum às duas rectas).

223.

- a) Desenharam-se as projecções da recta f , em função dos dados (ver alínea c) do relatório do exercício 221). Em seguida, determinaram-se as projecções do ponto A , pertencente à recta f e com 5 cm de cota. Por A conduziu-se a recta v , vertical. Sobre a determinação dos pontos notáveis da recta v e a representação das suas invisibilidades, ver exercício 217.
- b) Em primeiro lugar, determinaram-se as projecções do ponto B , pertencente à recta f e com 1 cm de cota. Em seguida, por B conduziu-se a recta t , de topo. Sobre a determinação dos pontos notáveis da recta t e a representação das suas invisibilidades, ver exercício 215.
- c) Em primeiro lugar, determinaram-se R_2 (a projecção frontal do ponto R , que é o ponto de concorrência da recta h com a recta t) e S_1 (a projecção horizontal do ponto S , que é o ponto de concorrência da recta h com a recta v). Note que, de forma imediata, não é possível determinar R_1 e S_2 . Em seguida desenhou-se a projecção frontal da recta h , passando por R_2 – a partir de h_2 já foi possível determinar S_2 . Por S_1 conduziu-se h_1 , com o ângulo pretendido (ver alínea a) do relatório do exercício anterior). A partir de h_1 foi possível determinar R_1 .



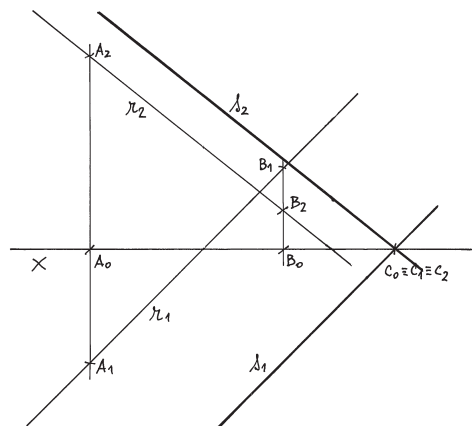
224.



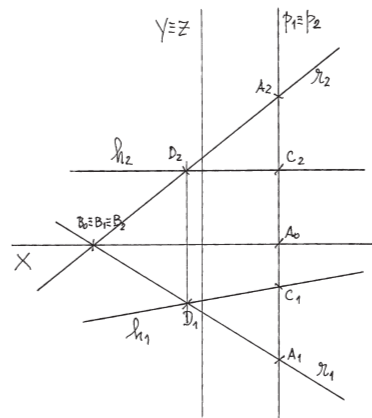
Desenharam-se as projecções da recta, em função dos dados. A recta é oblíqua a ambos os planos de projecção – é uma **recta oblíqua**. Determinaram-se os traços de r nos planos de projecção – F é o ponto de r com afastamento nulo e H é o ponto de r com cota nula.

225.

O ponto C é um ponto com cota e afastamento nulos. Desenharam-se as projecções da recta s , paralelas às projecções homónimas da recta r e passando por C . A recta s é uma **recta oblíqua passante**. A recta é **oblíqua**, pois é oblíqua a ambos os planos de projecção, e é **passante**, pois é concorrente com o eixo X .

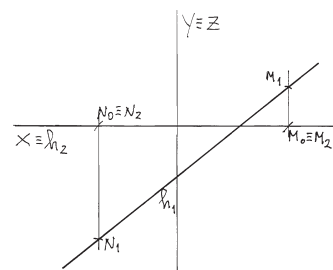


b) Desenhou-se h_2 , 2 cm acima do eixo X . Todos os pontos da recta h têm a mesma cota, que é 2 cm. O ponto C é o ponto da recta p com 2 cm de cota, pelo que C é o ponto de concorrência das rectas h e p . Em seguida, determinou-se D_2 , o ponto de concorrência de h_2 com r_2 - D_1 situa-se sobre r_1 e h_1 fica definida por C_1 e D_1 .



- a) Desenharam-se as projecções da recta m , em função dos dados.
- b) É possível desenhar as projecções da recta p em função da sua abcissa – todos os seus pontos têm a mesma abcissa, que é -2 . No entanto, para definir p são necessários dois dos seus pontos, para além das suas projecções (a recta de perfil é a única situação em que as projecções da recta não são suficientes para a definir, uma vez que estas não verificam o Critério de Reversibilidade). Os pontos da recta p que é possível determinar são o ponto A , o ponto de concorrência da recta p com o eixo X (p é uma recta passante) e o ponto B , o ponto de concorrência de p com r . A recta p está, assim, definida por dois pontos – os pontos A e B .

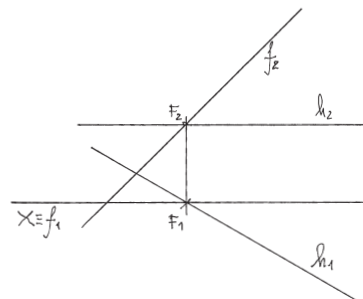
Desenharam-se as projecções da recta, em função dos dados. A projecção frontal da recta está no eixo **X**. Trata-se de uma **recta horizontal (de nível)** com cota nula – a sua projecção frontal está sobre o eixo **X** e a sua projecção horizontal é a própria recta. Esta recta está contida no Plano Horizontal de Projectão e é oblíqua ao Plano Frontal de Projectão.



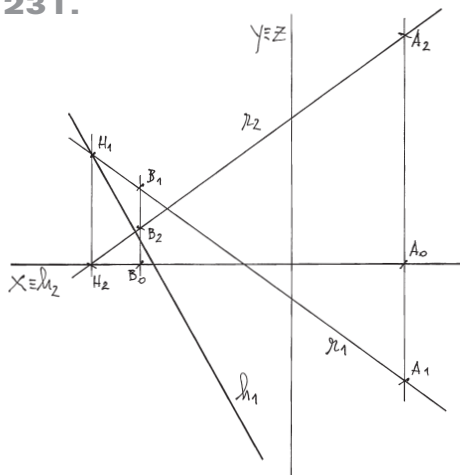
Desenharam-se as projecções da recta, em função dos dados. A projecção horizontal da recta está no eixo **X**. Trata-se de uma **recta frontal (de frente)** com afastamento nulo – a sua projecção horizontal está sobre o eixo **X** e a sua projecção frontal é a própria recta. Esta recta está contida no Plano Frontal de Projecção e é oblíqua ao Plano Horizontal de Projecção.

230.

Desenharam-se as projecções da recta h , em função dos dados (ver relatório do exercício 222). A recta f está contida no Plano Frontal de Projecção, pelo que tem 0 de afastamento. O ponto de concorrência das duas rectas é, assim, um ponto com afastamento nulo – é o traço frontal de h . Determinou-se F , o traço frontal de h , e pelas projecções de F conduziram-se as projecções homónimas da recta f (f_2 faz um ângulo de 45° com o eixo X , de abertura para a direita). O ponto de concorrência das duas rectas é o **traço frontal de h** .



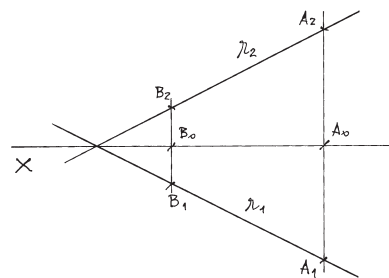
231.



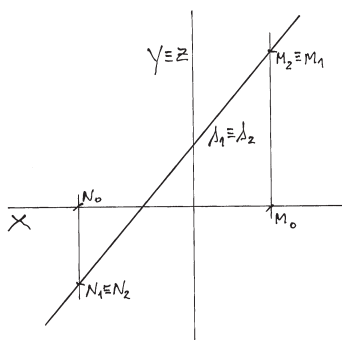
Desenharam-se as projecções da recta r , em função dos dados. A recta h tem cota nula, pelo que o ponto de concorrência das duas rectas é o traço horizontal de r – o ponto de r que tem cota nula. Determinou-se H , o traço horizontal de r , e pelas projecções de H conduziram-se as projecções homónimas da recta h (h_1 faz um ângulo de 60° com o eixo X , de abertura para a direita). A recta h situa-se no Plano Horizontal de Projecção. O ponto de concorrência das duas rectas é o **traço horizontal de r** .

232.

Pontos do $\beta_{1/3}$ têm coordenadas iguais, pelo que $A(3; 3)$ e $B(1; 1)$. Desenharam-se as projecções da recta r , passando pelas projecções homónimas de A e B . Conclui-se que rectas do $\beta_{1/3}$ têm as suas projecções simétricas em relação ao eixo X , tal como os pontos do $\beta_{1/3}$.



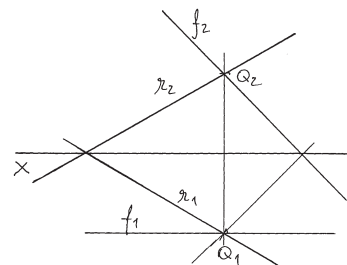
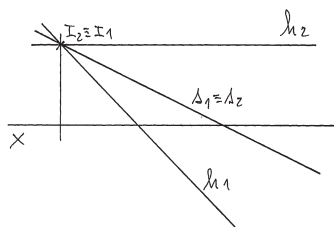
233.



Pontos do $\beta_{2/4}$ têm coordenadas simétricas, pelo que $M(-2; -4; 4)$, $N(3; 2; -2)$. Desenharam-se as projecções da recta s , passando pelas projecções homónimas de M e N . Conclui-se que rectas do $\beta_{2/4}$ têm as suas projecções coincidentes, tal como os pontos do $\beta_{2/4}$.

234.

Desenharam-se as projecções da recta **f**, de acordo com os dados (ver alínea **c**) do exercício **221**). A recta **r** é uma recta do $\beta_{1/3}$, pelo que todos os seus pontos pertencem ao $\beta_{1/3}$ – o ponto de concorrência das duas rectas tem de ser um ponto do $\beta_{1/3}$. Determinou-se **Q**, o traço de **f** no $\beta_{1/3}$ (ver relatório do exercício **214**). Pelas projecções de **Q** conduziram-se as projecções homónimas da recta **r**, de acordo com os dados – as projecções de **r** são simétricas em relação ao eixo **X**. O ponto de concorrência das duas rectas é o **traço no $\beta_{1/3}$ da recta f**.

**235.**

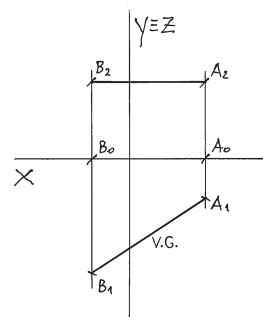
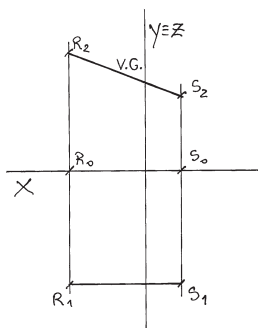
Desenharam-se as projecções da recta **h**, de acordo com os dados (ver alínea **a**) do exercício **222**). A recta **s** é uma recta do $\beta_{2/4}$, pelo que todos os seus pontos pertencem ao $\beta_{2/4}$ – o ponto de concorrência das duas rectas tem de ser um ponto do $\beta_{2/4}$. Determinou-se **I**, o traço de **h** no $\beta_{2/4}$, que tem projecções coincidentes. Pelas projecções de **I** conduziram-se as projecções homónimas da recta **s**, de acordo com os dados – as projecções de **s** têm de ser coincidentes. O ponto de concorrência das duas rectas é o **traço no $\beta_{2/4}$ da recta h**.

236.

Por **Verdadeira Grandeza** de um segmento de recta entende-se o **comprimento real** do segmento, **no espaço**.

237.

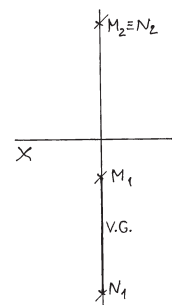
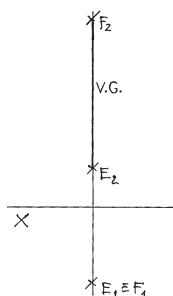
A Verdadeira Grandeza (V.G.) do segmento pode medir-se na sua **projectão horizontal**, pois o segmento de recta é paralelo ao Plano Horizontal de Projectão – a sua projecção horizontal não apresenta qualquer deformação, em relação ao próprio segmento, ao contrário da projecção frontal, que está deformada (reduzida).

**238.**

A Verdadeira Grandeza (V.G.) do segmento pode medir-se na sua **projectão frontal**, pois o segmento de recta é paralelo ao Plano Frontal de Projectão – a sua projecção frontal não apresenta qualquer deformação, em relação ao próprio segmento, ao contrário da projecção horizontal, que está deformada (reduzida).

239.

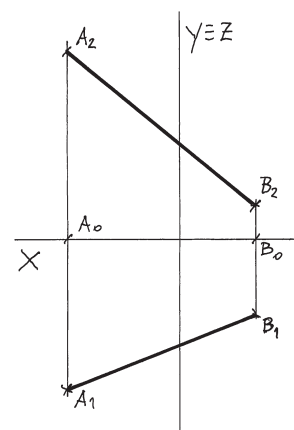
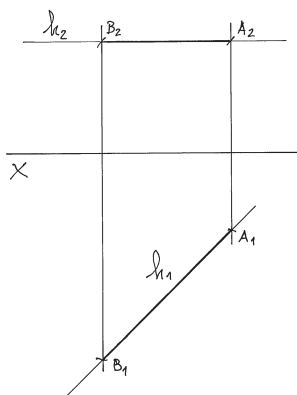
Uma recta de topo é um caso particular das rectas horizontais (de nível), pois são, ambas, paralelas ao Plano Horizontal de Projecção. Assim, a V.G. do segmento pode medir-se na sua projecção horizontal (ver relatório do exercício 237). Note que a projecção frontal do segmento (que é um único ponto) apresenta a deformação máxima – está reduzida a um ponto.

**240.**

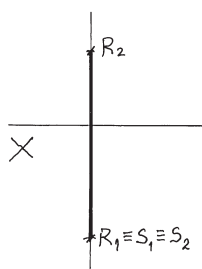
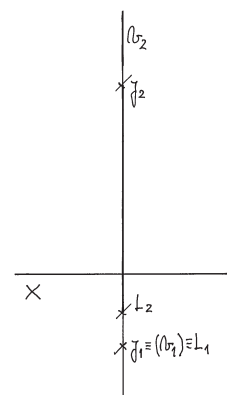
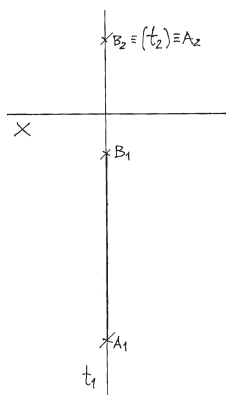
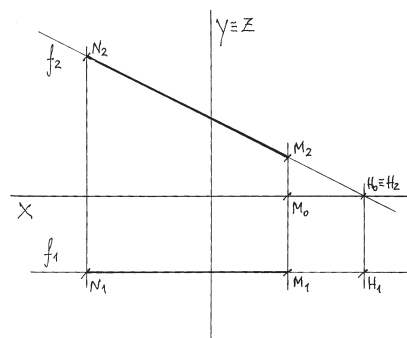
Uma recta vertical é um caso particular das rectas frontais (de frente), pois são, ambas, paralelas ao Plano Frontal de Projecção. Assim, a V.G. do segmento pode medir-se na sua projecção frontal (ver relatório do exercício 238). Note que a projecção horizontal do segmento (que é um único ponto) apresenta a deformação máxima – está reduzida a um ponto.

241.

Desenharam-se as projecções do segmento, em função dos dados. O segmento é oblíquo a ambos os planos de projecção, pelo que as suas duas projecções apresentam deformação – ambas estão reduzidas, em relação à Verdadeira Grandeza do segmento de recta. Assim, nesta situação, não é possível medir a V.G. do segmento de recta em nenhuma das suas projecções.

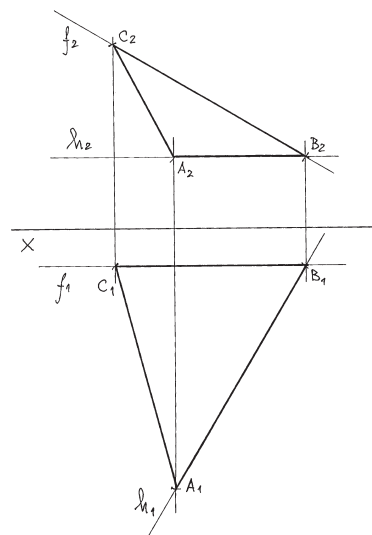
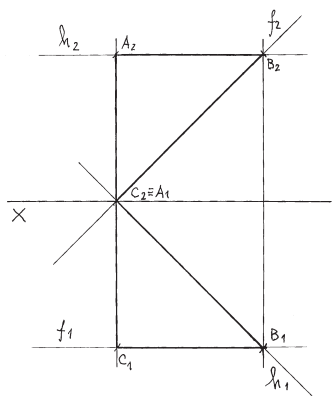
**242.**

Representaram-se as projecções do ponto **A** e da recta **h** (**h** é a recta suporte do segmento **[AB]**), em função dos dados – o ângulo que a recta **h** faz com o Plano Frontal de Projecção projecta-se no Plano Horizontal de Projecção, no ângulo que **h₁** faz com o eixo **X**. O segmento é horizontal (de nível), pelo que a sua V.G. (a V.G. de **AB**) pode medir-se na projecção horizontal do segmento. Assim, sobre **h₁** e a partir de **A₁**, mediram-se os 5 cm (tendo em conta que **B** é um ponto do 1.^o Diedro, pois **[AB]** situa-se no 1.^o Diedro), obtendo-se **B₁**, a projecção horizontal de **B**. A partir de **B₁**, determinou-se **B₂** sobre **h₂** e representaram-se as projecções do segmento.



247.

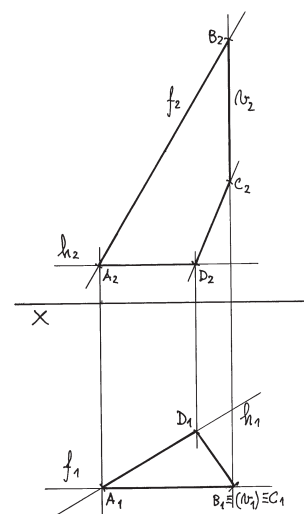
Na resolução deste exercício, teve-se em consideração que cada um dos lados de um triângulo é um segmento de recta. Assim, em primeiro lugar representaram-se as projecções do ponto **A** e da recta **h**, a recta suporte do lado **[AB]** do triângulo. A V.G. de **A B** mediu-se sobre h_1 (ver relatório do exercício 242), tendo em conta que o afastamento de **B** é inferior ao de **A**. A partir das projecções de **B**, desenharam-se as projecções da recta **f**, a recta suporte do lado **[BC]** do triângulo. Sobre f_2 mediu-se a V.G. de **B C** (ver relatório do exercício 243), obtendo as projecções de **C**. Note que se atendeu a que **C** se situa no 1º Diedro. A partir das projecções dos três vértices do triângulo, desenharam-se as projecções do polígono.

**248.**

Em primeiro lugar, desenharam-se as projecções da recta **AB** (a recta **h**), em função dos dados. A recta **h** é a recta suporte do lado **[AB]**. O vértice **A** situa-se no Plano Frontal de Projecção (φ_0), pelo que é o traço frontal de **h**. Por outro lado, o vértice **B** é o traço da recta **h** no $\beta_{1/3}$. Determinaram-se os pontos **A** e **B**. A recta **BC** é a recta **f** e é a recta suporte do lado **[BC]**. O vértice **C** situa-se no Plano Horizontal de Projecção (ν_0), pelo que **C** é o traço horizontal da recta **f**. Determinou-se o ponto **C**. A partir das projecções dos três vértices do triângulo, desenharam-se as projecções dos segmentos de recta que são os lados do triângulo (**[AB]**, **[BC]** e **[AC]**), obtendo as projecções do polígono.

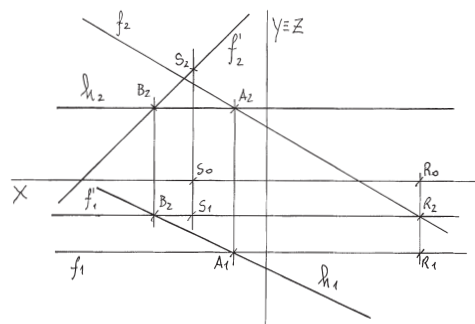
249.

Uma figura empenada é uma figura que não é plana – não está contida em nenhum plano. Em primeiro lugar, representaram-se as projecções do ponto **A** e da recta **f**, frontal (de frente), que é a recta suporte do segmento **[AB]**. A partir de A_2 , sobre f_2 , mediu-se **A B**, em V.G., obtendo as projecções de **B** (ver exercício 243). Em seguida, desenharam-se as projecções da recta **h**, horizontal (de nível), que é a recta suporte do segmento **[AD]**. A partir de A_1 , sobre h_1 , mediu-se **A D**, em V.G., obtendo as projecções de **D** (**D** está mais próximo do Plano Frontal de Projecção do que **A**) – ver relatório do exercício 242. Por fim, representou-se a recta **v**, vertical, que é a recta suporte do segmento **[BC]**. Sobre v_2 , em V.G., mediu-se **B C** a partir de B_2 e para baixo (**C** está abaixo de **B**), obtendo as projecções de **C** (ver relatório do exercício 245). A partir das projecções dos quatro pontos (os quatro vértices da figura), desenharam-se as projecções da figura.

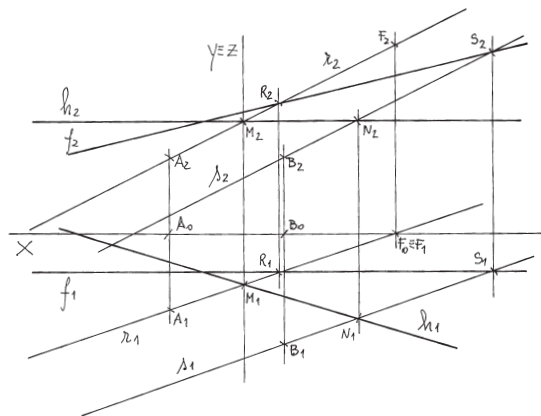


250.

- a) Em primeiro lugar, desenharam-se as projecções das rectas f e f' . As rectas f e f' são paralelas ao Plano Frontal de Projecção (φ_0) – as suas projecções horizontais são paralelas ao eixo X e os ângulos que fazem com o Plano Horizontal de Projecção (v_0) projectam-se em V.G. no Plano Frontal de Projecção (φ_0). As rectas f e f' não são paralelas (as suas projecções homónimas não são paralelas entre si) nem concorrentes (não há nenhum ponto comum às duas rectas), pelo que são **enviesadas**.
- b) Em primeiro lugar, representou-se a projecção frontal da recta h – h_2 é paralela ao eixo X e situa-se 2 cm acima deste. Em seguida, e atendendo a que a recta h é concorrente com as rectas f e f' , determinaram-se, em projecção frontal, os pontos de concorrência (ver relatório do exercício 211). Os pontos A e B são os pontos de concorrência de h com f e f' , respectivamente – h_1 fica definida por A_1 e B_1 .



251.

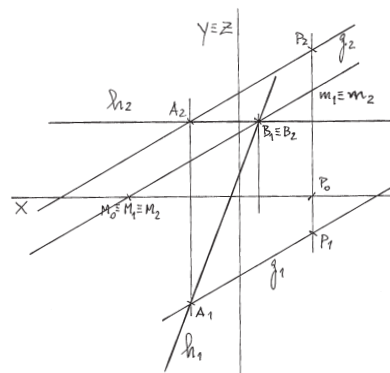


- a) Em primeiro lugar, desenharam-se as projecções das rectas r e s , de acordo com os dados. A recta h é paralela ao Plano Horizontal de Projecção (v_0) e tem 3 cm de cota, pelo que h_2 é paralela ao eixo X e situa-se 3 cm acima deste. Os pontos M e N são os pontos de concorrência de h com r e s , respectivamente (ver relatório do exercício 211) – h_1 está definida por M_1 e N_1 .

- b) A recta f é paralela ao Plano Frontal de Projecção (φ_0) e tem 1 cm de afastamento, pelo que f_1 é paralela ao eixo X e situa-se 1 cm abaixo deste. Os pontos R e S são os pontos de concorrência de f com r e s , respectivamente (ver relatório do exercício 207) – f_2 está definida por R_2 e S_2 . As rectas f e h são necessariamente **concorrentes** – note que, apesar de não se ter representado o ponto de concorrência na resolução apresentada, ele existe efectivamente. Sugere-se que o estudante identifique esse ponto na sua resolução.

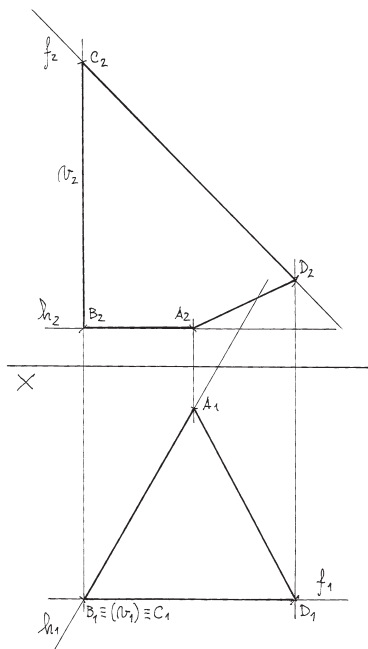
252.

- a) Representaram-se, pelas suas projecções, o ponto M e a recta m , que tem as suas projecções coincidentes (m é uma recta do $\beta_{2/4}$).
- b) Representaram-se as projecções do ponto P , pelas quais se conduziram as projecções homónimas da recta g , paralelas às projecções homónimas da recta m , pois as duas rectas são paralelas.
- c) Desenharam-se h_2 e determinaram-se os pontos de concorrência de h com m e g , respectivamente os pontos A e B (ver relatório do exercício 211) – h_1 está definida por A_1 e por B_1 . Note que B é um ponto do $\beta_{2/4}$, pois todos os pontos de m estão contidos no $\beta_{2/4}$ (B é o traço da recta h no $\beta_{2/4}$).

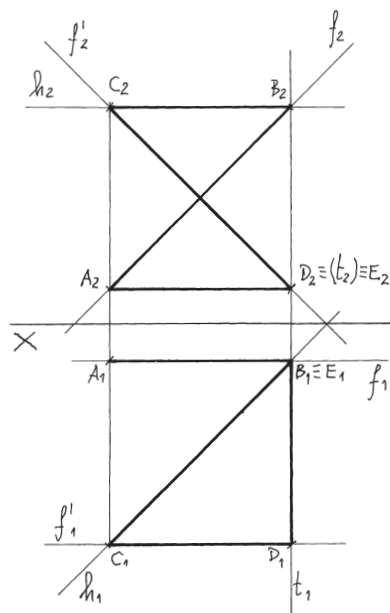


253.

Sugere-se a leitura do relatório do exercício 249. Em primeiro lugar, representaram-se as projecções de **A** e de **h**, a recta suporte de **[AB]**. Sobre h_1 , a partir de A_1 , mediu-se **AB** em V.G., obtendo as projecções de **B** (que tem de ser um ponto do 1.^a Diedro). Por **B** conduziu-se a recta **v**, vertical, que é a recta suporte de **[BC]** – sobre v_2 , a partir de B_2 e em V.G., mediu-se **BC**, obtendo as projecções de **C**. Note que **C** tem de ter cota superior a **B**, pois **[BC]** tem de se situar no 1.^a Diedro. Por **C** conduziu-se **f**, a recta suporte de **[CD]** – sobre f_2 , em V.G. e a partir de C_2 , mediu-se **CD**, obtendo-se as projecções de **D**, com cota inferior à de **C**. A partir das projecções dos quatro pontos, desenharam-se as projecções dos quatro lados da figura.



254.



Em primeiro lugar, desenharam-se as projecções do ponto **A** (que tem projecções simétricas em relação ao eixo **X**) e da recta **f**, a recta frontal que é a recta suporte de **[AB]**, em função dos dados. Em seguida, uma vez que o segmento **[AB]** é paralelo ao Plano Frontal de Projecção, mediu-se a sua V.G. sobre f_2 , a partir de A_2 , obtendo-se B_2 (note que se garantiu que **B** se situa no 1.^a Diedro) – B_1 situa-se sobre f_1 . Pelas projecções de **B** conduziram-se as projecções homónimas da recta **h**, a recta suporte do segmento **[BC]**. Em seguida, uma vez que o segmento **[BC]** é paralelo ao Plano Horizontal de Projecção, mediu-se a sua V.G. sobre h_1 , a partir de B_1 , obtendo-se C_1 (garantiu-se que **C** se situa no 1.^a Diedro) – C_2 situa-se sobre h_2 . Pelas projecções de **C** conduziram-se as projecções homónimas da recta f' , a recta suporte do segmento **[CD]**. Atendendo a que o segmento **[CD]** é paralelo ao Plano Frontal de Projecção, mediu-se a sua V.G. sobre f'_2 , a partir de C_2 , obtendo-se D_2 (garantiu-se que **D** tem cota inferior a **C**) – D_1 situa-se sobre f'_1 . Em seguida, representou-se a recta **t**, de topo, que é a recta suporte do lado **[DE]** da figura, o que nos permitiu determinar imediatamente E_2 (**D** e **E** têm as suas projecções frontais coincidentes). Por outro lado, uma vez que **B** e **E** se situam na mesma recta projectante horizontal, as suas projecções horizontais estão coincidentes, o que nos permitiu determinar E_1 . A partir das projecções dos cinco vértices da figura, desenharam-se as suas projecções, atendendo às **duas projecções** de cada um dos **cinco lados** da figura – os lados **[AB]**, **[BC]**, **[CD]**, **[DE]** e **[AE]**.

5

REPRESENTAÇÃO DO PLANO

255.

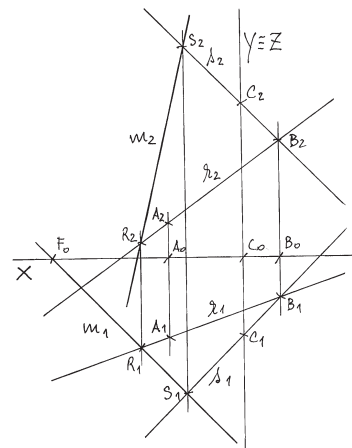
Os quatro pontos podem definir exactamente quatro planos: o próprio plano **ABC** e, para além deste, o plano **ABD**, o plano **ACD** e o plano **BCD**.

256.

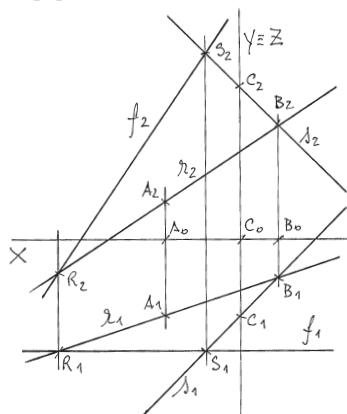
Os três pontos e a recta podem definir exactamente quatro planos: o próprio plano **ABC** e os três planos que contêm a recta **r** e cada um dos três pontos. Note que, caso dois dos pontos **A**, **B** e **C** estejam numa recta paralela à recta **r**, existirá menos um plano (poderia haver apenas três planos).

257.

Desenharam-se as projecções das rectas **r** e **s**, as rectas que definem o plano, em função dos dados. Os dados do exercício permitiram-nos desenhar **m₁**. Para definir a recta **m** necessitamos de dois pontos ou de um ponto e uma direcção. As rectas **m** e **r** são complanares, pelo que ou são paralelas ou são concorrentes. Não são paralelas, pois **m₁** não é paralela a **r₁**, logo são concorrentes, pelo que existe um ponto de concorrência – o ponto **R**, que se determinou a partir da sua projecção horizontal. Já temos um ponto para definir a recta. As rectas **m** e **s** são complanares, pelo que ou são paralelas ou são concorrentes. Não são paralelas, pois **m₁** não é paralela a **s₁**, logo são concorrentes, pelo que existe um ponto de concorrência – o ponto **S**, que se determinou a partir da sua projecção horizontal. Já temos outro ponto para definir a recta. A partir dos dois pontos, desenhou-se a projecção frontal da recta **m** – a recta **m** está definida por dois pontos.



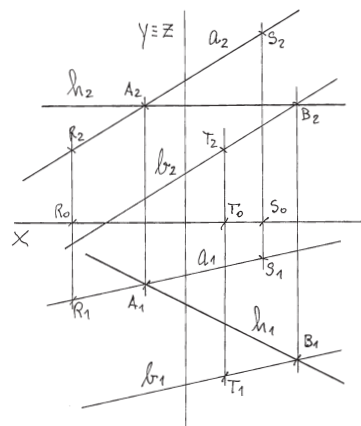
258.



Desenhou-se **f₁**, 3 cm abaixo do eixo **X**. Sobre a determinação da recta **f**, ver relatório do exercício anterior. A partir da posição de **f₁** conclui-se que **f** não é paralela nem a **r** nem a **s**. Como **f** é complanar com **r** e **s**, e não paralela a nenhuma destas, terá de ser concorrente com ambas. Determinaram-se os pontos **R** e **S**, respectivamente os pontos de concorrência de **f** com **r** e **s** – **f₂** fica definida por **R₂** e **S₂**. A recta **f** está definida por dois pontos.

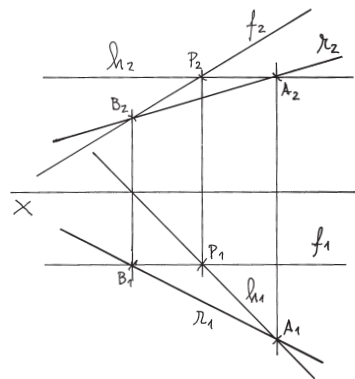
259.

Desenharam-se as projecções das rectas **a** e **b**, em função dos dados. Desenhou-se **h₂**, 3 cm acima do eixo **X**. Para definir a recta **h** necessitamos de dois pontos ou de um ponto e uma direcção. As rectas **h** e **a** são complanares, pelo que ou são paralelas ou são concorrentes. Não são paralelas, pois **h₂** não é paralela a **a₂**, logo são concorrentes, pelo que existe um ponto de concorrência – o ponto **A**, que se determinou a partir da sua projecção frontal. Já temos um ponto para definir a recta. As rectas **h** e **b** são complanares, pelo que ou são paralelas ou são concorrentes. Não são paralelas, pois **h₂** não é paralela a **b₂**, logo são concorrentes, pelo que existe um ponto de concorrência – o ponto **B**, que se determinou a partir da sua projecção horizontal. Já temos outro ponto para definir a recta. A partir dos dois pontos, desenhou-se a projecção horizontal da recta **h** – a recta **h** está definida por dois pontos.

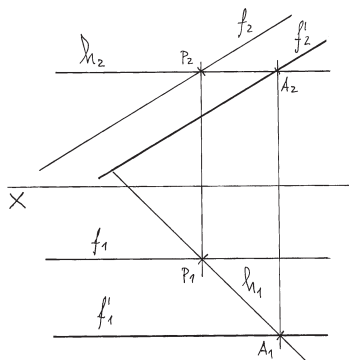


260.

- a) As rectas h e f são complanares (definem o plano θ), pelo que ou são paralelas ou são concorrentes. A recta f é paralela ao Plano Frontal de Projecção e oblíqua ao Plano Horizontal de Projecção e a recta h é paralela ao Plano Horizontal de Projecção e oblíqua ao Plano Frontal de Projecção, pelo que as duas rectas nunca poderão ser paralelas – as duas rectas são **necessariamente** concorrentes.
- b) O plano está definido pelas projecções das duas rectas. Note que, sabendo-se que as duas rectas são concorrentes, foi necessário determinar as projecções do ponto de concorrência (ponto P). Salienta-se que o ponto P tem 3 cm de cota (a cota da recta h) e 2 cm de afastamento (o afastamento da recta f).
- c) Desenhou-se r_2 , qualquer, oblíqua ao eixo X e excluindo a situação referida. Sobre a determinação da projecção horizontal da recta r , ver relatório do exercício anterior. O ponto A é o ponto de concorrência da recta r com a recta h . O ponto B é o ponto de concorrência da recta r com a recta f . A recta r foi definida por dois pontos – os pontos A e B .



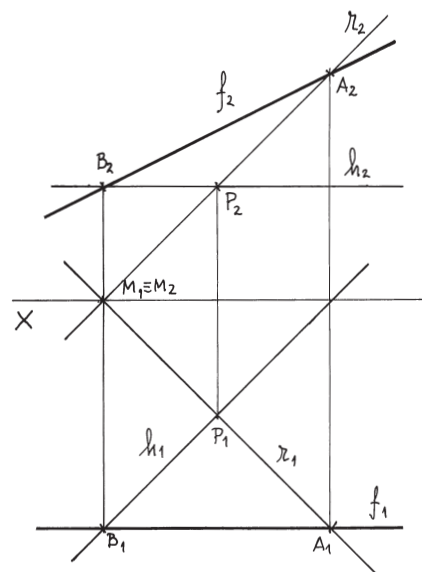
261.



Os dados do exercício permitiram-nos desenhar f'_1 . Para definir a recta f' necessitamos de dois pontos ou de um ponto e uma direcção. As rectas f' e f são complanares, pelo que ou são paralelas ou são concorrentes. Não são concorrentes, pois f'_1 não é concorrente com f_1 , logo f e f' são paralelas, pelo que já temos a direcção da recta. As rectas f' e h são complanares, pelo que ou são paralelas ou são concorrentes. Não são paralelas, pois f'_1 não é paralela a h_1 , logo são concorrentes, pelo que existe um ponto de concorrência – o ponto A , que se determinou a partir da sua projecção horizontal. Já temos um ponto para definir a recta. Já temos um ponto e uma direcção para definir a recta. Desenhou-se a projecção frontal da recta f' – a recta f' está definida por um ponto e uma direcção.

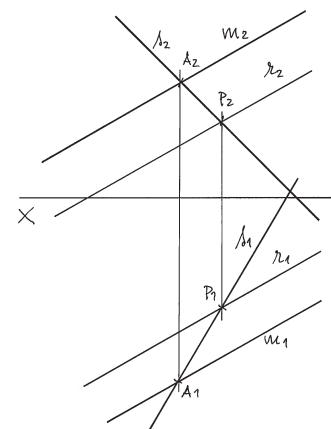
262.

- a) As duas rectas são complanares (definem o plano α), pelo que ou são paralelas ou são concorrentes. A recta r é oblíqua aos dois planos de projecção e a recta h é paralela a um deles (ao Plano Horizontal de Projecção) e oblíqua ao outro, pelo que as duas rectas nunca poderão ser paralelas – então as duas rectas são **necessariamente** concorrentes.
- b) O plano está definido pelas projecções das duas rectas. Note que as projecções da recta r são perpendiculares entre si **apenas** na folha de papel pois, no espaço, r_1 e r_2 **não são** perpendiculares.
- c) Os dados do exercício permitiram-nos desenhar f_1 . Para definir a recta f necessitamos de dois pontos ou de um ponto e uma direcção. Ver relatório do exercício 257. Os pontos A e B são, respectivamente, os pontos de concorrência da recta f com a recta r e a recta h . A recta f está definida por dois pontos – os pontos A e B .

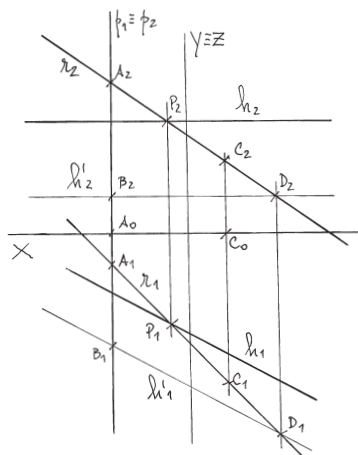


263.

Em primeiro lugar, definiu-se o plano pelas projecções das duas rectas. Em seguida, determinou-se o ponto **A**, pertencente à recta **s** e com 3 cm de cota. A recta **m** é concorrente com a recta **s** no ponto **A**, pelo que já temos um ponto para definir a recta – para definir uma recta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direcção. A recta **m** é paralela à recta **r**, pelo que já temos a direcção da recta **m** – a recta **m** fica definida por um ponto e uma direcção. Pelas projecções de **A** conduziram-se as projecções homónimas de **m**, paralelas às projecções homónimas de **r**.



264.

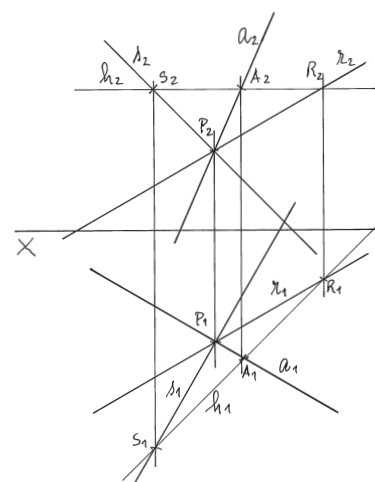


Desenharam-se as projecções das rectas **r** e **p**, que definem o plano. As projecções da recta de perfil desenharam-se imediatamente, embora a recta não verifique o Critério de Reversibilidade (ver alínea **b**) do relatório do exercício 227). Note que os pontos **A** e **B** têm necessariamente a mesma abcissa, pois pertencem à mesma recta de perfil e todos os pontos de uma recta de perfil têm a mesma abcissa. Desenhou-se **h₂**, a projecção frontal da recta **h**, em função da sua cota. Para definir a recta **h** são necessários dois pontos ou um ponto e uma direcção. As rectas **h** e **r** são complanares, pelo que ou são paralelas ou são concorrentes – não são paralelas, pois **h₂** e **r₂** não são paralelas, pelo que são concorrentes. O ponto **P** é o ponto de concorrência das rectas **h** e **r** – já temos um ponto para definir a recta **h**. Necessitamos de outro ponto ou uma direcção. A recta **h** e a recta **p** são complanares, pelo que ou são paralelas ou são concorrentes. Não são paralelas, pelo que são concorrentes, pelo que existe um ponto de concorrência – este, no entanto, não tem determinação directa, pois a recta de perfil não verifica o Critério de Reversibilidade. É necessário, então, o recurso a um outro raciocínio. Atendendo a que os dados do plano não são suficientes para definir a recta **h**, é necessário o recurso a uma recta auxiliar do plano σ , recta essa que, também ela, tem de ser definida por

dois pontos ou um ponto e uma direcção. Optou-se por determinar uma outra recta horizontal (de nível) do plano, recta essa que passe pelo ponto **B** (o único ponto da recta **p** que é conhecido, para além do ponto **A**). A recta **h'** é a recta auxiliar a que se recorreu e que é complanar com as rectas **r** e **p**. A recta **h'** está definida por dois pontos – o ponto **B** (o seu ponto de concorrência com a recta **p**) e o ponto **D** (o seu ponto de concorrência com a recta **r**). As rectas **h** e **h'** são complanares (são, ambas, rectas do plano σ), pelo que ou são paralelas ou são concorrentes – não são concorrentes, pois as suas projecções frontais são paralelas, pelo que são necessariamente paralelas. Já temos uma direcção para definir a recta **h** – a direcção da recta **h'**. A recta **h** está definida por um ponto (o ponto **P**) e uma direcção (é paralela à recta **h'**).

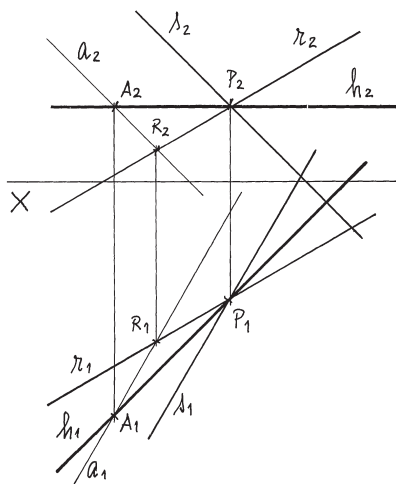
265.

Os dados do enunciado permitiram-se desenhar **a₁**, a projecção horizontal da recta **a**. Para definir a recta **a** são necessários dois pontos ou um ponto e uma direcção. A recta **a** passa pelo ponto **P**, pelo que já temos um ponto para definir a recta – falta-nos outro ponto ou uma direcção. Note que o ponto **P** é, simultaneamente, o ponto de concorrência da recta **a** com a recta **r** e o ponto de concorrência da recta **a** com a recta **s**. Assim sendo, atendendo a que os dados do plano não são suficientes para definir a recta **a** (pois só nos permitem determinar um único ponto da recta **a**), é necessário o recurso a uma recta auxiliar do plano γ , recta essa que, também ela, tem de ser definida por dois pontos ou um ponto e uma direcção. Optou-se por determinar uma recta horizontal (de nível) do plano, **h**. A recta **h** é complanar com as rectas **r** e **s** (ver relatório do exercício 259). Os pontos **R** e **S** são, respectivamente, os pontos de concorrência da recta **h** com a recta **r** e a recta **s**. A recta **h** está definida por dois pontos – os pontos **R** e **S**. A recta **a** e a recta **h** são complanares, pelo que ou são paralelas ou são concorrentes. Como não são paralelas, são concorrentes, pelo que existe um ponto de concorrência – o ponto **A**. Já temos o segundo ponto para definir a recta **h**. A recta **h** está definida por dois pontos – o ponto **P** e o ponto **A**. Note que se poderia ter recorrido a outra recta auxiliar qualquer, que não uma recta horizontal – a única condicionante seria que a recta auxiliar não passasse pelo ponto **P**, senão deparar-nos-íamos com a redundância do problema que nos coloca a recta **a**.

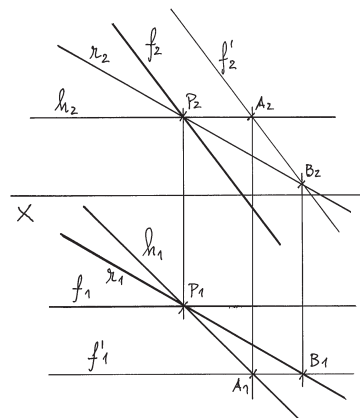


266.

Ver relatório do exercício anterior. Note que, à semelhança da situação anterior, só temos um ponto para definir a recta h – o ponto P . Assim, e atendendo a que os dados do plano não são suficientes para definir a recta h , recorreu-se a uma recta auxiliar do plano – a recta a , que está definida por um ponto (o ponto de concorrência com a recta r – ponto R) e uma direcção (é paralela à recta s). As rectas h e a são complanares, pelo que ou são paralelas ou são concorrentes – não sendo paralelas, são concorrentes, pelo que existe um ponto de concorrência (ponto A). A recta h está definida por dois pontos – o ponto P e o ponto A .

**267.**

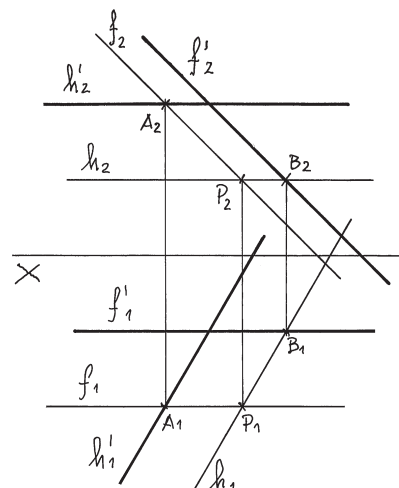
Definiu-se o plano através das projecções das duas rectas. Desenhou-se f_1 , em função dos dados. Sobre a determinação da projecção frontal da recta f , ver relatório do exercício 265. Note que, à semelhança da situação do exercício 265, só temos um ponto para definir a recta f – o ponto P . Assim, e atendendo a que os dados do plano não são suficientes para definir a recta f , recorreu-se a uma recta auxiliar do plano – a recta f' , frontal (de frente). A recta auxiliar também tem de ser definida por dois pontos ou um ponto e uma direcção. A recta f' está definida por dois pontos – o ponto A (o ponto de concorrência da recta f com a recta h) e o ponto B (o ponto de concorrência da recta f com a recta r). As rectas f e f' são complanares, pelo que ou são paralelas ou são concorrentes – não sendo concorrentes (as suas projecções horizontais são paralelas entre si), são paralelas, pelo que já temos a direcção. A recta f está definida por um ponto (o ponto P) e por uma direcção (é paralela à recta f').

**268.**

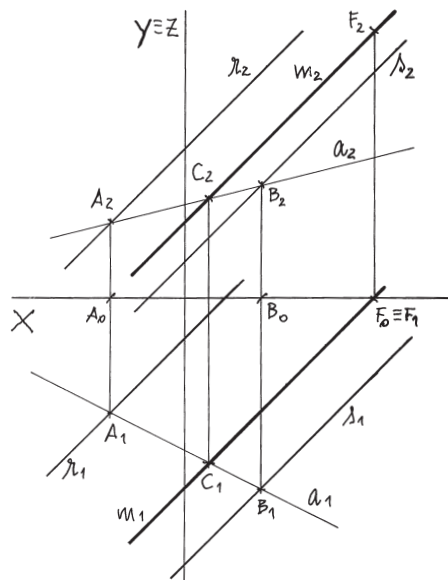
Para que uma recta pertença a um plano dado, a recta deve conter dois pontos desse plano (a recta fica definida por dois pontos) ou, então, deve conter um ponto desse plano e ser paralela a uma recta desse plano (a recta fica definida por um ponto e uma direcção).

269.

- a) O plano está definido pelas projecções das duas rectas.
- b) Desenhou-se h'_2 , 4 cm acima do eixo X . Para definir a recta h' são necessários dois pontos ou um ponto e uma direcção. As rectas h' e f são coplanares, pelo que ou são paralelas ou são concorrentes – não são paralelas, pelo que **são concorrentes**. O ponto A é o ponto de concorrência das duas rectas – já temos um ponto para definir a recta. As rectas h' e h são coplanares, pelo que ou são paralelas ou são concorrentes – não são concorrentes, pelo que **são paralelas**. Já temos a direcção da recta h' . A recta h' está definida por um ponto (ponto A) e uma direcção (a direcção da recta h).
- c) Desenhou-se f'_1 , 2 cm abaixo do eixo X . Para definir a recta f' são necessários dois pontos ou um ponto e uma direcção. As rectas f' e h são coplanares, pelo que ou são paralelas ou são concorrentes – não são paralelas, pelo que **são concorrentes**. O ponto B é o ponto de concorrência das duas rectas – já temos um ponto para definir a recta. As rectas f' e f são coplanares, pelo que ou são paralelas ou são concorrentes – não são concorrentes, pelo que **são paralelas**. Já temos a direcção da recta f' . A recta f' está definida por um ponto (ponto B) e uma direcção (a direcção da recta f).



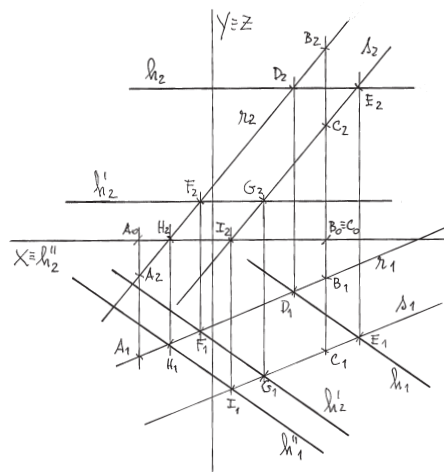
270.



- a) O plano está definido pelas projecções das duas rectas.
- b) Desenhou-se m_1 , em função dos dados do enunciado. Para definir a recta m são necessários dois pontos ou um ponto e uma direcção. A recta m é paralela às rectas r e s , pelo que já temos a direcção da recta – falta-nos um ponto. Os dados do plano não são suficientes para definir a recta m , pelo que é necessário o recurso a uma recta auxiliar do plano, recta essa que, também ela, tem de ser definida por dois pontos ou por um ponto e uma direcção. Optou-se por conduzir a recta auxiliar (recta a) pelos pontos A e B . A recta a pertence ao plano, pois contém dois pontos do plano – os pontos A e B que são, respectivamente, os pontos de concorrência da recta a com as rectas r e s . As rectas m e a são coplanares, pelo que ou são paralelas ou são concorrentes – não são paralelas, pelo que são concorrentes, pelo que existe um ponto de concorrência. O ponto C é o ponto de concorrência da recta m com a recta a – já temos um ponto para definir a recta. A recta m está definida por um ponto (o ponto C) e uma direcção (é paralela às rectas r e s).

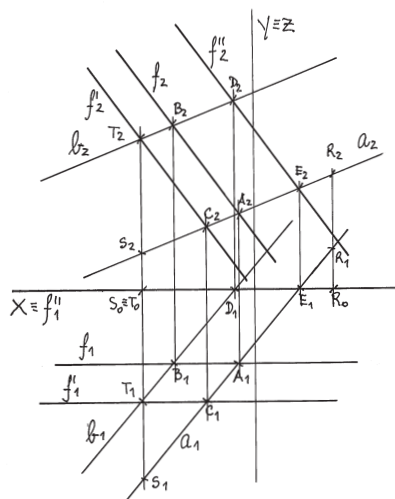
271.

- a) Ver relatório do exercício 259. A recta h está definida por dois pontos – os pontos D e E que são, respectivamente, os pontos de concorrência de h com as rectas r e s . A recta h é o **lugar geométrico** dos pontos do plano que têm 4 cm de cota.
- b) Ver relatório do exercício 259. A recta h' está definida por dois pontos – os pontos F e G que são, respectivamente, os pontos de concorrência de h' com as rectas r e s . A recta h' é o **lugar geométrico** dos pontos do plano que têm 1 cm de cota.
- c) A projecção frontal de h'' está no eixo X , pois todos os pontos de h'' têm cota nula – a recta h'' está contida no **Plano Horizontal de Projectão** (ver exercício 228). Sobre a determinação da projecção horizontal da recta h'' , ver relatório do exercício 259. A recta h'' está definida por dois pontos – os pontos H e I que são, respectivamente, os pontos de concorrência de h'' com as rectas r e s .
- d) Conclui-se que **rectas horizontais de um plano são paralelas entre si**.

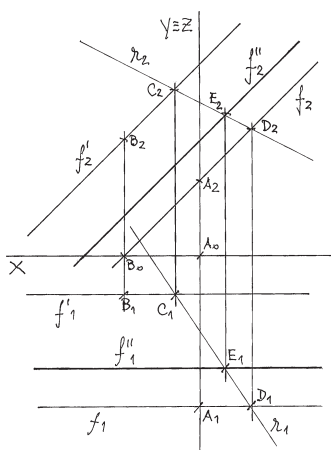


272.

- a) Ver relatório do exercício 258. A recta f está definida por dois pontos – os pontos A e B que são, respectivamente, os pontos de concorrência de f com as rectas a e b . A recta f é o **lugar geométrico** dos pontos do plano que têm 2 cm de afastamento.
- b) Ver relatório do exercício 258. A recta f' está definida por dois pontos – os pontos C e T que são, respectivamente, os pontos de concorrência de f' com as rectas a e b . A recta f' é o **lugar geométrico** dos pontos do plano que têm 3 cm de afastamento.
- c) A projecção horizontal de f'' está no eixo X , pois todos os pontos de f'' têm afastamento nulo – a recta f'' está contida no **Plano Frontal de Projectão** (ver exercício 229). Sobre a determinação da projecção frontal da recta f'' , ver relatório do exercício 258. A recta f'' está definida por dois pontos – os pontos D e E que são, respectivamente, os pontos de concorrência de f'' com as rectas b e a .
- d) Conclui-se que **rectas frontais de um plano são paralelas entre si**.



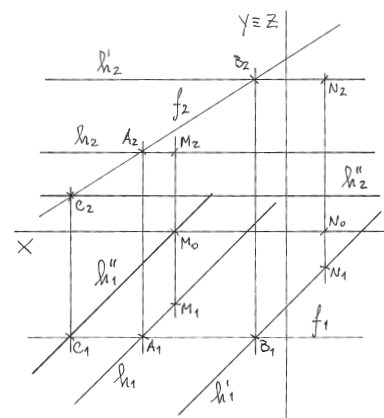
273.



Definiu-se o plano pelas projecções das rectas f e f' . Em seguida, desenhou-se f'' , em função dos dados do enunciado. Para definir a recta f'' são necessários dois pontos ou um ponto e uma direcção. A recta f'' é paralela às rectas f e f' , pelo que já temos a direcção da recta – falta-nos um ponto. Os dados do plano não são suficientes para definir a recta f'' , pelo que é necessário o recurso a uma recta auxiliar do plano, recta essa que, também ela, tem de ser definida por dois pontos ou por um ponto e uma direcção. A recta r é a recta auxiliar do plano a que se recorreu, é oblíqua e está definida pelos pontos C e D , respectivamente os pontos de concorrência da recta r com as rectas f' e f . As rectas f'' e r são coplanares, pelo que ou são paralelas ou são concorrentes – não são paralelas, pelo que são concorrentes, pelo que existe um ponto de concorrência. O ponto E é o ponto de concorrência da recta f'' com a recta r – já temos um ponto para definir a recta. A recta f'' está definida por um ponto (o ponto E) e uma direcção (é paralela às rectas f e f').

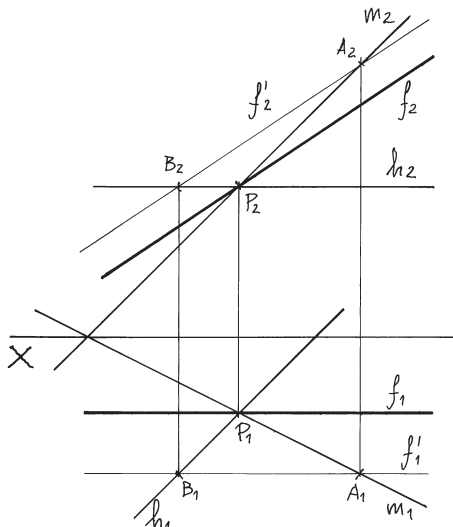
274.

Definiu-se o plano pelas projecções das rectas h e h' . Em seguida, desenhou-se h'' , em função dos dados do enunciado. Para definir a recta h'' são necessários dois pontos ou um ponto e uma direcção. A recta h'' é paralela às rectas h e h' , pelo que já temos a direcção da recta – falta-nos um ponto. Os dados do plano não são suficientes para definir a recta h'' , pelo que é necessário o recurso a uma recta auxiliar do plano, recta essa que, também ela, tem de ser definida por dois pontos ou por um ponto e uma direcção. A recta f é a recta auxiliar do plano a que se recorreu, é uma recta frontal e está definida pelos pontos A e B , respectivamente os pontos de concorrência da recta f com as rectas h e h' . As rectas h'' e f são coplanares, pelo que ou são paralelas ou são concorrentes – não são paralelas, pelo que são concorrentes, pelo que existe um ponto de concorrência. O ponto C é o ponto de concorrência da recta h'' com a recta f – já temos um ponto para definir a recta. A recta h'' está definida por um ponto (o ponto C) e uma direcção (é paralela às rectas h e h').



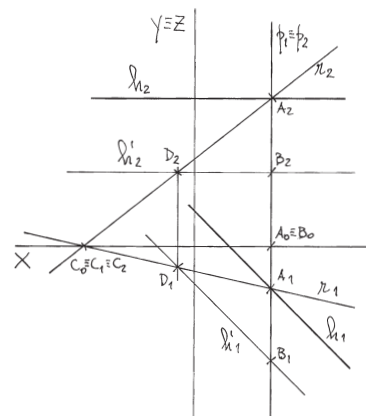
275.

Ver relatório do exercício 265. Recorreu-se a uma recta auxiliar do plano – a recta f' , que é frontal (de frente) e está definida por dois pontos (os pontos A e B que são os pontos de concorrência de f' com m e h , respectivamente). Tendo em conta que rectas frontais (de frente) de um plano são paralelas entre si, as rectas f e f' são **necessariamente** paralelas, pelo que a recta f fica definida por um ponto (o ponto P) e uma direcção (é paralela à recta f').

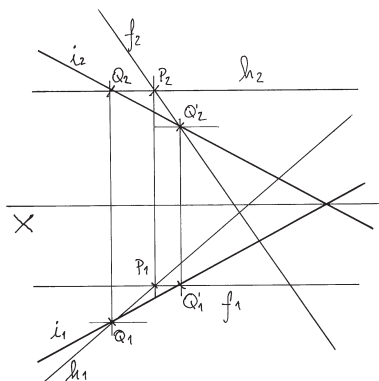


276.

Definiu-se o plano pelas projecções das rectas r e p . Sobre a determinação das projecções da recta h , ver relatório do exercício 264. Os dados permitiram-nos desenhar h_2 . Para definir uma recta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direcção. Para definir esta recta temos um único ponto – o ponto A . Necessitamos de outro ponto ou da sua direcção. Desenharam-se as projecções de outra recta horizontal (de nível) do plano, h' , passando por B – esta fica definida por B , o seu ponto de concorrência com p , e por D , o seu ponto de concorrência com r . Rectas horizontais (de nível) de um plano são paralelas entre si, pelo que h é paralela a h' . A recta h fica, assim, definida por um ponto (o ponto A) e uma direcção (é paralela à recta h').



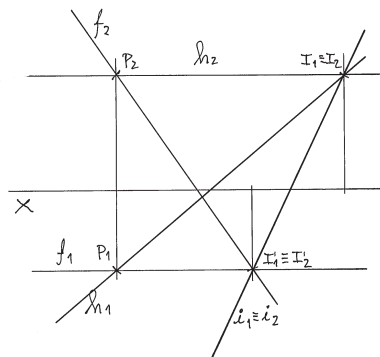
277.



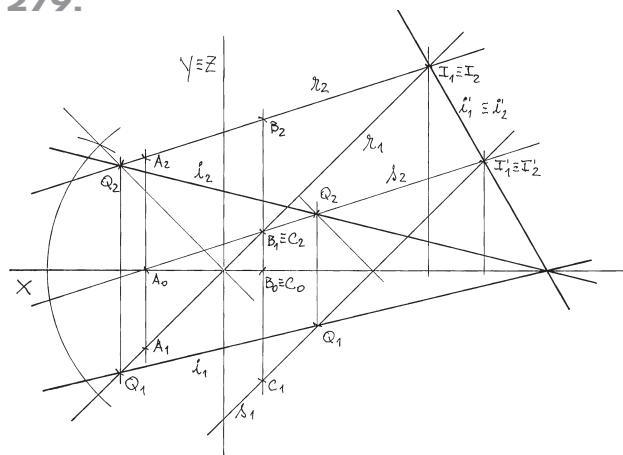
A recta i é a recta de intersecção do plano dado com o $\beta_{1/3}$ – essa recta tem de pertencer simultaneamente aos dois planos, ou seja, a recta i é o lugar geométrico dos pontos do espaço que pertencem simultaneamente aos dois planos. Para definir uma recta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direcção. Em primeiro lugar, determinou-se o ponto Q , o traço da recta h no $\beta_{1/3}$ – Q pertence ao plano dado, pois pertence a uma recta do plano (a recta h) e pertence ao $\beta_{1/3}$, pois tem as suas projecções simétricas em relação ao eixo X . Q é, assim, um ponto que pertence simultaneamente aos dois planos. Já temos um ponto para definir a recta i . Em seguida, determinou-se o ponto Q' , o traço da recta f no $\beta_{1/3}$ – Q' pertence ao plano dado, pois pertence a uma recta do plano (a recta f) e pertence ao $\beta_{1/3}$, pois tem as suas projecções simétricas em relação ao eixo X . Q' é, assim, um ponto que pertence simultaneamente aos dois planos. Já temos outro ponto para definir a recta i . Desenharam-se as projecções da recta i , passando pelas projecções homónimas dos pontos Q e Q' – a recta i está definida por dois pontos. Note que as projecções da recta i são simétricas em relação ao eixo X (ver exercício 232).

278.

A recta i é a recta de intersecção do plano dado com o $\beta_{2/4}$ – essa recta tem de pertencer simultaneamente aos dois planos, ou seja, a recta i é o lugar geométrico dos pontos do espaço que pertencem simultaneamente aos dois planos. Para definir uma recta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direcção. Em primeiro lugar determinou-se o ponto I , o traço da recta h no $\beta_{2/4}$ – I pertence ao plano dado, pois pertence a uma recta do plano (a recta h) e pertence ao $\beta_{2/4}$, pois tem as suas projecções coincidentes. I é, assim, um ponto que pertence simultaneamente aos dois planos. Já temos um ponto para definir a recta i . Em seguida, determinou-se o ponto I' , o traço da recta f no $\beta_{2/4}$ – I' pertence ao plano dado, pois pertence a uma recta do plano (a recta f) e pertence ao $\beta_{2/4}$, pois tem as suas projecções coincidentes. I' é, assim, um ponto que pertence simultaneamente aos dois planos. Já temos outro ponto para definir a recta i . Desenharam-se as projecções da recta i , passando pelas projecções homónimas dos pontos I e I' – a recta i está definida por dois pontos. Note que as projecções da recta i são coincidentes (ver exercício 233).



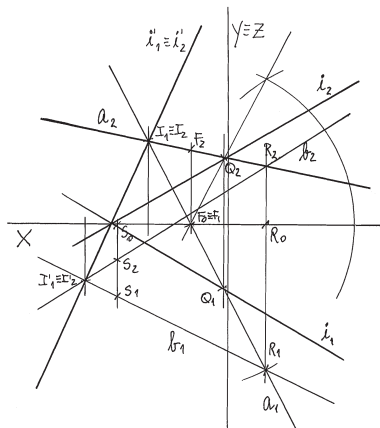
279.



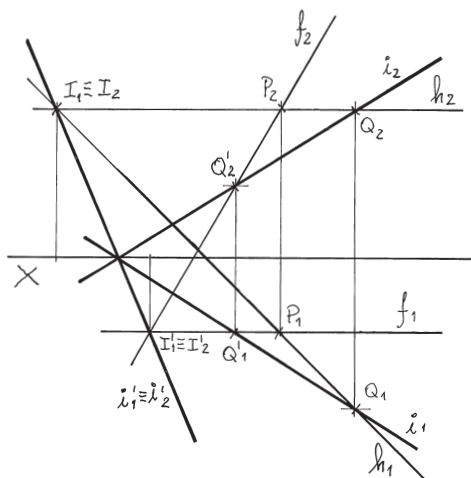
Definiu-se o plano pelas projecções das duas rectas. Em seguida, determinaram-se as projecções da recta i (ver exercício 277) e da recta i' (ver exercício 278). Repare que as rectas i e i' são concorrentes entre si sobre o eixo X . De facto, e uma vez que as duas rectas são coplanares (pertencem, ambas, ao plano α), as duas rectas ou são paralelas ou são concorrentes. Como não são paralelas, são concorrentes, pelo que existe um ponto de concorrência. Uma vez que todos os pontos da recta i pertencem ao $\beta_{1/3}$, o ponto de concorrência tem de ser um ponto do $\beta_{1/3}$. Por outro lado, uma vez que todos os pontos da recta i' pertencem ao $\beta_{2/4}$, o ponto de concorrência tem de pertencer ao $\beta_{2/4}$. O ponto de concorrência é, assim, um ponto que pertence simultaneamente ao $\beta_{1/3}$ e ao $\beta_{2/4}$ – só pode ser um ponto do eixo X , pois é no eixo X que se situam todos os pontos que pertencem simultaneamente ao $\beta_{1/3}$ e ao $\beta_{2/4}$.

280.

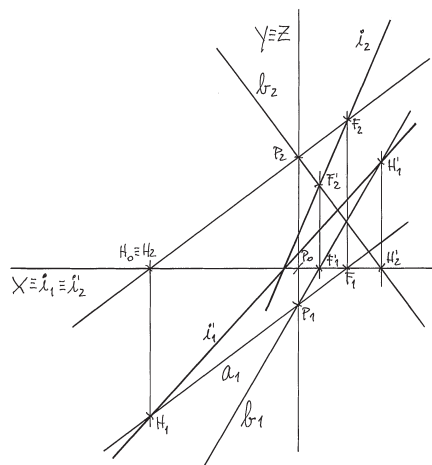
- a) O plano fica definido pelas projecções das rectas que definem o plano – as rectas a e b .
- b) Em primeiro lugar, determinaram-se as projecções da recta i' (a recta de intersecção do plano γ com o $\beta_{2/4}$) – ver relatório do exercício 278. Em seguida, para determinar as projecções da recta i , a recta de intersecção do plano γ com o $\beta_{1/3}$, determinou-se o traço da recta a no $\beta_{1/3}$ (ver relatório do exercício 277), mas o traço da recta b no $\beta_{1/3}$ situa-se fora dos limites do papel. Assim, houve que recorrer a um outro raciocínio. As rectas i e i' são **necessariamente** concorrentes entre si (ver relatório do exercício anterior) – são concorrentes num ponto do eixo X (no único ponto do plano que se situa no eixo X). O ponto de concorrência das duas rectas foi determinado a partir das projecções da recta i' . Assim, a recta i está definida por dois pontos – o ponto Q e o ponto do eixo X que é o seu ponto de concorrência com a recta i' .



Ver relatório do exercício **279**.

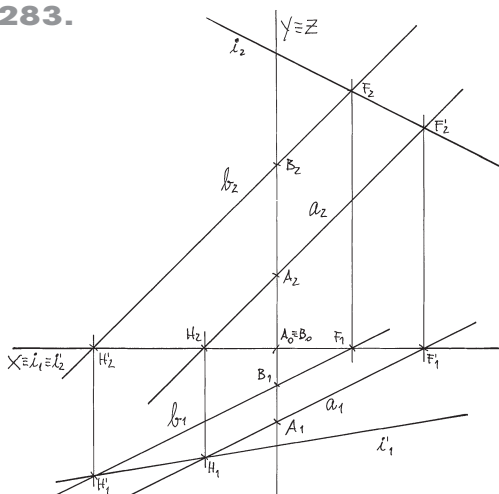


a) A recta i é a recta de intersecção do plano dado com o Plano Frontal de Projecção – essa recta tem de pertencer simultaneamente aos dois planos, ou seja, a recta i é o lugar geométrico dos pontos do espaço que pertencem simultaneamente aos dois planos. Para definir uma recta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direcção. Em primeiro lugar, determinou-se o traço frontal da recta \mathbf{a} , $\mathbf{F} - \mathbf{F}$ pertence ao plano δ , pois pertence a uma recta do plano (a recta \mathbf{a}) e pertence ao Plano Frontal de Projecção, pois tem afastamento nulo. \mathbf{F} é, assim, um ponto que pertence simultaneamente aos dois planos. Já temos um ponto para definir a recta i . Em seguida, determinou-se \mathbf{F}' , o traço frontal da recta $\mathbf{b} - \mathbf{F}'$ pertence ao plano δ , pois pertence a uma recta do plano (a recta \mathbf{b}) e pertence ao Plano Frontal de Projecção, pois tem afastamento nulo. \mathbf{F}' é, assim, um ponto que pertence simultaneamente aos dois planos. Já temos outro ponto para definir a recta i . Desenharam-se as projecções da recta i , passando pelas projecções homónimas dos pontos \mathbf{F} e \mathbf{F}' – a recta i está definida por dois pontos. Note que a projecção horizontal da recta i se situa no eixo \mathbf{X} (ver exercício 229). A recta i é uma **recta frontal (de frente) do plano, com afastamento nulo**.



- 51

283.

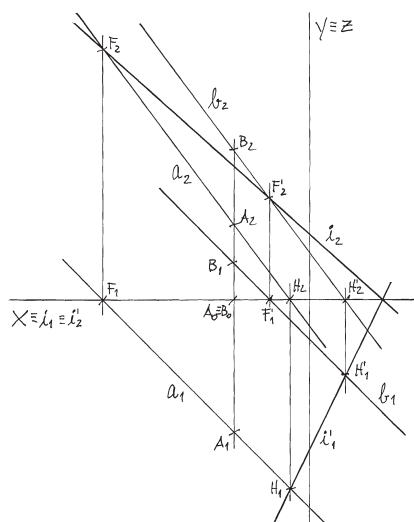


a) Ver relatório da alínea a) do exercício anterior.

b) Ver relatório da alínea b) do exercício anterior. Note que, nesta situação, se continua a garantir que as rectas i e i' são concorrentes num ponto do eixo X , mesmo apesar deste se situar fora dos limites do papel.

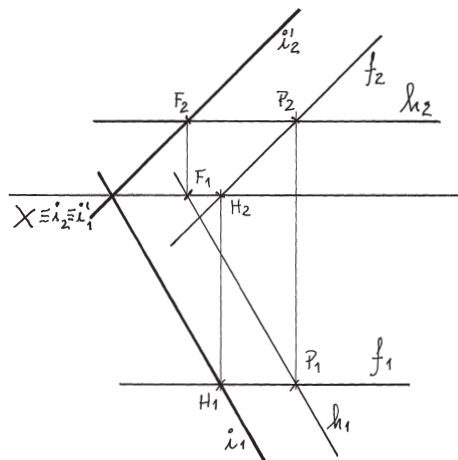
284.

Ver relatório das alíneas a) e b) do exercício 282.



285.

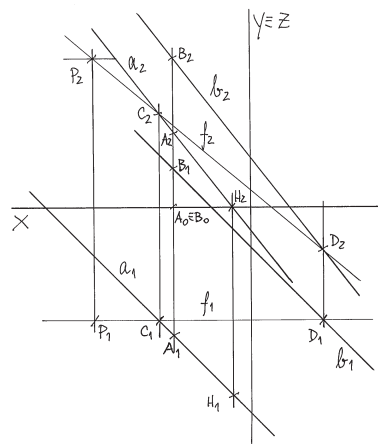
As rectas h e f são concorrentes, apesar de tal não estar explicitamente referido no enunciado do exercício (ver alínea a) do exercício 260). Sobre a determinação da recta i , a recta de intersecção do plano γ com o Plano Horizontal de Projecção, ver alínea b) do exercício 282. Sobre a determinação da recta i' , a recta de intersecção do plano γ com o Plano Frontal de Projecção, ver alínea a) do exercício 282.



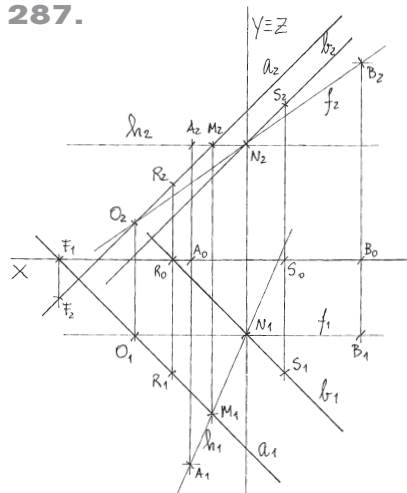
286.

a) Um ponto pertence a um plano se e só se pertencer a uma recta do plano.

b) Em primeiro lugar, verificou-se que não há, em qualquer das duas rectas que definem o plano, nenhum ponto com as coordenadas pretendidas. Atendendo à **condição para que um ponto pertença a um plano** (ver alínea anterior), é necessário desenhar as projecções de uma recta auxiliar **do plano**, à qual o ponto pertença. Essa recta não pode ser uma recta qualquer – tem de ser uma recta do plano tal que seja possível garantir que o ponto pertença à recta, antes de desenhar as projecções da recta. Uma vez que o ponto tem 3 cm de afastamento, optou-se por representar o **lugar geométrico dos pontos da recta que têm 3 cm de afastamento** – esse lugar geométrico é uma recta frontal (de frente) do plano, com 3 cm de afastamento (a recta f). A recta f está definida por dois pontos – os pontos C e D que são os pontos de concorrência da recta f com as rectas a e b , respectivamente (ver exercício 258). Todos os pontos da recta f pertencem ao plano e têm 3 cm de afastamento – o ponto P é o ponto da recta f que tem 4 cm de cota. O ponto P pertence ao plano, pois pertence a uma recta do plano – a recta f . Note que **não é possível determinar as projecções do ponto** sem desenhar previamente as projecções da recta a a que o ponto pertence. Uma outra hipótese de resolução do exercício seria desenhar as projecções de uma recta horizontal (de nível) do plano com 4 cm de cota – essa recta seria, então, o lugar geométrico dos pontos do plano com 4 cm de cota e o ponto P seria, nessa situação, o ponto da recta que tivesse 3 cm de afastamento.



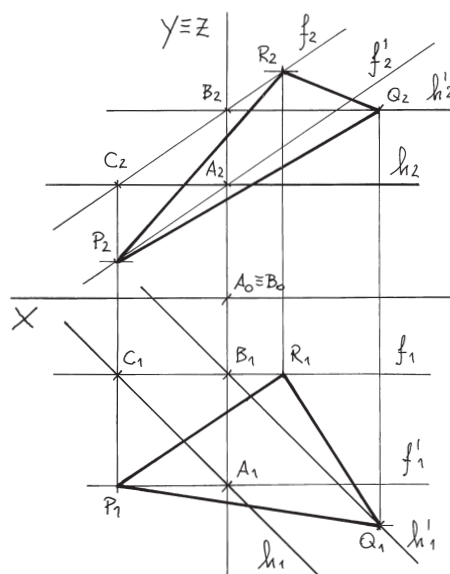
287.



Definiu-se o plano pelas projecções das rectas a e b . Em primeiro lugar, verificou-se que, em função das coordenadas dadas, os pontos A e B não podem pertencer a nenhuma das rectas a e b . Para determinar as projecções do ponto A , atendendo à **condição para que um ponto pertença a um plano** (ver exercício anterior), é necessário desenhar as projecções de uma recta auxiliar **do plano**, à qual o ponto pertença. Recorreu-se a uma recta auxiliar do plano – uma recta horizontal (de nível), h , com 3 cm de cota. Esta recta é o lugar geométrico dos pontos do plano que têm 3 cm de cota. O ponto A é o ponto da recta h que tem 1,5 cm de abscissa. A recta h está definida por dois pontos – os pontos M e N (que são os pontos de concorrência da recta h com as rectas a e b , respectivamente). Para determinar as projecções do ponto B , é necessário desenhar as projecções de outra recta auxiliar **do plano**, à qual o ponto B pertença. Recorreu-se a uma recta auxiliar do plano – uma recta frontal (de frente), f , com 2 cm de afastamento. Esta recta é o lugar geométrico dos pontos do plano que têm 2 cm de afastamento. O ponto B é o ponto da recta f que tem -3 de abscissa. A recta f está definida por dois pontos – os pontos O e N (que são os pontos de concorrência da recta f com as rectas a e b , respectivamente).

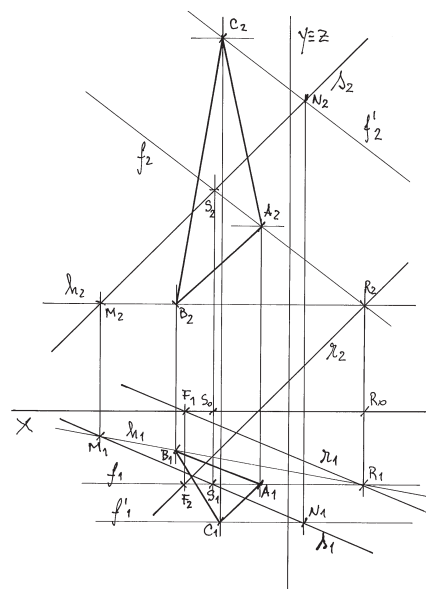
288.

Em primeiro lugar, definiu-se o plano, pelas projecções das rectas h e h' . Em seguida, constatou-se que o ponto Q pertence à recta h' , pois tem 5 cm de cota e todos os pontos da recta h' pertencem ao plano e têm 5 cm de cota. Q é o ponto de h' que tem 6 cm de afastamento. Já os pontos P e R não pertencem a nenhuma das rectas h e h' , pelo que é necessário determinar as projecções de rectas **do plano** a que os pontos pertençam. Para obter as projecções do ponto P , recorreu-se a uma recta frontal (de frente) do plano, f , com 5 cm de afastamento (ver exercício 286). A recta f está definida por dois pontos – os pontos B e C . O ponto P é o ponto da recta f que tem 1 cm de cota. Para obter as projecções do ponto R , recorreu-se a outra recta frontal (de frente) do plano, f' , com 2 cm de afastamento (ver exercício 286). A recta f' está definida por um ponto e uma direcção – o ponto A e a direcção da recta f (rectas frontais de um plano são paralelas entre si). O ponto R é o ponto da recta f' que tem 6 cm de cota. A partir das projecções dos três pontos, desenharam-se as duas projecções do triângulo $[PQR]$.

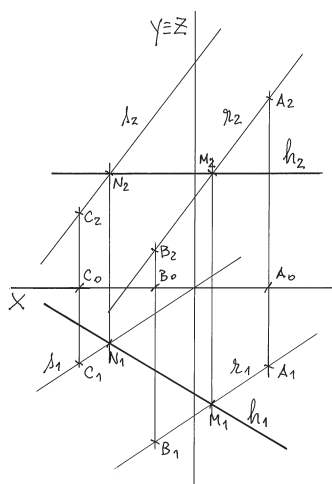


289.

Nenhum dos três pontos pedidos pertence às rectas que definem o plano, pelo que foi necessária a determinação de rectas auxiliares do plano, às quais os pontos pertençam. Para determinar as projecções do ponto **A** desenharam-se as projecções de uma recta **f**, frontal (de frente), do plano e com 2 cm de afastamento – a recta **f** é concorrente com **r** no ponto **R** e com **s** no ponto **S**. O ponto **A** é o ponto da recta **f** que tem 5 cm de cota. Para obter as projecções do ponto **B** desenharam-se as projecções de uma recta **h**, horizontal (de nível), do plano e com 3 cm de cota – a recta **h** é concorrente com **r** no ponto **R** e com **s** no ponto **M**. O ponto **B** é o ponto da recta **h** que tem 1 cm de afastamento. Para obter as projecções do ponto **C** desenharam-se as projecções de uma recta **f'**, frontal (de frente), do plano e com 3 cm de afastamento – a recta **f'** é concorrente com a recta **s** no ponto **N** e é paralela à recta **f** (rectas frontais de um plano são paralelas entre si). O ponto **C** é o ponto da recta **f'** que tem 9 cm de cota. A partir das projecções dos três pontos desenharam-se as projecções do triângulo.



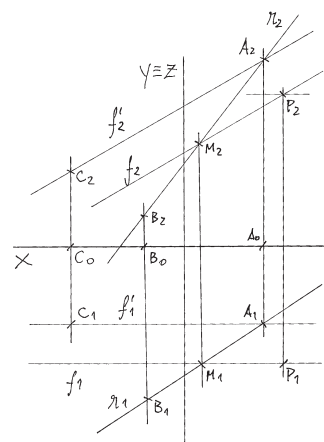
290.



Em primeiro lugar definiu-se o plano pelas projecções dos pontos **A**, **B** e **C**. Em seguida desenhou-se **h₂**, 3 cm acima do eixo **X**. Para definir a recta **h** são necessários dois pontos ou um ponto e uma direcção. Os dados do plano não são suficientes para definir a recta **h**, pelo que é necessário o recurso a uma recta auxiliar do plano – a recta **r**, que está definida por dois pontos (os pontos **A** e **B**). As rectas **h** e **r** são complanares, pelo que ou são paralelas ou são concorrentes. Como não são paralelas, são concorrentes, pelo que existe um ponto de concorrência – o ponto **M**. Já temos um ponto para definir a recta. Os dados do plano continuam insuficientes para definir a recta **h**, pelo que se recorreu a outra recta auxiliar do plano – a recta **s**, que está definida por um ponto (o ponto **C**) e por uma direcção (é paralela à recta **r**). As rectas **h** e **s** são complanares, pelo que ou são paralelas ou são concorrentes. Como não são paralelas, são concorrentes, pelo que existe um ponto de concorrência – o ponto **N**. Já temos outro ponto para definir a recta. A recta **h** está definida por dois pontos.

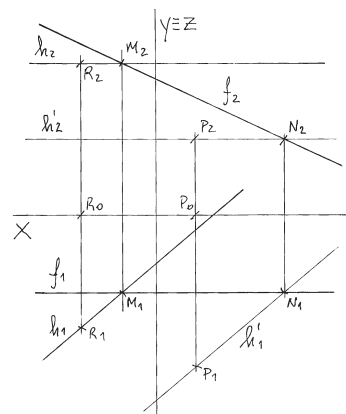
291.

Para determinar as projecções do ponto **P**, atendendo à condição para que um ponto pertença a um plano, é necessário desenhar as projecções de uma recta auxiliar do plano, à qual o ponto pertença. Recorreu-se a uma recta auxiliar do plano – uma recta frontal (de frente), **f**, com 3 cm de afastamento. Para definir a recta **f** são necessários dois pontos ou um ponto e uma direcção. Os dados do plano não são suficientes para definir a recta **f**, pelo que é necessário o recurso a uma recta auxiliar do plano – a recta **r**, que está definida por dois pontos (os pontos **A** e **B**). As rectas **f** e **r** são concorrentes no ponto **M** – já temos um ponto para definir a recta **f**. Os dados do plano continuam insuficientes para definir a recta **f**, pelo que se recorreu a outra recta auxiliar do plano – a recta **f'**. A recta **f'** está definida por dois pontos – o ponto **C** e o ponto **A** (que é o ponto de concorrência da recta **f'** com a recta **r**). Já temos a direcção da recta **f**, que é paralela à recta **f'**, pois rectas frontais de um plano são paralelas entre si. A recta **f** está definida por um ponto e uma direcção. O ponto **P** é o ponto da recta **f** que tem 4 cm de cota.

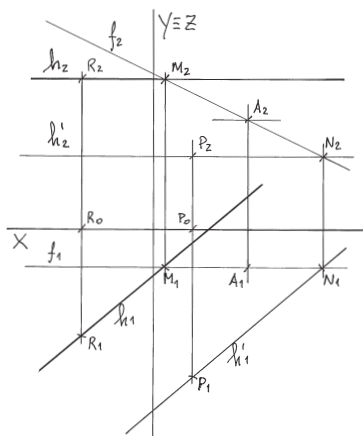


292.

Definiu-se o plano pelas projecções de h e P . Os dados do enunciado permitiram-nos desenhar f_1 . Para definir a recta f são necessários dois pontos ou um ponto e uma direcção. As rectas f e h são coplanares, pelo que ou são paralelas ou são concorrentes. Não são paralelas, pelo que são concorrentes, pelo que existe um ponto de concorrência – o ponto M . Já temos um ponto para definir a recta. Os dados do plano são insuficientes para definir a recta f , pelo que se recorreu a uma recta auxiliar do plano – a recta h' . A recta h' está definida por um ponto e uma direcção – o ponto P e a direcção da recta h (rectas horizontais de um plano são paralelas entre si). As rectas f e h' são coplanares, pelo que ou são paralelas ou são concorrentes. Não são paralelas, pelo que são concorrentes, pelo que existe um ponto de concorrência – o ponto N . Já temos outro ponto para definir a recta. A recta f está definida por dois pontos – os pontos M e N .



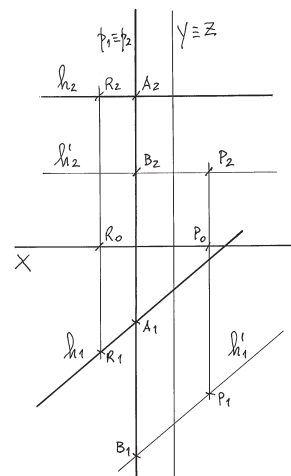
293.



Para determinar as projecções do ponto A é necessário recorrer a uma recta do plano à qual o ponto pertença (ver exercício 286). Optou-se por se recorrer a uma recta frontal (de frente), f , do plano, com 1 cm de afastamento. A recta f é o lugar geométrico dos pontos do plano que têm 1 cm de afastamento. As projecções da recta f determinaram-se conforme exposto no relatório do exercício anterior. O ponto A é o ponto da recta f que tem 3 cm de cota.

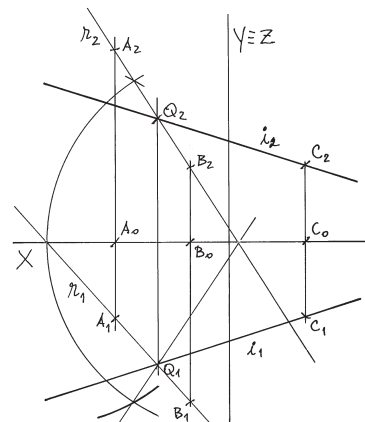
294.

As projecções da recta p determinaram-se directamente – estas, no entanto, não são suficientes para definir a recta, pois trata-se da única situação em que as projecções da recta não verificam o Critério de Reversibilidade. Assim, para definir uma recta de perfil são necessários, para além das suas projecções, dois dos seus pontos. As rectas p e h são coplanares, pelo que ou são paralelas ou são concorrentes. Não são paralelas, pelo que são concorrentes, pelo que existe um ponto de concorrência – o ponto A . Já temos um ponto para definir a recta. Os dados do plano são insuficientes para definir a recta p , pelo que é necessário o recurso a uma recta auxiliar do plano. Optou-se por recorrer a uma recta horizontal (de nível), do plano, passando por P – a recta h' (ver relatório do exercício 292). As rectas p e h' são coplanares, pelo que ou são paralelas ou são concorrentes. Não são paralelas, pelo que são concorrentes, pelo que existe um ponto de concorrência – o ponto B . Já temos outro ponto para definir a recta – a recta p está, assim, definida por dois pontos (os pontos A e B).



295.

A recta i é a recta de intersecção do plano dado com o $\beta_{1/3}$ – a recta i tem de pertencer simultaneamente aos dois planos, ou seja, todos os pontos da recta i pertencem simultaneamente aos dois planos. Para definir uma recta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direcção. O ponto C é um ponto do $\beta_{1/3}$ e é um dos pontos do plano α , pelo que C é, já, um ponto que pertence aos dois planos. Já temos um ponto para definir a recta. Os dados do plano são insuficientes para definir a recta, pelo que se recorreu a uma recta auxiliar do plano – a recta r . A recta r está definida por dois pontos do plano – os pontos A e B . Em seguida, determinou-se o traço da recta r no $\beta_{1/3}$ (ver exercício 190) – Q pertence ao plano α , pois pertence a uma recta do plano (a recta r) e pertence ao $\beta_{1/3}$, pois tem as suas projecções simétricas em relação ao eixo X . Q é, assim, um ponto que pertence simultaneamente aos dois planos. Já temos outro ponto para definir a recta i – a recta i está definida por dois pontos (C e Q).



299.

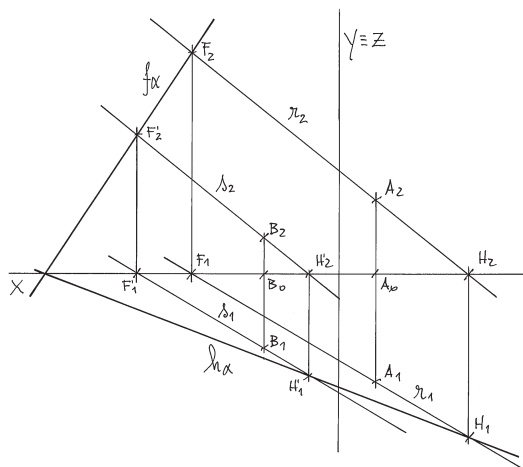
Por **traço horizontal de um plano** entende-se a recta de intersecção desse plano com o Plano Horizontal de Projecção – é uma recta horizontal (de nível) desse plano, que tem cota nula.

300.

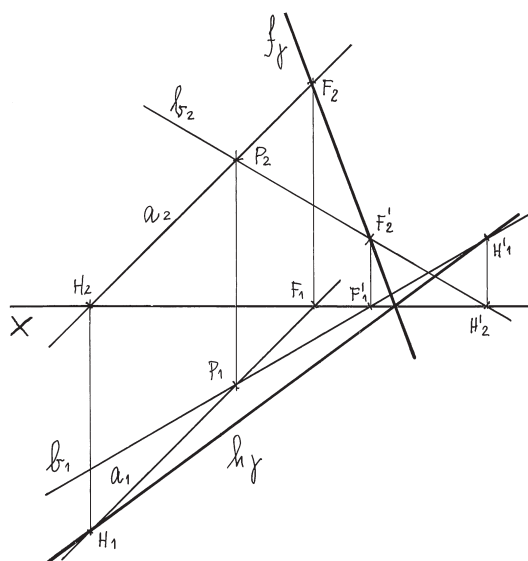
Por **traço frontal de um plano** entende-se a recta de intersecção desse plano com o Plano Frontal de Projecção – é uma recta frontal (de frente) desse plano, que tem afastamento nulo.

301.

O plano ficou definido pelas projecções das duas rectas. O traço frontal de α é **uma recta** – é a recta de intersecção do plano com o Plano Frontal de Projecção. Para definir uma recta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direcção – f_α fica definido pelos traços frontais de r e s , que são dois pontos que pertencem, simultaneamente, a α e ao Plano Frontal de Projecção (ver alínea **a**) do exercício 282). Note que f_α tem duas projecções – a projecção horizontal situa-se no eixo X . No entanto, omite-se a representação das projecções de f_α , representando-se, apenas, a própria recta. O traço horizontal de α é **uma recta** – é a recta de intersecção do plano com o Plano Horizontal de Projecção. Para definir uma recta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direcção – h_α fica definido pelos traços horizontais de r e s , que são dois pontos que pertencem, simultaneamente, a α e ao Plano Horizontal de Projecção (ver alínea **b**) do exercício 282). Note que h_α tem duas projecções – a projecção frontal situa-se no eixo X . No entanto, omite-se a representação das projecções de h_α , representando-se, apenas, a própria recta. f_α é a recta de α que contém todos os pontos de α com afastamento nulo. h_α é a recta de α que contém todos os pontos de α com cota nula. f_α e h_α são duas rectas do plano (são coplanares), pelo que ou são paralelas ou são concorrentes – como não são paralelas, são concorrentes. O ponto de concorrência é um ponto do eixo X – um ponto com cota e afastamento nulos.

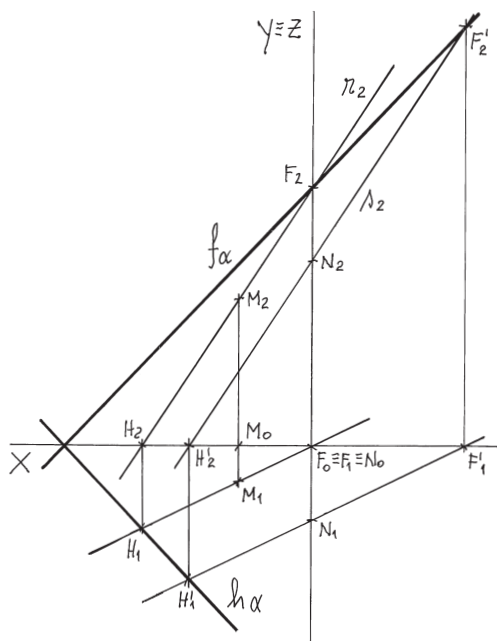
**302.**

Ver relatório do exercício anterior.



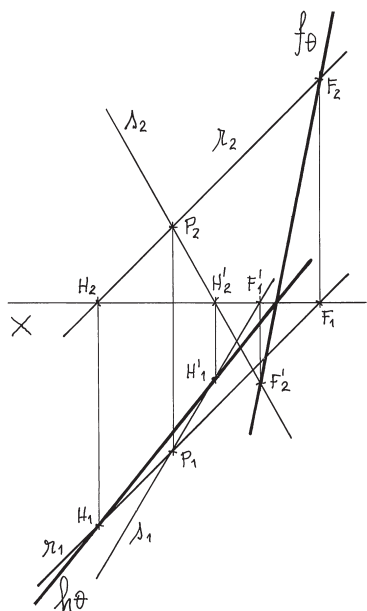
303.

Ver relatório do exercício **301**.



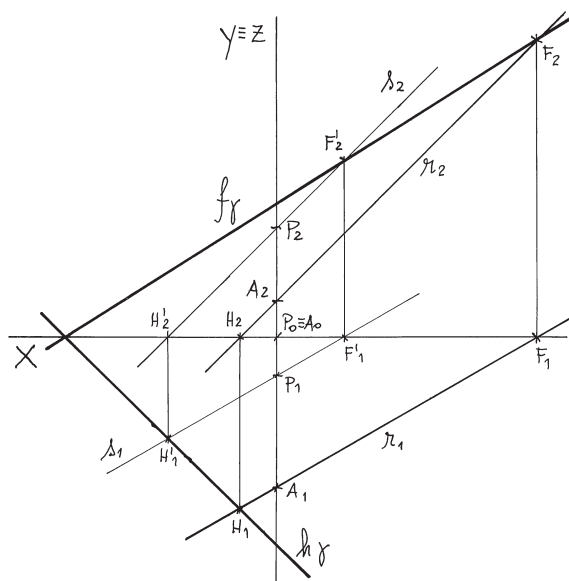
304.

Ver relatório do exercício **301**.



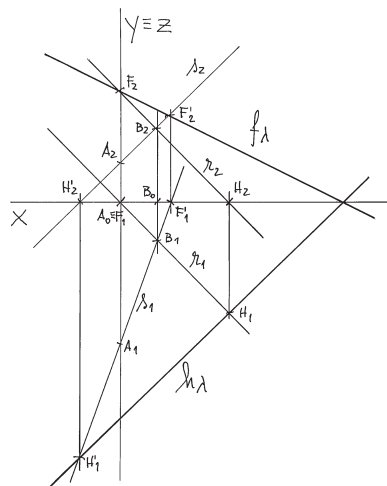
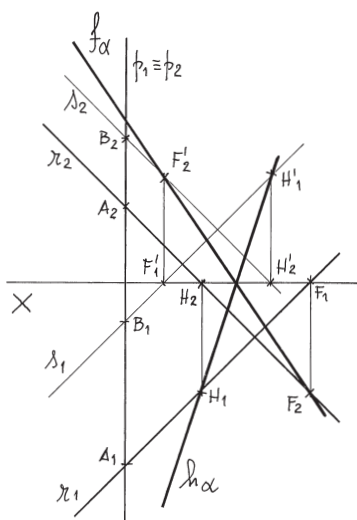
305.

Ver relatório do exercício **301**.



306.

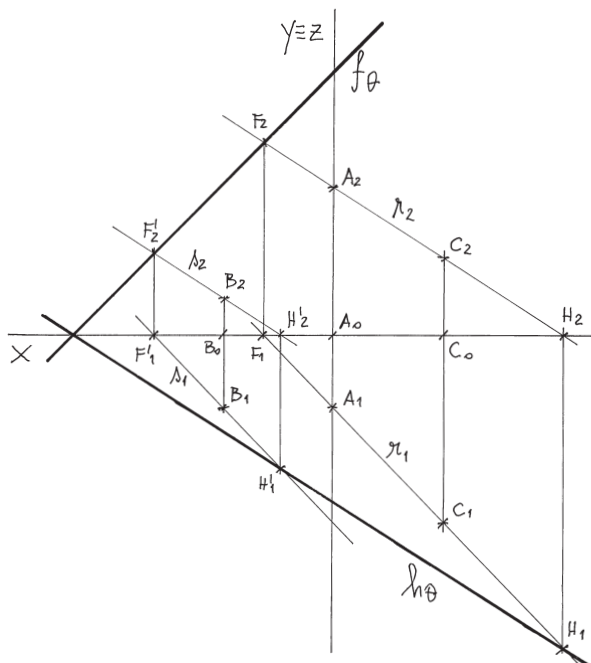
O plano está definido pelas projecções do ponto **A** e da recta **r**. f_λ é a recta de intersecção do plano dado com o Plano Frontal de Projecção – para definir uma recta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direcção. Determinou-se o traço frontal da recta **r**, **F**. Já temos um ponto para definir f_λ . Em seguida, atendendo a que os dados do plano são insuficientes para definir f_λ , recorreu-se a uma recta auxiliar do plano – a recta **s**, que passa por **A** e por **B**. A recta **s** está definida por dois pontos. Determinou-se **F'**, o traço frontal da recta **s**. Já temos outro ponto para definir f_λ – f_λ está definido por dois pontos (**F** e **F'**). A partir do momento em que o plano já está definido por duas rectas (as rectas **r** e **s**), a determinação de h_λ determinou-se conforme exposto no relatório do exercício 301.

**307.**

Tal como nas situações apresentadas nos exercícios 296, 297 e 298, a utilidade da recta de perfil é nula. Assim, considerou-se que o plano está definido por uma recta (a recta **r**) e um ponto exterior à recta (o ponto **B**), pelo que este exercício redonda na situação do exercício anterior. A recta auxiliar (do plano) a que se recorreu foi a recta **s**, que passa por **B** e é paralela à recta **r** (a recta **s** está definida por um ponto e uma direcção). O plano fica, então, definido por duas rectas concorrentes, pelo que a determinação dos seus traços processou-se conforme exposto no relatório do exercício 301.

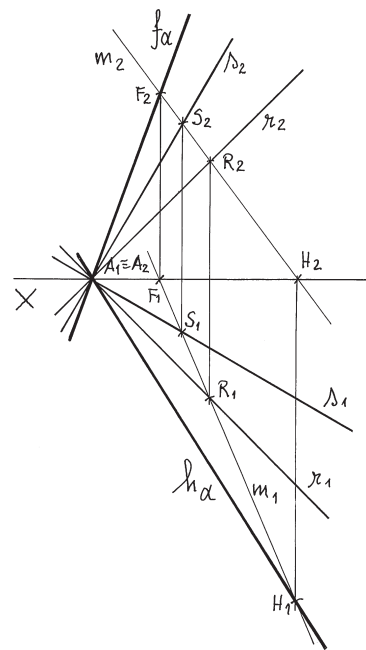
308.

O plano ficou definido pelas projecções dos três pontos. Para definir f_θ são necessários dois pontos ou um ponto e uma direcção. Os dados sobre o plano são insuficientes para definir f_θ , pelo que se recorreu a uma recta auxiliar do plano – a recta **r**, que passa por **A** e **C** (está definida por dois pontos). Determinou-se **F**, o traço frontal da recta **r** – já temos um ponto para definir f_θ . Falta-nos outro ponto ou a direcção. Os dados sobre o plano continuam insuficientes para definir f_θ , pelo que se recorreu a outra recta auxiliar do plano – a recta **s**, que passa por **B** e é paralela à recta **r** (a recta **s** está definida por um ponto e uma direcção). Determinou-se **F'**, o traço frontal da recta **s** – já temos outro ponto para definir f_θ , que fica definido por dois pontos. A partir do momento em que o plano já está definido por duas rectas (as rectas **r** e **s**), a determinação de h_θ determinou-se conforme exposto no relatório do exercício 301.

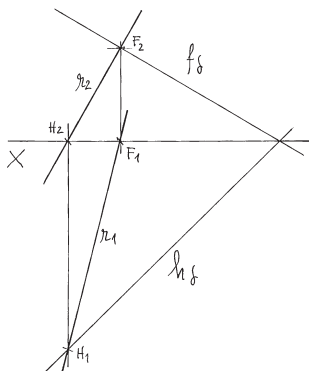


312.

As rectas r e s são concorrentes, pelo que há que, em primeiro lugar, determinar o ponto de concorrência. A recta r é uma recta do $\beta_{1/3}$, pelo que todos os seus pontos pertencem ao $\beta_{1/3}$ – o ponto de concorrência terá, **necessariamente**, de ser um ponto do $\beta_{1/3}$. Como a recta s é passante (é concorrente com o eixo X), o único ponto da recta que pertence ao $\beta_{1/3}$ é, precisamente, o seu ponto do eixo X , ou seja, as duas rectas são concorrentes num ponto do eixo X – o ponto A . A partir deste raciocínio, definiu-se o plano, através das projecções das duas rectas. Para determinar os traços do plano, atendeu-se a que estes são concorrentes no ponto A , que é um ponto do plano com cota e afastamento nulos (ver alínea **b**) do exercício 301). Assim, atendendo a que o traço frontal do plano (f_α) é uma recta, e para definir uma recta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direcção, já temos um ponto de f_α – o ponto A . Falta-nos outro ponto ou uma direcção. Os dados do plano não nos permitem determinar o elemento que nos falta (são insuficientes), pelo que se torna necessário o recurso a uma recta auxiliar do plano. Recorreu-se a uma recta oblíqua m , do plano – a recta m está definida por dois pontos (os pontos R e S , que são os seus pontos de concorrência com as rectas r e s , respectivamente). Em seguida, determinou-se o traço frontal da recta m – F . O traço frontal do plano fica definido por dois pontos – A e F . Para determinar o traço horizontal do plano (h_α), já temos um ponto – o ponto A . Determinou-se o traço horizontal da recta m , H , e definiu-se h_α por dois pontos – A e H .



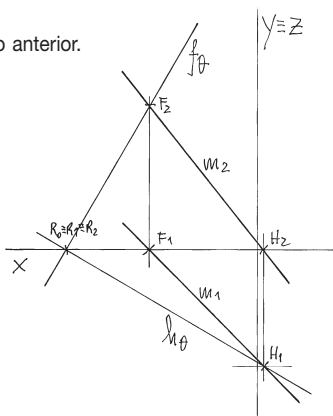
313.



- a) Uma recta pertence a um plano se contiver dois pontos do plano. Esses pontos podem ser os seus traços, pelo que **uma recta pertence a um plano se os seus traços estiverem sobre os traços homónimos do plano**.
- b) O plano está definido pelos seus traços. Os dados do enunciado permitem-nos desenhar r_2 , depois de se ter determinado o seu traço frontal F – F é o ponto de f_δ que tem 2,5 cm de cota. Note que F_2 se situa sobre f_δ (que é a própria projecção frontal de f_δ) e que F_1 se situa sobre o eixo X (F tem afastamento nulo). Para definir uma recta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direcção. Já temos um ponto – F . Falta-nos outro ponto ou uma direcção. Para que uma recta pertença a um plano tem de ter os seus traços sobre os traços homónimos do plano. Assim, a partir de r_2 determinou-se o traço horizontal da recta r , que tem de se situar sobre h_δ – H_2 situa-se sobre o eixo X (H tem cota nula) e H_1 tem de se situar sobre h_δ (que é a própria projecção horizontal de h_δ). A recta r está definida por dois pontos, que são os seus traços. Note, ainda, que r é concorrente com f_δ em F e é concorrente com h_δ em H .

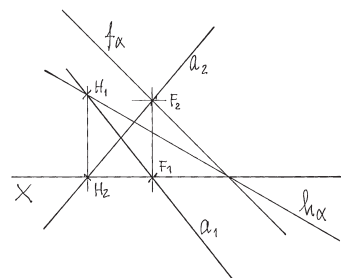
314.

Ver alínea **b**) do exercício anterior.



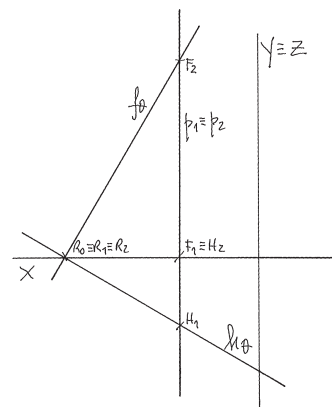
315.

Ver alínea **b**) do exercício 313.

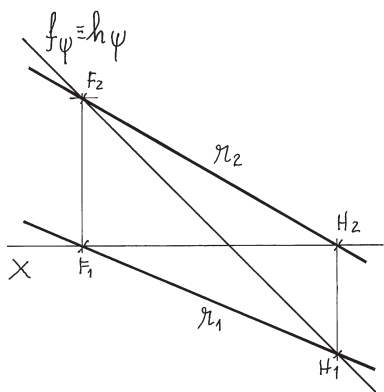


316.

O plano está definido pelos seus traços. Os dados permitiram-nos desenhar as projecções de p imediatamente. No entanto, uma vez que as projecções de uma recta de perfil não verificam o Critério de Reversibilidade, para definir a recta de perfil são necessários dois dos seus pontos, para além das suas projecções – esses pontos podem ser os traços da recta, que se situam sobre os traços homónimos do plano, para que a recta pertença ao plano (ver alínea **b**) do exercício 313).



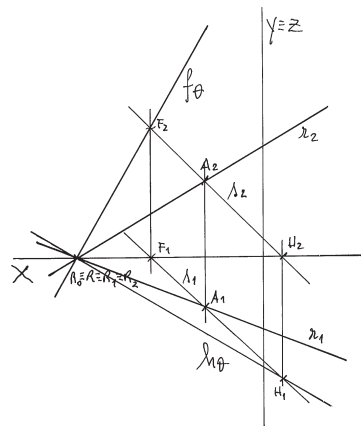
317.



Note que os traços do plano estão coincidentes **apenas** na folha de papel. De facto, no espaço, atendendo a que os traços de um plano são **duas rectas** desse plano (uma recta contida no Plano Horizontal de Projecção e uma recta contida no Plano Frontal de Projecção), os traços de um plano nunca podem estar coincidentes. O facto de, **na folha de papel**, os dois traços estarem coincidentes, resulta de uma posição específica do plano no referencial em que, após o rebatimento do Plano Frontal de Projecção sobre o Plano Horizontal de Projecção, para a redução da tridimensionalidade à bidimensionalidade, o traço frontal do plano fica sobre o traço horizontal do plano. Assim, há que ter em conta que o problema proposto não difere da situação do exercício 313 (aconselhando-se, por isso, a leitura do respectivo relatório), senão no facto de poder provocar alguma confusão por questões de visualização no espaço.

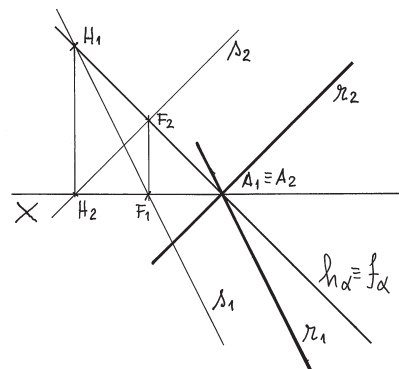
318.

O plano está definido pelos seus traços. Sendo pretendida uma recta do plano, há que ter em conta que todos os pontos da recta têm de pertencer ao plano. Tratando-se de uma recta passante, que contém um ponto do eixo X (é concorrente com o eixo X), esse ponto do eixo X tem de ser um ponto do plano. O único ponto do plano que pertence ao eixo X é, precisamente, o ponto em que o plano corta o eixo X , que é o ponto de concorrência dos traços do plano – o ponto R . Assim, como para definir a recta r necessitamos de dois pontos ou um ponto e uma direcção, já temos um ponto – o ponto R (o que nos permitiu, em seguida, desenhar r_2). Falta-nos outro ponto ou uma direcção. Os dados do plano são insuficientes para definir a recta r , pelo que é necessário o recurso a uma recta auxiliar do plano. Recorreu-se a uma recta s , oblíqua, pertencente ao plano e definida pelos seus traços (ver alínea **b**) do exercício 313). As rectas r e s são complanares (pertencem ambas ao plano θ), pelo que ou são paralelas ou são concorrentes. Não são paralelas, pelo que são concorrentes, pelo que existe um ponto de concorrência – o ponto A . Já temos outro ponto para definir a recta. A recta r está definida por dois pontos – os pontos R e A .

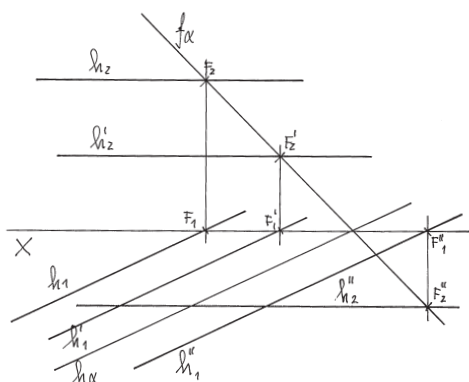


319.

Em primeiro lugar, representou-se o plano α pelos seus traços (ver exercício 317). Para definir a recta r necessitamos de dois pontos ou um ponto e uma direcção. O ponto A é o único ponto do plano que pertence ao eixo X , pelo que a recta r contém **necessariamente** o ponto A (ver exercício anterior) – já temos um ponto para definir a recta. Falta-nos outro ponto ou uma direcção. Os dados do plano são insuficientes para a resolução do exercício, pelo que se torna necessário o recurso a uma recta auxiliar do plano. Recorreu-se a uma recta s , do plano, tal que a sua projecção frontal é paralela a r_2 – a recta s está definida por dois pontos, que são os seus traços (ver alínea **b**) do exercício 313). As rectas r e s são coplanares (pertencem, ambas, ao plano α), pelo que ou são paralelas ou são concorrentes. Não são concorrentes (as suas projecções frontais são paralelas), pelo que são paralelas – já temos uma direcção. A recta r está definida por um ponto (o ponto A) e uma direcção (é paralela à recta s).



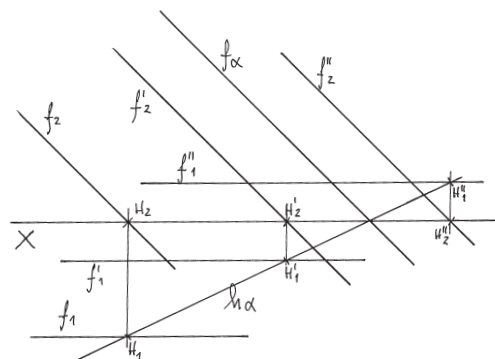
320.



- a) Em primeiro lugar, representou-se o plano α , pelos seus traços. Em seguida, desenhou-se h_2 , 4 cm acima do eixo X . Para definir uma recta são necessários dois pontos ou um ponto de uma direcção. A recta h tem de verificar a condição para que uma recta pertença a um plano, o que nos permitiu determinar o seu traço frontal, sobre f_α . Já temos um ponto para definir a recta – o ponto F . A recta h , porque é paralela ao Plano Horizontal de Projectão, não tem traço horizontal, pelo que não se aplica, nesta situação, a totalidade do raciocínio exposto no relatório do exercício 313. Por outro lado, sabe-se que rectas horizontais (de nível) de um plano são paralelas entre si. Atendendo a que o traço horizontal do plano é uma recta horizontal (de nível) do plano, com cota nula, já temos a direcção da recta h – é paralela a h_α . Assim, a recta h fica definida por um ponto (F) e uma direcção (é paralela a h_α).
- b) Desenhou-se h'_2 , 2 cm acima do eixo X . Para determinar a projecção horizontal da recta, procedeu-se conforme exposto na alínea anterior.
- c) Desenhou-se h''_2 , 2 cm abaixo do eixo X . Para determinar a projecção horizontal da recta, procedeu-se conforme exposto na alínea **a**).
- d) Conclui-se que **rectas horizontais (de nível) de um plano são paralelas entre si e paralelas ao traço horizontal do plano, que é uma recta horizontal (de nível) do plano, com cota nula.**

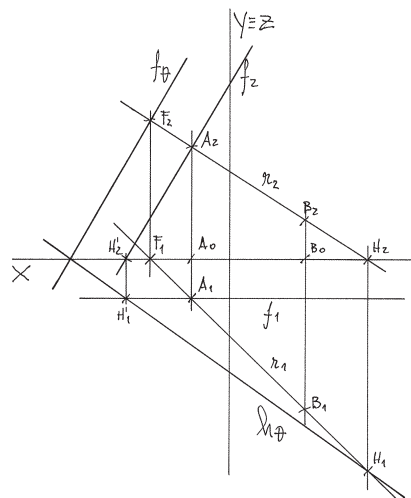
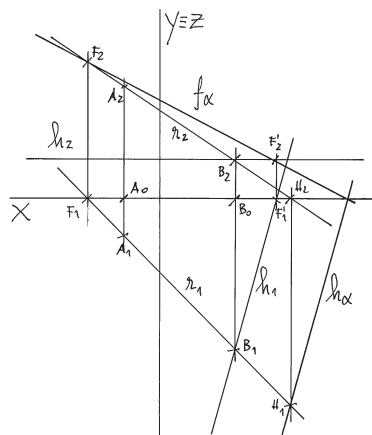
321.

- a) Em primeiro lugar, representou-se o plano α , pelos seus traços. Em seguida, desenhou-se f_1 , 3 cm abaixo do eixo X . Para definir uma recta são necessários dois pontos ou um ponto de uma direcção. A recta f tem de verificar a condição para que uma recta pertença a um plano, o que nos permitiu determinar o seu traço horizontal, sobre h_α . Já temos um ponto para definir a recta – o ponto H . A recta f , porque é paralela ao Plano Frontal de Projectão, não tem traço frontal, pelo que não se aplica, nesta situação, a totalidade do raciocínio exposto no relatório do exercício 313. Por outro lado, sabe-se que rectas frontais (de frente) de um plano são paralelas entre si. Atendendo a que o traço frontal do plano é uma recta frontal (de frente) do plano, com afastamento nulo, já temos a direcção da recta f – é paralela a f_α . Assim, a recta f fica definida por um ponto (H) e uma direcção (é paralela a f_α).
- b) Desenhou-se f'_1 , 1 cm abaixo do eixo X . Para determinar a projecção frontal da recta, procedeu-se conforme exposto na alínea anterior.
- c) Desenhou-se f''_1 , 1 cm acima do eixo X . Para determinar a projecção frontal da recta, procedeu-se conforme exposto na alínea **a**).
- d) Conclui-se que **rectas frontais (de frente) de um plano são paralelas entre si e paralelas ao traço frontal do plano, que é uma recta frontal (de frente) do plano, com afastamento nulo.**



322.

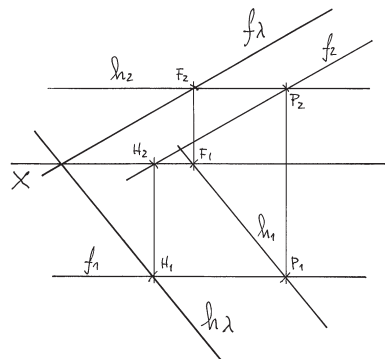
Definiu-se o plano pelas projecções das duas rectas. Em seguida, efectuaram-se os raciocínios e traçados necessários à determinação dos traços do plano. O traço horizontal do plano, que é uma recta, fica definido pelos traços horizontais das duas rectas – h_θ está definido por dois pontos (H e H'). Para definir o traço frontal do plano, que é outra recta, necessitamos de dois pontos ou um ponto e uma direcção. Determinou-se F , o traço frontal da recta r – já temos um ponto para definir f_θ . Falta-nos outro ponto ou uma direcção. A recta f não tem traço frontal. No entanto, como as rectas frontais (de frente) de um plano são paralelas entre si e paralelas ao traço frontal do plano (que é uma recta frontal do plano com afastamento nulo), já temos a direcção de f_θ (a direcção das rectas frontais do plano θ) – f_θ está, assim, definido por um ponto (F) e por uma direcção (é paralelo à recta f).

**323.**

Definiu-se o plano pelas projecções das duas rectas. Em seguida, efectuaram-se os raciocínios e traçados necessários à determinação dos traços do plano. O traço frontal do plano, que é uma recta, fica definido pelos traços frontais das duas rectas – f_α está definido por dois pontos (F e F'). Para definir o traço horizontal do plano, que é outra recta, necessitamos de dois pontos ou um ponto e uma direcção. Determinou-se H , o traço horizontal da recta r – já temos um ponto para definir h_α . Falta-nos outro ponto ou uma direcção. A recta h não tem traço horizontal. No entanto, como as rectas horizontais (de nível) de um plano são paralelas entre si e paralelas ao traço horizontal do plano (que é uma recta horizontal do plano com cota nula), já temos a direcção de h_α (que é a direcção das rectas horizontais do plano α) – h_α está, assim, definido por um ponto (H) e por uma direcção (é paralelo à recta h).

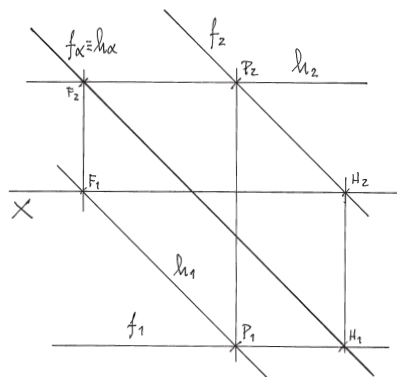
324.

Todos os pontos da recta f têm 3 cm de afastamento das duas rectas, pelo que o ponto de concorrência das duas rectas tem 3 cm de afastamento. Todos os pontos da recta h têm 2 cm de cota, pelo que o ponto de concorrência das duas rectas tem 2 cm de cota. As rectas f e h são, assim, concorrentes num ponto P (3; 2). O traço frontal do plano é uma recta, e para definir uma recta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direcção – f_λ passa pelo traço frontal de h (F) e é paralelo a f (rectas frontais de um plano são paralelas entre si e paralelas ao traço frontal do plano, que é uma recta frontal do plano, com afastamento nulo), pelo que f_λ está definido por um ponto e uma direcção (ver exercício 322). O traço horizontal de um plano é uma recta, e para definir uma recta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direcção – h_λ passa pelo traço horizontal de f (H) e é paralelo a h (rectas horizontais de um plano são paralelas entre si e paralelas ao traço horizontal do plano, que é uma recta horizontal do plano, com cota nula), pelo que h_λ está definido por um ponto e uma direcção (ver relatório do exercício 324). Note que f_λ e h_λ são concorrentes sobre o eixo X , pelo que, efectivamente, para definir h_λ já tínhamos a sua direcção (é paralelo à recta h) e dois pontos – o traço horizontal da recta f e o ponto de concorrência dos dois traços.

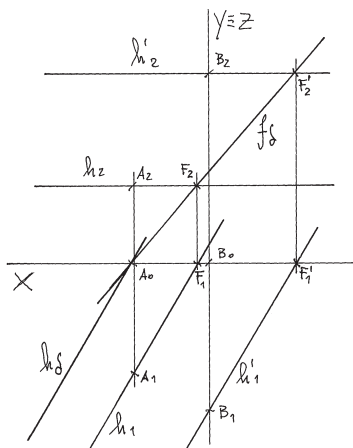


325.

Segundo o raciocínio exposto no relatório do exercício anterior, as duas rectas são concorrentes num ponto P (4; 3). As projecções contrárias das duas rectas são paralelas entre si, pelo que h_2 é paralela a f_1 e h_1 é paralela a f_2 . Sobre a determinação dos traços do plano α , ver relatório do exercício anterior. Nesta situação particular, os traços do plano ficam **necessariamente** coincidentes.



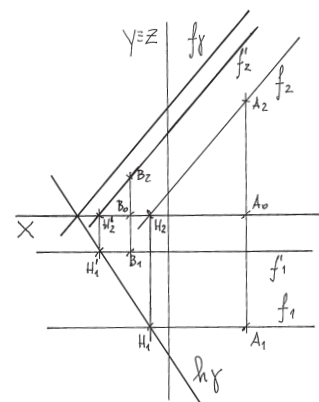
326.



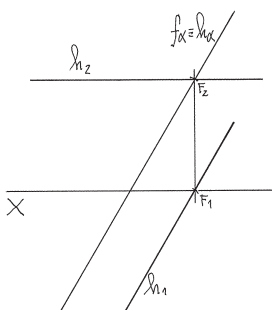
Em primeiro lugar, definiu-se o plano δ , pelas projecções das duas rectas. Em seguida, determinou-se o traço frontal do plano, f_δ , de acordo com o exposto no relatório do exercício 301 – f_δ fica definido pelos traços frontais das duas rectas (f_δ fica definido por dois pontos). Para definir h_δ , que é uma recta, necessitamos de dois pontos ou um ponto e uma direcção. Os traços de um plano são concorrentes num ponto do eixo X , pelo que h_δ é concorrente com f_δ sobre o eixo X – já temos um ponto para definir h_δ . Falta-nos outro ponto ou uma direcção. Atendendo a que rectas horizontais (de nível) de um plano são paralelas entre si e paralelas ao traço horizontal do plano, que é uma recta horizontal (de nível) do plano, com cota nula, já temos a direcção de h_δ – h_δ é paralelo a h e h' . O traço horizontal do plano está definido por um ponto e uma direcção.

327.

Em primeiro lugar, definiu-se o plano γ , pelas projecções das duas rectas. Em seguida, determinou-se o traço horizontal do plano, h_γ , de acordo com o exposto no relatório do exercício 301 – h_γ fica definido pelos traços horizontais das duas rectas (h_γ fica definido por dois pontos). Para definir f_γ , que é uma recta, necessitamos de dois pontos ou um ponto e uma direcção. Os traços de um plano são concorrentes num ponto do eixo X , pelo que f_γ é concorrente com h_γ sobre o eixo X – já temos um ponto para definir f_γ . Falta-nos outro ponto ou uma direcção. Atendendo a que rectas frontais (de frente) de um plano são paralelas entre si e paralelas ao traço frontal do plano, que é uma recta frontal (de frente) do plano, com afastamento nulo, já temos a direcção de f_γ – f_γ é paralelo a f e f' . O traço frontal do plano está definido por um ponto e uma direcção.



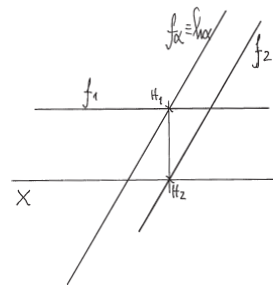
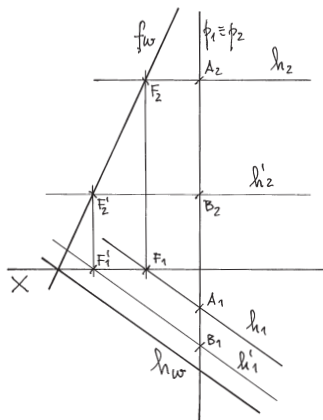
328.



O plano fica definido pelos seus traços (ver exercício 317). Sobre a determinação das projecções da recta h , ver alínea a) do relatório do exercício 320. Desenhou-se h_2 , 3 cm acima do eixo X . F , traço frontal de h , tem de estar sobre f_α , para que h pertença ao plano, e h_1 é paralela a h_α , pois h e h_α são rectas paralelas (rectas horizontais de um plano são paralelas entre si e paralelas ao traço horizontal do plano, que é uma recta horizontal do plano com cota nula).

329.

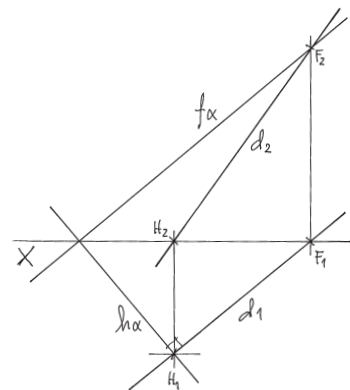
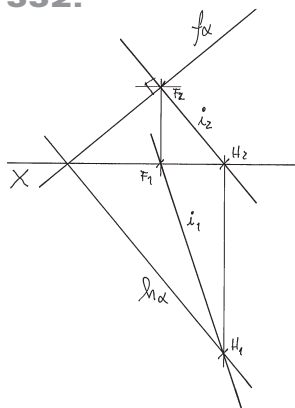
O plano fica definido pelos seus traços (ver exercício 317). Sobre a determinação das projecções da recta f , ver alínea c) do relatório do exercício 321. Desenhou-se f_1 , 2 cm acima do eixo X (f tem afastamento nulo). H , traço horizontal de f , tem de estar sobre h_α , para que f pertença ao plano, e f_2 é paralela a f_α , pois f e f_α são rectas paralelas (rectas frontais de um plano são paralelas entre si e paralelas ao traço frontal do plano, que é uma recta frontal do plano com afastamento nulo).

**330.**

O plano fica definido pelas duas rectas. Uma vez que as projecções da recta de perfil não verificam o Critério de Reversibilidade, a utilidade da recta de perfil para a resolução do exercício é nula (ver exercício 296). Assim sendo, considerou-se que o plano está definido por uma recta (a recta h) e um ponto exterior à recta (o ponto B), ignorando a recta de perfil. Para determinar o traço frontal do plano, que é uma recta, necessitamos de dois pontos ou um ponto e uma direcção. Determinou-se o ponto F , o traço frontal da recta h . Já temos um ponto para definir f_ω – falta-nos outro ponto ou uma direcção. Os dados do plano são insuficientes para definir f_ω , pelo que é necessário o recurso a uma recta auxiliar do plano. Optou-se por se recorrer a uma outra recta horizontal (de nível) do plano – a recta h' . A recta h' está definida por um ponto (o ponto B) e por uma direcção (é paralela à recta h , pois rectas horizontais de um plano são paralelas entre si). Para o acompanhamento das etapas seguintes da resolução do exercício, sugere-se a leitura do relatório do exercício 326. Note que se poderia ter optado por recorrer a uma recta oblíqua como recta auxiliar – essa recta teria de passar pelo ponto B e ser concorrente com a recta h num ponto qualquer.

331.

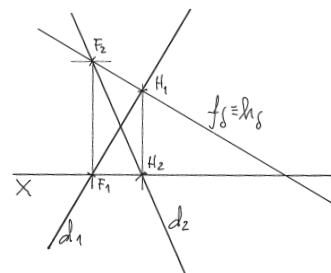
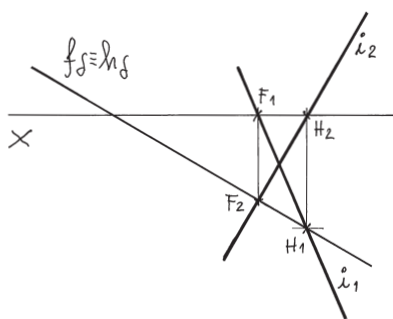
Definiu-se o plano pelos seus traços. Os dados permitiram-nos determinar o traço horizontal da recta, H , que é um ponto de h_α , e, depois, desenhar d_1 , a projecção horizontal da recta d – atendendo a que a recta d é uma recta de maior declive do plano, sabe-se que a sua projecção horizontal é perpendicular a h_α . Em seguida, para desenhar d_2 , a projecção frontal da recta d , teve-se em conta que a recta d é uma recta do plano, pelo que os seus traços têm de estar sobre os traços homónimos do plano (condição para que uma recta pertença a um plano) – ver relatório do exercício 313.

**332.**

Os dados permitiram-nos determinar o traço frontal da recta, F , que é um ponto de f_α , e, depois, desenhar i_2 , a projecção frontal da recta i – atendendo a que a recta i é uma recta de maior inclinação do plano, sabe-se que a sua projecção frontal é perpendicular a f_α . Em seguida, para desenhar i_1 , a projecção horizontal da recta i , teve-se em conta que a recta i é uma recta do plano, pelo que os seus traços têm de estar sobre os traços homónimos do plano (condição para que uma recta pertença a um plano) – ver relatório do exercício 313.

333.

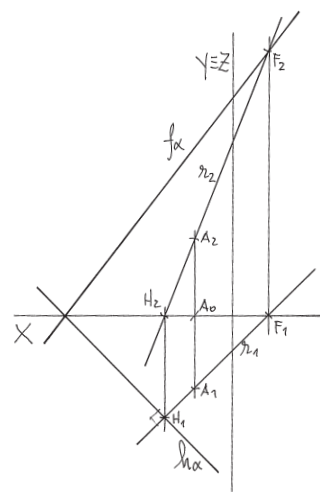
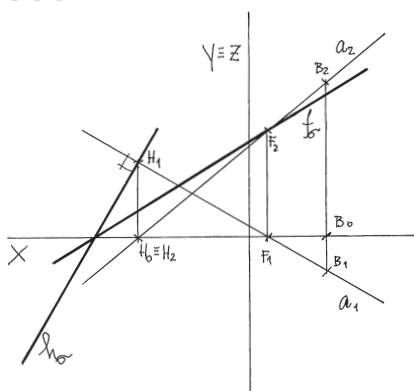
Ver relatório do exercício 331. Note que, sendo dada a cota do traço frontal da recta d (ponto F), foi possível determinar as duas projecções de $F - d_1$ passa por F_1 e é perpendicular a h_g .

**334.**

Ver relatório do exercício 332. Note que, sendo dado o afastamento do traço horizontal da recta i (ponto H), foi possível determinar as duas projecções de $H - i_2$ passa por H_2 e é perpendicular a f_g .

335.

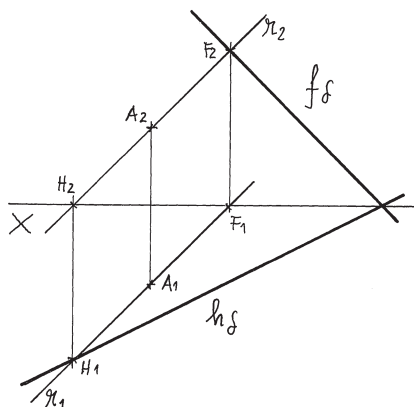
Desenharam-se as projecções da recta r , em função dos dados. Para que uma recta pertença a um plano, os seus traços têm de estar sobre os traço homónimos do plano. De forma inversa, para um plano conter uma determinada recta, os traços do plano têm de conter os traço homónimos da recta. Assim, determinaram-se os traços da recta r nos planos de projecção. Para determinar o traço horizontal do plano, que é uma recta, são necessários dois pontos ou um ponto e uma direcção. O traço horizontal de α tem de passar por H (traço horizontal de r), pelo que já temos um ponto para definir h_α . Falta-nos outro ponto ou uma direcção. Uma vez que a recta r é uma recta de maior declive do plano α , sabe-se que r_1 é perpendicular a h_α , ou seja, que h_α é perpendicular a r_1 . Já temos a direcção de $h_\alpha - h_\alpha$ está definido por um ponto (H) e por uma direcção (é perpendicular a r_1). Para definir f_α já temos dois pontos - F , o traço frontal da recta r , e o ponto de concorrência dos dois traços do plano (o ponto em que o plano corta o eixo X).

**336.**

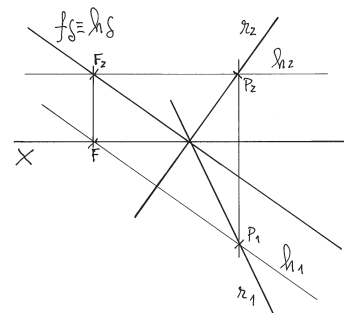
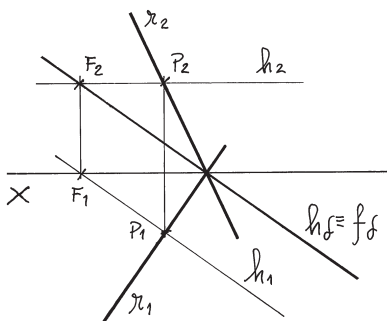
Desenharam-se as projecções da recta a , em função dos dados. Para um plano conter uma determinada recta, os traços do plano têm de conter os traço homónimos da recta. Assim, determinaram-se os traços da recta a nos planos de projecção. Para determinar o traço frontal do plano, que é uma recta, são necessários dois pontos ou um ponto e uma direcção. O traço frontal de σ tem de passar por F (traço frontal de a), pelo que já temos um ponto para definir f_σ . Falta-nos outro ponto ou uma direcção. Uma vez que a recta a é uma recta de maior inclinação do plano σ , sabe-se que a_2 é perpendicular a f_σ , ou seja, que f_σ é perpendicular a a_2 . Já temos a direcção de $f_\sigma - f_\sigma$ está definido por um ponto (F) e por uma direcção (é perpendicular a a_2). Para definir h_σ já temos dois pontos - H , o traço horizontal da recta a , e o ponto de concorrência dos dois traços do plano (o ponto em que o plano corta o eixo X).

337.

Ver relatório do exercício anterior.

**338.**

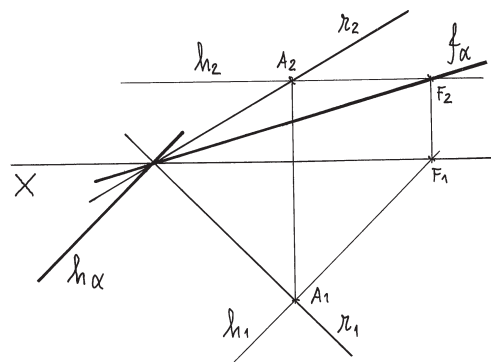
Para definir a recta r necessitamos de dois pontos ou de um ponto e uma direcção. A recta r é passante, pelo que é concorrente com o eixo X no ponto em que o plano corta o eixo X (no ponto de concorrência dos traços do plano – ver exercício 318). Já temos um ponto para definir a recta. Falta-nos outro ponto ou uma direcção. Como se trata de uma recta de maior inclinação do plano, é possível desenhar imediatamente a sua projecção frontal – r_2 é perpendicular a f_δ . Os dados do plano são insuficientes para definir a recta r , pelo que é necessário o recurso a uma recta auxiliar do plano. A recta auxiliar do plano a que se recorreu foi uma recta horizontal (de nível), h , do plano – ver exercício 326. As rectas r e h são coplanares, pelo que ou são paralelas ou são concorrentes. Não são paralelas, pelo que são concorrentes, pelo que existe um ponto de concorrência – ponto P . Já temos outro ponto para definir a recta. A recta r está, assim, definida por dois pontos – o seu ponto de concorrência com o eixo X e o ponto P . Note que a recta auxiliar a que se recorreu poderia ter sido uma recta paralela à recta r , de acordo com os raciocínios expostos no relatório do exercício 319.

**339.**

Ver exercício anterior, atendendo a que, tratando-se de uma recta de maior declive do plano, é a projecção horizontal da recta, r_1 , que é perpendicular a h_δ .

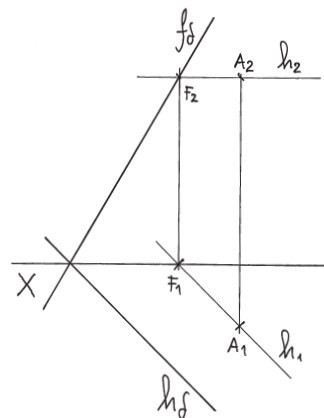
340.

Desenharam-se as projecções da recta r , em função dos dados. A recta r é uma recta de maior declive do plano α , o que nos permite, imediatamente, definir o traço horizontal do plano – h_α está definido por um ponto (o ponto de concorrência da recta r com o eixo X) e por uma direcção (é perpendicular a r_1). Para definir f_α , que é uma recta, necessitamos de dois pontos ou um ponto e uma direcção. Já temos um ponto – o ponto de concorrência dos traços do plano. Falta-nos outro ponto ou uma direcção. Os dados do plano são insuficientes para definir f_α , pelo que é necessário o recurso a uma recta auxiliar do plano. A recta auxiliar do plano a que se recorreu foi uma recta horizontal (de nível), h , do plano – a recta h está definida por um ponto (o ponto P , que é o ponto de concorrência com a recta r) e uma direcção (é paralela a h_α , pois rectas horizontais de um plano são paralelas entre si e paralelas ao traço horizontal do plano). Em seguida, determinou-se F , o traço frontal da recta h . Já temos outro ponto para definir f_α – f_α está definido por dois pontos (F e o ponto de concorrência dos traços do plano).

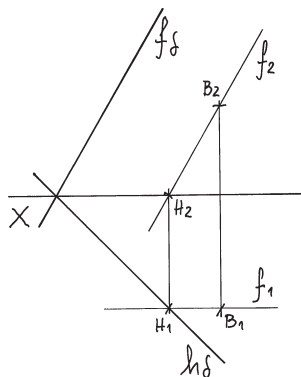


341.

Para que um ponto pertença a um plano, o ponto tem de pertencer a uma recta que pertença ao plano. Assim, em primeiro lugar há que desenhar as projecções de uma recta do plano, à qual pertença o ponto **A**. Neste caso, em que apenas é dada a cota de **A**, poderia ter-se recorrido a uma recta qualquer do plano, mas optou-se por seguir o raciocínio exposto no relatório do exercício 286. Recorreu-se a uma recta horizontal (de nível) do plano com 5 cm de cota – a recta **h**. A recta **h** (que está definida por um ponto e uma direcção – ver alínea **a**) do exercício 320) é o lugar geométrico dos pontos do plano que têm 5 cm de cota, ou seja, **todos os pontos do plano que têm 5 cm de cota** estão contidos na recta **h**. O ponto **A** é, assim, um ponto qualquer da recta **h**.



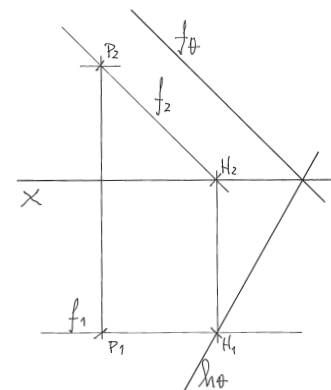
342.



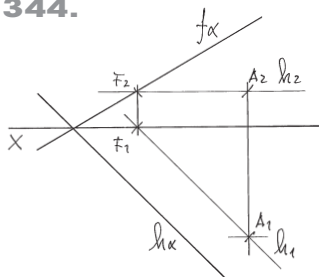
Seguindo o raciocínio do exercício anterior, em primeiro lugar há que desenhar as projecções de uma recta do plano à qual o ponto pertença (condição para que um ponto pertença a um plano). De forma semelhante à exposta no relatório do exercício anterior, e porque é dado o afastamento do ponto **B**, recorreu-se a uma recta frontal (de frente) do plano com 3 cm de afastamento – a recta **f**. A recta **f** (que está definida por um ponto e uma direcção – ver alínea **a**) do exercício 321) é o lugar geométrico dos pontos do plano que têm 3 cm de afastamento, ou seja, **todos os pontos do plano que têm 3 cm de afastamento** estão contidos na recta **f**. O ponto **B** é, assim, um ponto qualquer da recta **f**.

343.

Atendendo à **condição para que um ponto pertença a um plano**, é necessário desenhar as projecções de uma recta auxiliar do plano, à qual o ponto pertença. Essa recta não pode ser uma recta qualquer – tem de ser uma recta do plano tal que seja possível garantir que o ponto pertença à recta, antes de desenhar as projecções da recta. Uma vez que o ponto tem 4 cm de afastamento, optou-se por representar o **lugar geométrico dos pontos da recta que têm 4 cm de afastamento** – esse lugar geométrico é uma recta frontal (de frente) do plano, com 4 cm de afastamento (a recta **f**). A recta **f** está definida por um ponto e uma direcção (ver alínea **a**) do exercício 321). Todos os pontos da recta **f** pertencem ao plano e têm 4 cm de afastamento – o ponto **P** é o ponto da recta **f** que tem 3 cm de cota. Uma outra hipótese de resolução do exercício seria desenhar as projecções de uma recta horizontal (de nível) do plano com 3 cm de cota – essa recta seria, então, o lugar geométrico dos pontos do plano com 3 cm de cota e o ponto **P** seria, nessa situação, o ponto da recta que tivesse 4 cm de afastamento.



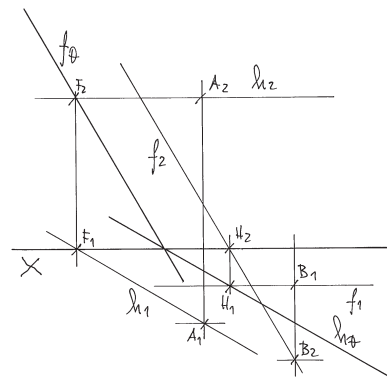
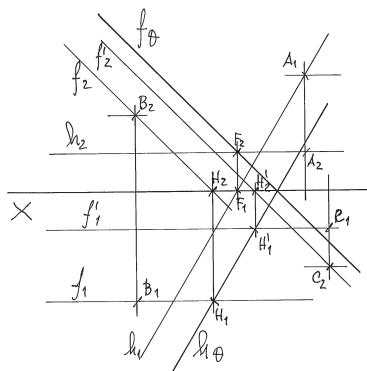
344.



Ver relatório do exercício anterior. A recta a que se recorreu para obter as projecções do ponto **A** foi uma recta **h**, horizontal (de nível), do plano, com 1 cm de cota (a cota de **A**) – o ponto **A** é o ponto de **h** que tem 3 cm de afastamento.

345.

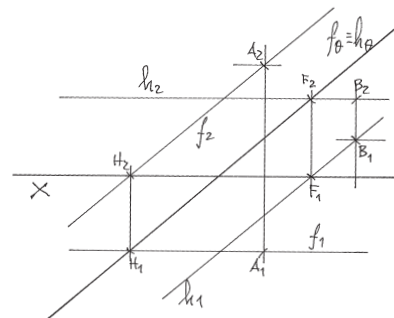
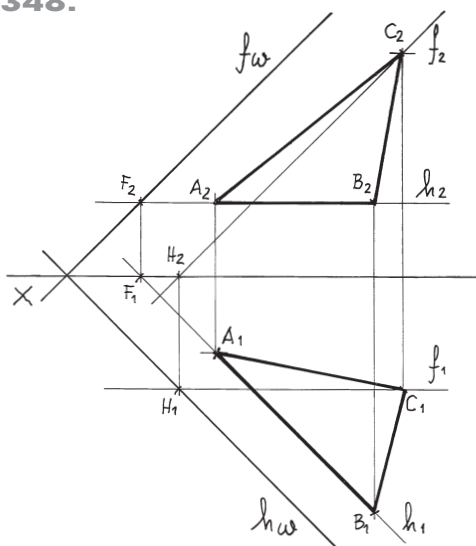
Ver relatórios dos exercícios 343 e 344, respectivamente para os pontos **B** e **A**. A recta **f** foi a recta frontal (de frente) do plano com 1 cm de afastamento a que se recorreu para obter as projecções do ponto **B**. A recta **h** foi a recta horizontal (de nível) do plano com 4 cm de cota a que se recorreu para obter as projecções do ponto **A**.

**346.**

Ver relatório do exercício 343 para os pontos **B** e **C**. A recta **f** foi a recta frontal (de frente) do plano com 3 cm de afastamento a que se recorreu para obter as projecções do ponto **B**. A recta **f'** foi a recta frontal (de frente) do plano com 1 cm de afastamento a que se recorreu para obter as projecções do ponto **C**. Ver relatório do exercício 344 para o ponto **A**. A recta **h** foi a recta horizontal (de nível) do plano com 1 cm de cota a que se recorreu para obter as projecções do ponto **A**.

347.

Ver relatórios dos exercícios 343 e 344, respectivamente para os pontos **A** e **B**. A recta **f** foi a recta frontal (de frente) do plano com 2 cm de afastamento a que se recorreu para obter as projecções do ponto **A**. A recta **h** foi a recta horizontal (de nível) do plano com 2 cm de cota a que se recorreu para obter as projecções do ponto **B**.

**348.**

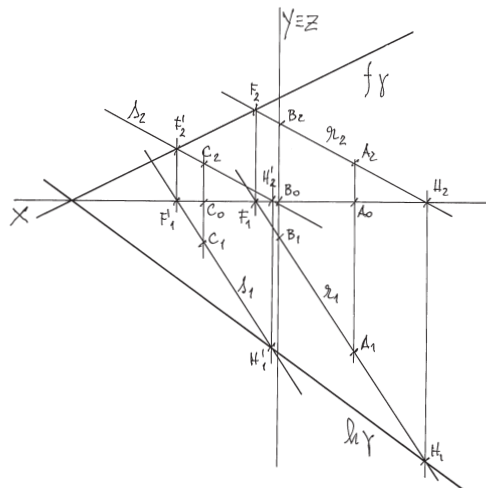
Definiu-se o plano pelos seus traços e determinaram-se as projecções do ponto **A** (ver exercício 344). O lado **[AB]** do triângulo é horizontal (de nível), pelo que está contido na recta **h** – a recta **h** é a recta suporte do segmento **[AB]**. O segmento mede 6 cm. Como se trata de um segmento horizontal (de nível), paralelo ao Plano Horizontal de Projectão, a sua V.G. pode medir-se na projecção horizontal do segmento (ver exercício 242). Assim, a partir de **A1**, sobre **h1**, mediram-se os 6 cm, obtendo as projecções de **B** (que tem de estar no 1º Diedro, pois o triângulo situa-se, na totalidade, no espaço do 1º Diedro). Em seguida, determinaram-se as projecções do ponto **C**, conforme exposto no relatório do exercício 343. A partir das projecções dos três vértices do triângulo, desenharam-se as projecções do polígono.

349.

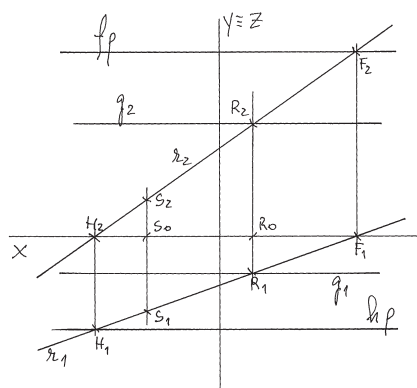
Por **alfabeto do plano** entende-se a classificação dos planos, em função da sua posição em relação aos planos de projecção, e o estudo da respectiva representação.

350.

Desenharam-se as projecções das duas rectas e determinaram-se os traços do plano (ver relatório do exercício 301). Este plano é oblíquo em relação aos dois planos de projecção e é secante ao eixo **X**. Trata-se de um **plano oblíquo**. O traço frontal do plano é uma recta frontal (de frente) do plano com afastamento nulo. O traço horizontal do plano é uma recta horizontal (de nível) do plano com cota nula.



351.

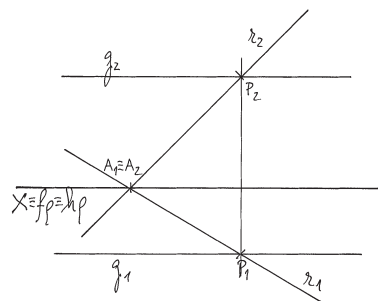


Definiu-se o plano pelas projecções das duas rectas. Em seguida, determinaram-se os traços da recta r nos planos de projecção, pois para que a recta r pertença ao plano tem de ter os seus traços sobre os traços homónimos do plano. A recta g não tem traços, pois é paralela a ambos os planos de projecção (ver exercício 219). Para determinar o traço frontal do plano, que é uma recta, são necessários dois pontos ou um ponto e uma direcção. Já temos um ponto – F , o traço frontal da recta r . Falta-nos outro ponto ou um ponto e uma direcção. O traço frontal do plano é uma recta frontal (de frente) do plano, com afastamento nulo. A recta fronto-horizontal é um caso particular das rectas frontais (de frente). Atendendo a que rectas frontais (de frente) de um plano são paralelas entre si, e paralelas ao traço frontal do plano, constata-se que o traço frontal do plano é paralelo à recta g – já temos a direcção de f_p . f_p está definido por um ponto (F) e por uma direcção (é fronto-horizontal). Para determinar o traço horizontal do plano, que é uma recta, são necessários dois pontos ou um ponto e uma direcção. Já temos um ponto – H , o traço horizontal da recta r . Falta-nos outro ponto ou um ponto e uma direcção. O traço horizontal do plano

é uma recta horizontal (de nível) do plano, com cota nula. A recta fronto-horizontal é um caso particular das rectas horizontais (de nível). Atendendo a que rectas horizontais (de nível) de um plano são paralelas entre si, e paralelas ao traço horizontal do plano, constata-se que o traço horizontal do plano é paralelo à recta **g** – já temos a direcção de **h_p**. **h_p** está definido por um ponto (**H**) e por uma direcção (é fronto-horizontal). Note que esta é a única situação em que os traços de um plano são paralelos entre si – são concorrentes num ponto do infinito, pois rectas paralelas são rectas concorrentes num ponto do infinito (ver exercício 12). O plano é oblíquo aos dois planos de projecção e paralelo ao eixo **X** – é um **plano de rampa**. **f_p** é uma recta fronto-horizontal com afastamento nulo e **h_p** é uma recta fronto-horizontal com cota nula. O plano atravessa o 4º, o 1º e o 2º Diedros.

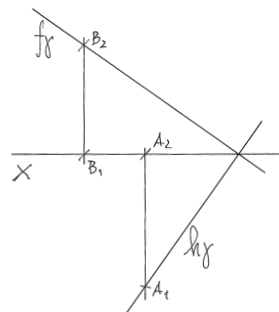
352.

Em primeiro lugar, definiu-se o plano, pelas projecções das duas rectas. Em seguida, determinaram-se os traços da recta **r** nos planos de projecção, pois para que a recta **r** pertença ao plano tem de ter os seus traços sobre os traços homónimos do plano. O traço frontal da recta **r** é o ponto da recta que tem tem afastamento nulo – o único ponto da recta que tem afastamento nulo é o ponto **A**, que é o ponto de concorrência da recta com o eixo **X**. O traço horizontal da recta **r** é o ponto da recta que tem cota nula – o único ponto da recta que tem cota nula é o ponto **A**, que é o ponto de concorrência da recta com o eixo **X**. O ponto **A** é, assim, simultaneamente o traço frontal e o traço horizontal da recta **r**. A recta **g** é fronto-horizontal, pelo que não tem traços nos planos de projecção (ver exercício 219). O traço frontal do plano passa pelo ponto **A** e é paralelo à recta **g** (ver relatório do exercício anterior). O traço horizontal do plano passa pelo ponto **A** e é paralelo à recta **g** (ver relatório do exercício anterior). Os dois traços do plano estão, assim, coincidentes no eixo **X**. O plano é oblíquo aos dois planos de projecção e **contém** o eixo **X** («passa» pelo eixo **X**) – é um **plano passante**. Os seus traços são, ambos, rectas fronto-horizontais, de cota e afastamento nulos (o eixo **X**). O plano atravessa o 1º e o 3º *Diedros*.

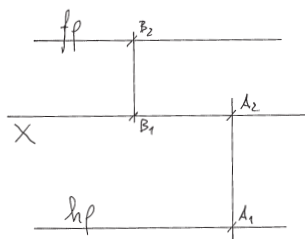


353.

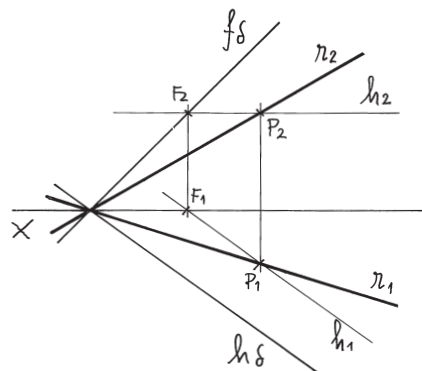
Definiu-se o plano pelos seus traços. Ambos os pontos têm de verificar a condição para que um ponto pertença a um plano – têm, ambos, de pertencer a rectas do plano. O ponto **A** tem cota nula – é um ponto do Plano Horizontal de Projecção (v_0). Todos os pontos do plano que têm cota nula pertencem a h_γ , pois h_γ é uma recta horizontal (de nível) do plano, com cota nula. O ponto **A** pode, assim, ser um ponto qualquer de h_γ que tenha afastamento positivo – o ponto **A** está no **SPHA**. Todos os pontos do plano que têm afastamento nulo pertencem a f_γ , pois f_γ é uma recta frontal (de frente) do plano, com afastamento nulo. O ponto **B** pode, assim, ser um ponto qualquer de f_γ que tenha cota positiva – o ponto **B** está no **SPFS**.

**354.**

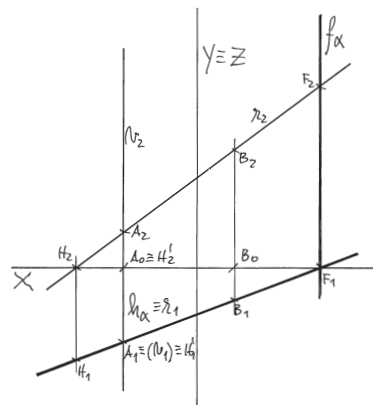
Ver relatório do exercício anterior.

**355.**

Ver relatório do exercício 319. Note que, na presente situação, a recta auxiliar a que se recorreu foi uma recta horizontal (de nível) do plano – ver exercício 338.

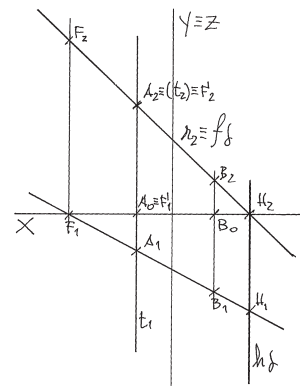
**356.**

Em primeiro lugar, definiu-se o plano pelas projecções das duas rectas. Em seguida, determinaram-se os traços das duas rectas nos planos de projecção, pois os traços do plano têm de conter os traços homónimos das rectas que lhe pertencem. A recta **v** não tem traço frontal, pois é paralela ao Plano Frontal de Projecção. Para determinar o traço frontal do plano, que é uma recta, são necessários dois pontos ou um ponto e uma direcção. Já temos um ponto – **F**, o traço frontal da recta **r**. Falta-nos outro ponto ou um ponto ou uma direcção. O traço frontal do plano é uma recta frontal (de frente) do plano, com afastamento nulo. A recta vertical é um caso particular das rectas frontais (de frente) – é uma recta frontal que é ortogonal ao Plano Horizontal de Projecção. Atendendo a que rectas frontais (de frente) de um plano são paralelas entre si, e paralelas ao traço frontal do plano, constata-se que o traço frontal do plano é paralelo à recta **v** – já temos a direcção de f_α . f_α está definido por um ponto (**F**) e por uma direcção (é vertical). O traço horizontal do plano, que é uma recta, fica definido pelos traços horizontais das duas rectas – **H** e **H'**. Constata-se, assim, que o traço horizontal do plano fica coincidente com a projecção horizontal da recta **r** – $h_\alpha \equiv r_1$. Um outro processo para determinar f_α seria determinar, primeiro, h_α e, depois, já teríamos dois pontos para definir f_α – **F**, o traço frontal da recta **r**, e o ponto de concorrência dos dois traços do plano. O plano é **oblíquo** ao Plano Frontal de Projecção e **ortogonal** ao Plano Horizontal de Projecção. Trata-se de um **plano vertical** (é um plano **projectante horizontal**). f_α é uma **recta vertical** com afastamento nulo e h_α é uma **recta horizontal (de nível)** com cota nula.

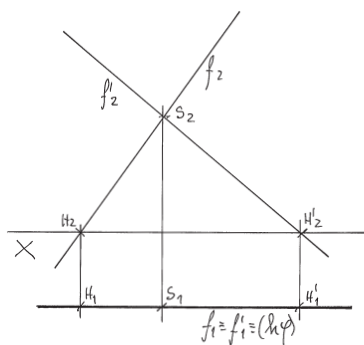


357.

Em primeiro lugar, definiu-se o plano pelas projecções das duas rectas. Em seguida, determinaram-se os traços das duas rectas nos planos de projecção, pois os traços do plano têm de conter os traços homónimos das rectas que lhe pertencem. A recta t não tem traço horizontal, pois é paralela ao Plano Horizontal de Projecção. Para determinar o traço horizontal do plano, que é uma recta, são necessários dois pontos ou um ponto e uma direcção. Já temos um ponto – H , o traço horizontal da recta r . Falta-nos outro ponto ou uma direcção. O traço horizontal do plano é uma recta horizontal (de nível) do plano, com cota nula. A recta de topo é um caso particular das rectas horizontais (de nível) – é uma recta horizontal que é ortogonal ao Plano Frontal de Projecção. Atendendo a que rectas horizontais (de nível) de um plano são paralelas entre si, e paralelas ao traço horizontal do plano, constata-se que o traço horizontal do plano é paralelo à recta t – já temos a direcção de h_δ . h_δ está definido por um ponto (H) e por uma direcção (é de topo). O traço frontal do plano, que é uma recta, fica definido pelos traços frontais das duas rectas – F e F' . Constata-se, assim, que o traço frontal do plano fica coincidente com a projecção frontal da recta $r - f_\delta \equiv r_2$. Um outro processo para determinar h_δ seria determinar, primeiro, f_δ e, depois, já teríamos dois pontos para definir $h_\delta - H$, o traço horizontal da recta r , e o ponto de concorrência dos dois traços do plano. O plano é **obliquo** ao Plano Horizontal de Projecção e **ortogonal** ao Plano Frontal de Projecção. Trata-se de um **plano de topo** (é um plano **projectante frontal**). h_δ é uma **recta de topo** com cota nula e f_δ é uma **recta frontal (de frente)** com afastamento nulo.



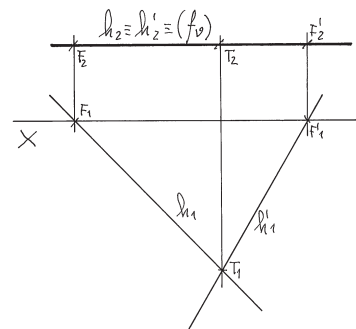
358.



Em primeiro lugar, definiu-se o plano pelas projecções das duas rectas. Note que, para que duas rectas frontais (de frente) sejam concorrentes, as suas projecções horizontais têm de ser coincidentes. Em seguida, determinaram-se os traços das duas rectas nos planos de projecção. Nenhuma das duas rectas, f e f' , tem traço frontal, pois ambas são paralelas ao Plano Frontal de Projecção. O traço horizontal do plano, que é uma recta, fica definido pelos traços horizontais das duas rectas – H e H' . O traço horizontal do plano fica coincidente com as projecções horizontais das duas rectas. Uma vez que as duas rectas que definem o plano são paralelas ao Plano Frontal de Projecção, constata-se que o plano por elas definido é **necessariamente** paralelo ao Plano Frontal de Projecção, pelo que o plano não tem traço frontal – não há nenhuma recta do plano que tenha afastamento nulo (o traço frontal de um plano é uma recta frontal do plano **com afastamento nulo**). Assim, este plano fica definido por um único traço – o seu traço horizontal. Note que, neste caso, em que o plano tem **um único traço**, esse traço se deve assinalar **necessariamente** entre parêntesis – (h_ϕ) . O plano é **paralelo** ao Plano Frontal de Projecção e **ortogonal** ao Plano Horizontal de Projecção. Trata-se de um **plano frontal (de frente)** – é um plano **projectante horizontal**. O traço horizontal do plano é uma recta fronto-horizontal do plano, com cota nula. Este plano é o **lugar geométrico dos pontos do espaço que têm 2 cm de afastamento**.

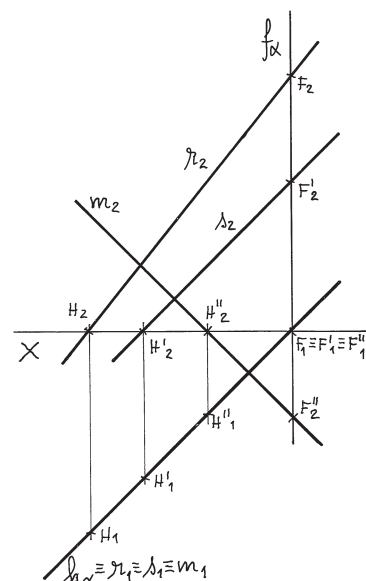
359.

Em primeiro lugar, definiu-se o plano pelas projecções das duas rectas. Note que, para que duas rectas horizontais (de nível) sejam concorrentes, as suas projecções frontais têm de ser coincidentes. Em seguida, determinaram-se os traços das duas rectas nos planos de projecção. Nenhuma das duas rectas, h e h' , tem traço horizontal, pois ambas são paralelas ao Plano Horizontal de Projecção. O traço frontal do plano, que é uma recta, fica definido pelos traços frontais das duas rectas – F e F' . O traço frontal do plano fica coincidente com as projecções frontais das duas rectas. Uma vez que as duas rectas que definem o plano são paralelas ao Plano Horizontal de Projecção, constata-se que o plano por elas definido é **necessariamente** paralelo ao Plano Horizontal de Projecção, pelo que o plano não tem traço horizontal – não há nenhuma recta do plano que tenha cota nula (o traço horizontal de um plano é uma recta horizontal do plano **com cota nula**). Assim, este plano fica definido por um único traço – o seu traço frontal. Note que, neste caso, em que o plano tem **um único traço**, esse traço se deve assinalar **necessariamente** entre parêntesis – (f_ϕ) . O plano é **paralelo** ao Plano Horizontal de Projecção e **ortogonal** ao Plano Frontal de Projecção. Trata-se de um **plano horizontal (de nível)** – é um plano **projectante frontal**. O traço frontal do plano é uma recta fronto-horizontal do plano, com afastamento nulo. Este plano é o **lugar geométrico dos pontos do espaço que têm 2 cm de cota**.

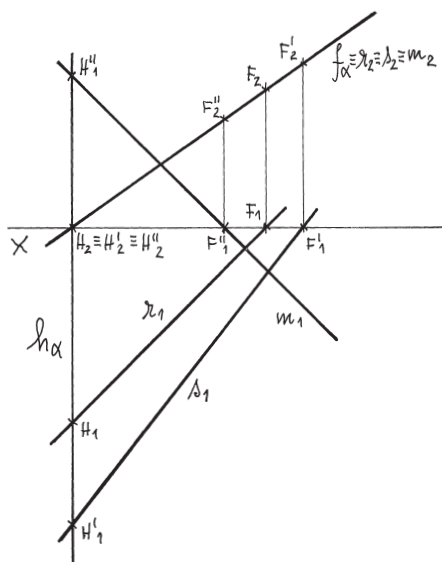


360.

Representou-se o plano pelos seus traços. Trata-se de um plano projectante horizontal (um plano vertical), pelo que o seu traço frontal é uma recta vertical. Por outro lado, o diedro que o plano faz com o Plano Frontal de Projectação projecta-se em V.G. no Plano Horizontal de Projectação, no ângulo que o traço horizontal do plano faz com o eixo $X - h_\alpha$ faz, com o eixo X , um ângulo de 45° (a.e.). Em seguida, desenharam-se as projecções de três rectas oblíquas, pertencentes ao plano – as rectas r , s e m (ver exercício 313). Começou-se por se desenhar a projecção frontal de cada uma das rectas e constatou-se que as projecções horizontais das rectas pertencentes ao plano estão sobre o traço horizontal do plano. Note que, caso se comesasse por desenhar a projecção horizontal das rectas, poder-se-ia chegar a situações em que a recta **não pertenceria** ao plano de forma alguma. A **característica fundamental** deste tipo de planos é que projecta horizontalmente todas as suas rectas e pontos, no seu traço horizontal – é um plano projectante horizontal (estabeleça uma comparação entre este plano e uma recta projectante horizontal).



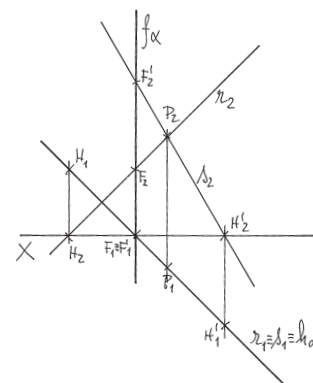
361.



Representou-se o plano pelos seus traços. Trata-se de um plano projectante frontal (um plano de topo), pelo que o seu traço horizontal é uma recta de topo. Por outro lado, o diedro que o plano faz com o Plano Horizontal de Projectação projecta-se em V.G. no Plano Frontal de Projectação, no ângulo que o traço frontal do plano faz com o eixo $X - f_\alpha$ faz, com o eixo X , um ângulo de 35° (a.d.). Em seguida, desenharam-se as projecções de três rectas oblíquas, pertencentes ao plano – as rectas r , s e m (ver exercício 313). Começou-se por se desenhar a projecção horizontal de cada uma das rectas e constatou-se que as projecções frontais das rectas pertencentes ao plano estão sobre o traço frontal do plano. Note que, caso se comesasse por desenhar a projecção frontal das rectas, poder-se-ia chegar a situações em que a recta **não pertenceria** ao plano de forma alguma. A **característica fundamental** deste tipo de planos é que projecta frontalmente todas as suas rectas e pontos, no seu traço frontal – é um plano projectante frontal (estabeleça uma comparação entre este plano e uma recta projectante frontal).

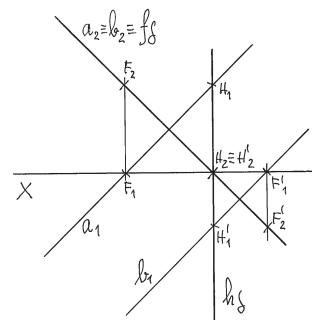
362.

Desenharam-se as projecções das duas rectas (concorrentes sobre as projecções homónimas de um ponto P , que é o ponto de concorrência) e determinaram-se os traços das rectas nos planos de projecção (para que o plano contenha as rectas, os traços do plano têm de conter os traços homónimos das rectas que lhe pertencem). f_α , que é uma recta, fica definido por dois pontos – F e F' , os traços frontais das rectas r e s , respectivamente. h_α , que é uma recta, fica definido por dois pontos – H e H' , os traços horizontais das rectas r e s , respectivamente. Note que o traço horizontal do plano fica coincidente com as projecções horizontais das duas rectas – trata-se, pois, de um **plano projectante horizontal** (é um **plano vertical**), pois projecta todas as suas rectas e pontos no Plano Horizontal de Projectação, no seu traço horizontal.

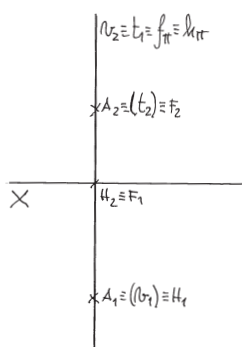


363.

Desenharam-se as projecções das duas rectas e determinaram-se os traços das rectas nos planos de projecção (os traços do plano têm de conter os traços homónimos das rectas que lhe pertencem). f_8 , que é uma recta, fica definido por dois pontos – F e F' , os traços frontais das rectas a e b , respectivamente. h_8 , que é uma recta, fica definido por dois pontos – H e H' , os traços horizontais das rectas a e b , respectivamente. Note que o traço frontal do plano fica coincidente com as projecções frontais das duas rectas – trata-se, pois, de um **plano projectante frontal** (é um **plano de topo**), pois projecta todas as suas rectas e pontos no Plano Frontal de Projecção, no seu traço frontal.



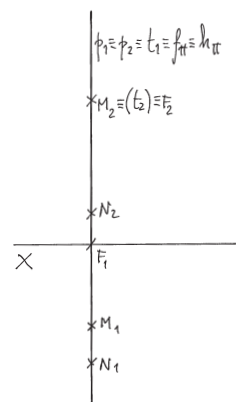
364.



Em primeiro lugar, definiu-se o plano pelas projecções das duas rectas. Note que se tem **necessariamente** $v_2 \equiv t_1$. Em seguida, determinaram-se os traços das duas rectas nos planos de projecção. A recta v (vertical) não tem traço frontal, pois é paralela ao Plano Frontal de Projecção. A recta t (de topo) não tem traço horizontal, pois é paralela ao Plano Horizontal de Projecção. Para determinar o traço frontal do plano, que é uma recta, são necessários dois pontos ou um ponto e uma direcção. Já temos um ponto – F , o traço frontal da recta t . Falta-nos outro ponto ou um ponto ou uma direcção. O traço frontal do plano é uma recta frontal (de frente) do plano, com afastamento nulo. A recta vertical é um caso particular das rectas frontais (de frente) – atendendo a que rectas frontais (de frente) de um plano são paralelas entre si, e paralelas ao traço frontal do plano, constata-se que o traço frontal do plano é paralelo à recta v (ver exercício 356). Já temos a direcção de $f_\pi - f_\pi$ está definido por um ponto (F) e por uma direcção (é vertical). Para determinar o traço horizontal do plano, que é uma recta, são necessários dois pontos ou um ponto e uma direcção. Já temos um ponto – H , o traço horizontal da recta v . Falta-nos outro ponto ou um ponto ou uma direcção. O traço horizontal do plano é uma recta horizontal (de nível) do plano, com cota nula. A recta de topo é um caso particular das rectas horizontais (de nível) – atendendo a que rectas horizontais (de nível) de um plano são paralelas entre si, e paralelas ao traço horizontal do plano, constata-se que o traço horizontal do plano é paralelo à recta t (ver exercício 357). Já temos a direcção de $h_\pi - h_\pi$ está definido por um ponto (H) e por uma direcção (é de topo). Note que f_π e h_π ficam coincidentes. O plano é **ortogonal** aos dois planos de projecção – é um **plano de perfil** (é um plano que é simultaneamente **projectante frontal** e **projectante horizontal** – é um plano **duplamente projectante**). f_π é uma recta frontal com afastamento nulo e h_π é uma recta de topo com cota nula. Este plano é o **lugar geométrico dos pontos do espaço que têm a abscissa do ponto A**.

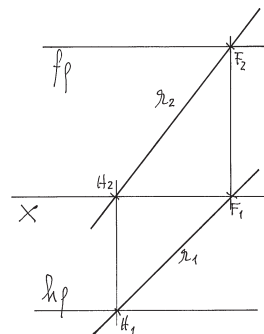
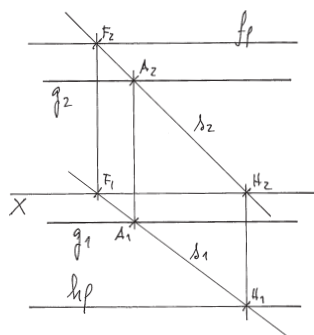
365.

Em primeiro lugar, definiu-se o plano pelas projecções das duas rectas. Note que se tem **necessariamente** $p_1 \equiv p_2 \equiv t_1$. Em seguida, determinaram-se os traços das rectas nos planos de projecção. A recta t (de topo) não tem traço horizontal, pois é paralela ao Plano Horizontal de Projecção. Não é possível determinar os traços da recta p de forma directa, pois as projecções da recta de perfil não verificam o Critério de Reversibilidade, pelo que não é possível determinar quaisquer outros pontos da recta, para além dos pontos dados. No entanto, sabe-se que o traço frontal da recta p tem **necessariamente** a abscissa de F , o traço frontal da recta t . Assim, f_π passa por F e por um outro ponto com afastamento nulo (o traço frontal de p), que, não tendo sido determinado, se situa na mesma linha de chamada – f_π é uma recta vertical com afastamento nulo. Por outro lado, sabe-se que h_π é paralelo à recta t (ver exercício 357) e é concorrente com f_π no eixo X , pelo que h_π é uma recta de topo com cota nula. Trata-se, portanto, de um **plano de perfil**. Note que, recorrendo à visualização no espaço, era possível chegar à mesma conclusão – um plano definido por uma recta de topo e uma recta de perfil é **necessariamente** um plano de perfil.



366.

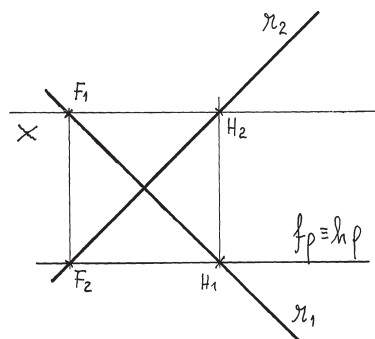
Em primeiro lugar, representou-se o plano de rampa pelos seus traços, que são, ambos, rectas fronto-horizontais. Em seguida, desenhou-se r_1 , em função dos dados. Para que uma recta pertença a um plano, os seus traços têm de estar sobre os traços homónimos do plano. Determinando os traços de r , desenhou-se r_2 (ver exercício 313).

**367.**

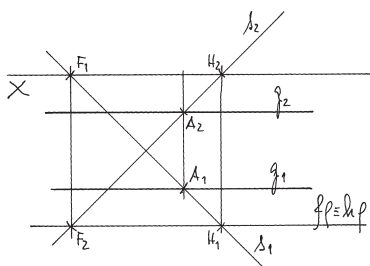
Em primeiro lugar, representou-se o plano de rampa pelos seus traços, que são, ambos, rectas fronto-horizontais. Em seguida desenhou-se g_2 , em função dos dados. Para definir uma recta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direcção. Uma vez que já é conhecida a direcção da recta g (é uma recta fronto-horizonta), falta-nos um ponto para definir a recta. Os dados do plano são insuficientes para definir a recta, pelo que é necessário recorrer a uma recta auxiliar do plano. Recorreu-se a uma recta oblíqua s , auxiliar, pertencente ao plano – a recta s está definida por dois pontos, que são os seus traços (ver exercício anterior). As rectas g e s são coplanares, pelo que ou são paralelas ou são concorrentes. Não são paralelas, pelo que são concorrentes, pelo que existe um ponto de concorrência – o ponto A . Já temos o ponto que nos faltava. Por A_1 conduziu-se g_1 . A recta g está definida por um ponto (A) e por uma direcção (é fronto-horizonta).

368.

Note que os traços do plano estão coincidentes **apenas** na folha de papel. De facto, no espaço, atendendo a que os traços de um plano são **duas rectas** desse plano (uma recta contida no Plano Horizontal de Projecção e uma recta contida no Plano Frontal de Projecção), os traços de um plano nunca podem estar coincidentes. O facto de, **na folha de papel**, os dois traços estarem coincidentes, resulta de uma posição específica do plano no referencial em que, após o rebatimento do Plano Frontal de Projecção sobre o Plano Horizontal de Projecção, para a redução da tridimensionalidade à bidimensionalidade, o traço frontal do plano fica sobre o traço horizontal do plano. Assim, há que ter em conta que o problema proposto não difere da situação do exercício 366 (aconselhando-se, por isso, a leitura do respectivo relatório), senão no facto de poder provocar alguma confusão por questões de visualização no espaço.

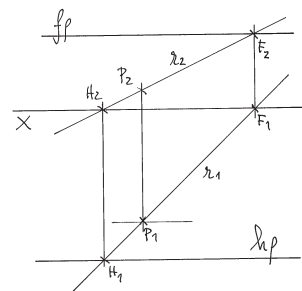
**369.**

Ver relatório dos exercícios 367 e 368.

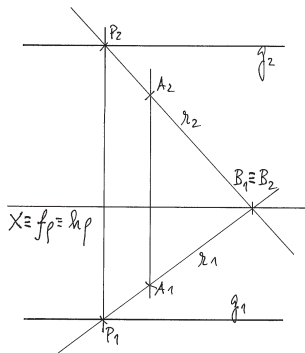


370.

Para que um ponto pertença a um plano, o ponto tem de pertencer a uma recta do plano (ver exercício 341). Recorreu-se a uma recta r , oblíqua, do plano – P pode ser o ponto da recta r que tem 3 cm de afastamento.



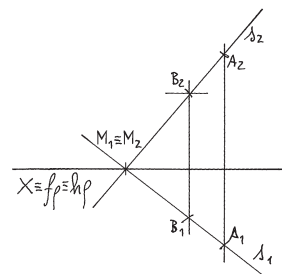
371.



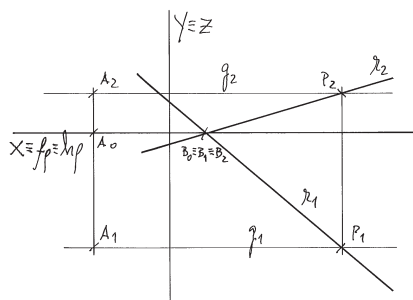
Um plano definido pelo eixo X e por um ponto exterior é **necessariamente** um **plano passante**. Representou-se o plano pelos seus traços (que estão coincidentes no eixo X e, por isso, são uma única recta – o próprio eixo X) e pelo ponto A . Em seguida, desenhou-se g_1 , em função dos dados. Para definir uma recta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direcção. Uma vez que já é conhecida a direcção da recta g (é uma recta fronto-horizontal), falta-nos um ponto para definir a recta. Os dados do plano são insuficientes para definir a recta, pelo que é necessário recorrer a uma recta auxiliar do plano. Recorreu-se a uma recta oblíqua r , auxiliar, pertencente ao plano – a recta r passa pelo ponto A e é concorrente com o eixo X no ponto B , pelo que está definida por dois pontos (A e B). Note que a recta auxiliar teria **necessariamente** de passar pelo ponto A , que é o único ponto conhecido do plano que não se situa no eixo X . As rectas g e r são coplanares, pelo que ou são paralelas ou são concorrentes. Não são paralelas, pelo que são concorrentes, pelo que existe um ponto de concorrência – o ponto P . Já temos o ponto que nos faltava. Por P_2 conduziu-se g_2 . A recta g está definida por um ponto (P) e por uma direcção (é fronto-horizontal).

372.

Em primeiro lugar, representou-se o plano pelos seus traços (que estão coincidentes no eixo X) e pelo ponto A . Para que um ponto pertença a um plano, o ponto tem de pertencer a uma recta do plano (ver exercício 341). Recorreu-se a uma recta s , oblíqua, do plano. A recta s passa por A e é concorrente com o eixo X num ponto M (ver exercício anterior). O ponto P pode ser o ponto da recta s que tem 2 cm de cota.



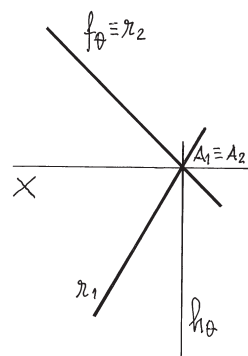
373.



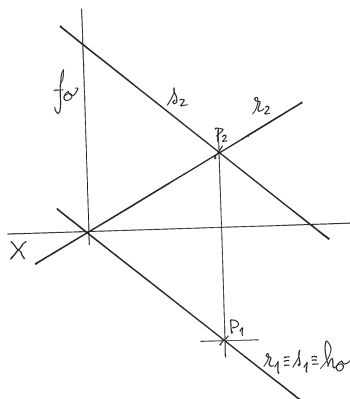
Em primeiro lugar, representou-se o plano pelos seus traços (que estão coincidentes no eixo X) e pelo ponto A . Os dados permitiram-nos desenhar r_1 . Para definir uma recta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direcção. Já temos um ponto da recta – o ponto B . Falta-nos outro ponto ou uma direcção. Os dados do plano são insuficientes para definir a recta, pelo que é necessário recorrer a uma recta auxiliar do plano. Recorreu-se a uma recta fronto-horizontal g , auxiliar, pertencente ao plano – a recta g está definida por um ponto (passa pelo ponto A) e por uma direcção (é fronto-horizontal, paralela aos traços do plano). Note que a recta auxiliar teria **necessariamente** de passar pelo ponto A , que é o único ponto conhecido do plano que não se situa no eixo X . As rectas r e g são coplanares, pelo que ou são paralelas ou são concorrentes. Não são paralelas, pelo que são concorrentes, pelo que existe um ponto de concorrência – o ponto P . Já temos o ponto que nos faltava. Por P_2 e B_2 conduziu-se r_2 . A recta r está definida por dois pontos (B e P). Note que se poderia ter recorrido, como recta auxiliar, a uma recta paralela à recta r e passando pelo ponto A – a recta auxiliar, nesse caso, dar-nos-ia a direcção da recta r , pelo que a recta auxiliar estaria, assim, definida por dois pontos (o ponto A e o seu ponto de concorrência com o eixo X). A recta r , pelo seu lado, estaria definida por um ponto e uma direcção.

374.

Em primeiro lugar representou-se o plano α pelos seus traços (ver exercício 361). Como se trata de um plano projectante frontal, todas as rectas contidas no plano têm a sua projecção frontal sobre o traço frontal do plano (ver exercício 361), pelo que se tem **imediatamente** $r_2 \equiv f_\alpha$. Para definir a recta r necessitamos de dois pontos ou um ponto e uma direcção. O ponto A (o ponto de concorrência dos traços do plano) é o único ponto do plano que pertence ao eixo X (ver exercício 318), pelo que a recta r contém **necessariamente** o ponto A – já temos um ponto para definir a recta. Sendo dada a direcção da projecção horizontal da recta, por A_1 conduziu-se r_1 fazendo, com o eixo X , um ângulo de 60° (a.e.). Note que o raciocínio exposto **é exclusivo dos planos projectantes** – não se aplica aos planos não projectantes.



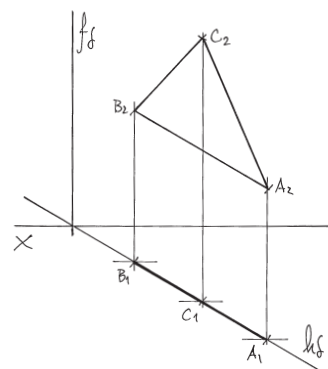
375.



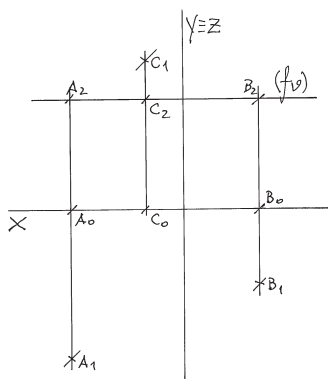
Em primeiro lugar, representou-se o plano α pelos seus traços (ver exercício 360). Como se trata de um plano projectante horizontal, todas as rectas contidas no plano têm a sua projecção horizontal sobre o traço horizontal do plano (ver exercício 360), pelo que se tem **imediatamente** $r_1 \equiv s_1 \equiv h_\alpha$ – as projecções horizontais das duas rectas estão sobre h_α . Em seguida, determinaram-se as projecções do ponto de concorrência das duas rectas (ponto P) – a sua projecção horizontal está sobre as projecções horizontais das duas rectas, ou seja, está sobre h_α . A partir das projecções do ponto de concorrência, desenharam-se as projecções frontais das duas rectas, passando por P_2 . Note que era possível determinar as projecções do ponto P antes de determinar as projecções horizontais das duas rectas. Note ainda que o raciocínio exposto **é exclusivo dos planos projectantes** – não se aplica aos planos não projectantes.

376.

Em primeiro lugar, representou-se o plano δ pelos seus traços (ver exercício 360). Como se trata de um plano projectante horizontal, todas as rectas e pontos contidos no plano têm **necessariamente** a sua projecção horizontal sobre o traço horizontal do plano (ver exercício 360). Este raciocínio, que **é exclusivo dos planos projectantes**, permite-nos determinar, imediatamente, as projecções horizontais dos três pontos, sobre h_δ , em função dos respectivos afastamentos. De facto, para que um ponto pertença a um plano, tem de pertencer a uma recta do plano. Como δ é projectante horizontal, as projecções horizontais de todas as suas rectas estão sobre h_δ . Logo, a projecção horizontal de qualquer ponto que pertença a uma recta de δ tem de estar sobre h_δ . Determinaram-se as projecções dos pontos A , B e C , tal que as suas projecções horizontais estão sobre h_δ e, em seguida, desenharam-se as projecções do triângulo.



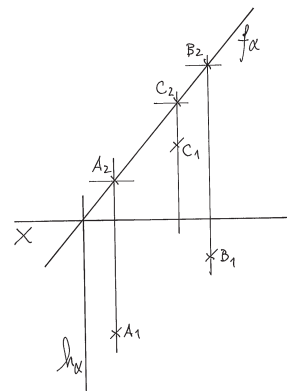
377.



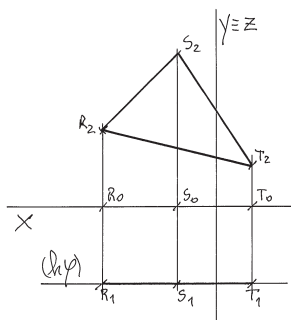
Em primeiro lugar, representou-se o plano v pelo seu traço frontal – note que, tratando-se de um plano horizontal (de nível), este plano não tem traço horizontal (é paralelo ao Plano Horizontal de Projecção) e, por isso, o seu traço frontal tem de ser representado entre parêntesis (ver exercício 359). Como se trata de um plano projectante frontal, todas as rectas e pontos contidos no plano têm **necessariamente** a sua projecção frontal sobre o traço frontal do plano (ver exercício 361). Este raciocínio, que **é exclusivo dos planos projectantes**, permite-nos determinar, imediatamente, as projecções frontais dos três pontos, sobre (f_v) , em função das respectivas abcissas. De facto, para que um ponto pertença a um plano, o ponto tem de pertencer a uma recta do plano. Como v é projectante frontal, as projecções frontais de todas as suas rectas estão sobre (f_v) . Logo, a projecção frontal de qualquer ponto que pertença a uma recta de v tem de estar sobre (f_v) , o que justifica o raciocínio atrás exposto. Uma outra forma de resolver este exercício consistiria em considerar este plano como o **lugar geométrico dos pontos do espaço que têm 2 cm de cota** – todos os pontos do plano têm 2 cm de cota, pelo que os pontos dados têm **necessariamente** de ter 2 cm de cota.

378.

Em primeiro lugar, definiu-se o plano pelos seus traços (ver exercício 361). Como se trata de um plano projectante frontal, todas as rectas e pontos contidos no plano têm **necessariamente** a sua projecção frontal sobre o traço frontal do plano (ver exercício 361). Este raciocínio, que é **exclusivo dos planos projectantes**, permite-nos determinar, imediatamente, as projecções frontais dos três pontos, sobre f_α , em função das respectivas cotas. De facto, para que um ponto pertença a um plano, tem de pertencer a uma recta do plano. Como α é projectante frontal, as projecções frontais de todas as suas rectas estão sobre f_α . Logo, a projecção frontal de qualquer ponto que pertença a uma recta de α tem de estar sobre f_α . Determinaram-se as projecções dos pontos **A**, **B** e **C**, tal que as suas projecções frontais estão sobre f_α .



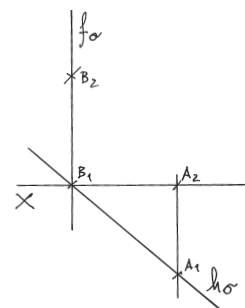
379.



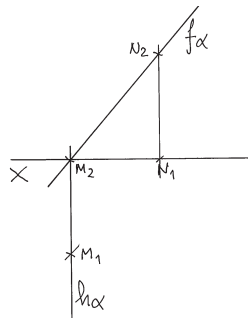
Em primeiro lugar, representou-se o plano ϕ pelo seu traço horizontal – note que, tratando-se de um plano frontal (de frente), este plano não tem traço frontal (é paralelo ao Plano Frontal de Projecção) e, por isso, o seu traço horizontal tem de ser representado entre parêntesis (ver exercício 358). Como se trata de um plano projectante horizontal, todas as rectas e pontos contidos no plano têm **necessariamente** a sua projecção horizontal sobre o traço horizontal do plano (ver exercício 360). Este raciocínio, que é **exclusivo dos planos projectantes**, permite-nos determinar, imediatamente, as projecções horizontais dos três pontos, sobre (h_ϕ) , em função das respectivas abcissas. De facto, para que um ponto pertença a um plano, o ponto tem de pertencer a uma recta do plano. Como ϕ é projectante horizontal, as projecções horizontais de todas as suas rectas estão sobre (h_ϕ) . Logo, a projecção horizontal de qualquer ponto que pertença a uma recta de ϕ tem de estar sobre (h_ϕ) , o que justifica o raciocínio atrás exposto. Uma outra forma de resolver este exercício consistiria em considerar este plano como o **lugar geométrico dos pontos do espaço que têm 2 cm de afastamento** – todos os pontos do plano têm 2 cm de afastamento, pelo que os pontos dados têm **necessariamente** de ter 2 cm de afastamento.

380.

Ver relatório do exercício 353, atendendo a que, nesta situação, f_σ é uma recta vertical (um caso particular das rectas frontais) com afastamento nulo.



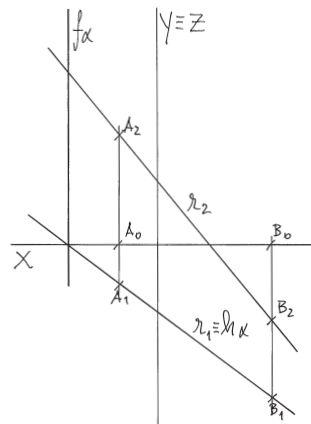
381.



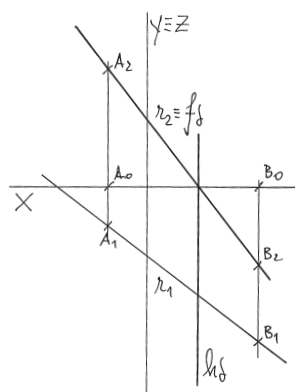
Ver relatório do exercício 353, atendendo a que, nesta situação, h_α é uma recta de topo (um caso particular das rectas horizontais) com cota nula.

382.

Em primeiro lugar, desenharam-se as projecções da recta, em função dos dados. Os planos projectantes horizontais que existem são o **plano vertical**, o **plano frontal** (de frente) e o **plano de perfil** (que é duplamente projectante). Um plano projectante horizontal que contenha a recta terá **necessariamente** de ser um **plano vertical** (note que, em função da posição dos seus traços, nunca um plano frontal ou um plano de perfil poderiam conter a recta r). Para que o plano contenha a recta, e porque se trata de um **plano projectante horizontal**, basta que o traço horizontal do plano contenha a projecção horizontal da recta (o que é o raciocínio inverso ao explicitado no exercício 375). Assim, tem-se que $h_\alpha \equiv r_1$, o que fará com que a recta verifique, sempre, a condição para que uma recta pertença a um plano. Note que, caso se determinem os traços da recta nos planos de projecção (o que não é necessário para a resolução do exercício), aqueles estarão sobre os traços homónimos do plano.



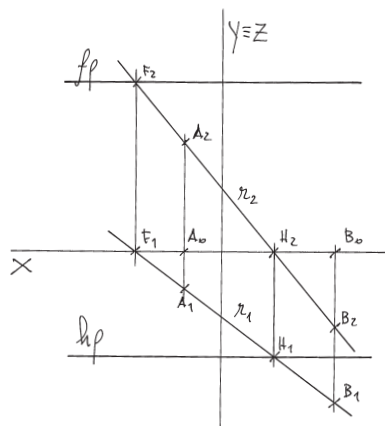
383.



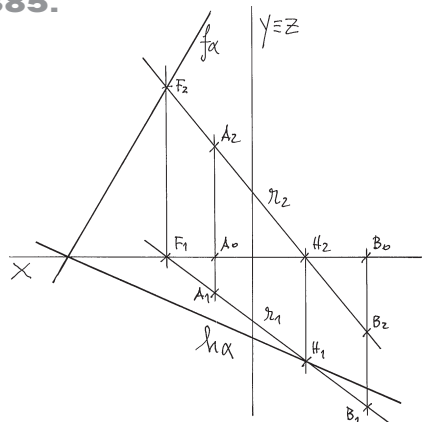
Em primeiro lugar, desenharam-se as projecções da recta. Os planos projectantes frontais que existem são o **plano de topo**, o **plano horizontal** (de nível) e o **plano de perfil** (que é duplamente projectante). Um plano projectante frontal que contenha a recta terá **necessariamente** de ser um **plano de topo** (note que, em função da posição dos seus traços, nunca um plano horizontal ou um plano de perfil poderiam conter a recta r). Para que o plano contenha a recta, e porque se trata de um **plano projectante frontal**, basta que o traço frontal do plano contenha a projecção frontal da recta (o que é o raciocínio inverso ao explicitado no exercício 374). Assim, tem-se que $f_\delta \equiv r_2$, o que fará sempre com que a recta verifique a condição para que uma recta pertença a um plano – caso se determinem os traços da recta nos planos de projecção (o que não é necessário para a resolução do exercício), aqueles estarão sobre os traços homónimos do plano.

384.

Em primeiro lugar, desenharam-se as projecções da recta. Para que uma recta pertença a um plano, os seus traços têm de estar sobre os traços homónimos do plano (condição para que uma recta pertença a um plano), ou seja, para que o plano contenha a recta, é necessário que os traços do plano contenham os traços homónimos da recta. Determinaram-se os traços da recta r nos planos de projecção. Como já sabemos a direcção dos traços de ρ (são fronto-horizontais), basta conduzir f_ρ por F e h_ρ por H – cada um dos traços do plano, que são rectas, está definido por um ponto e uma direcção.



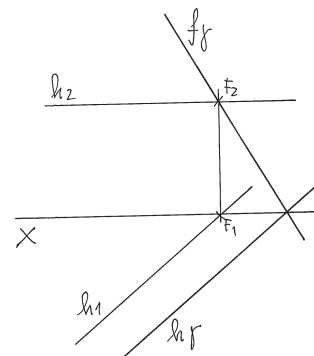
385.



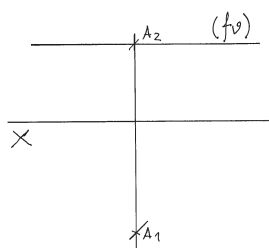
Em primeiro lugar, desenharam-se as projecções da recta. Para que o plano contenha a recta, é necessário que os traços do plano contenham os traços homónimos da recta. Determinaram-se os traços da recta r nos planos de projecção. Para definir f_α , que é uma recta, temos um ponto (F , traço frontal da recta r) e uma direcção – o ângulo que faz com o eixo X), o que nos permite desenhar f_α . Para definir h_α , que é uma recta, temos dois pontos – H , traço horizontal da recta r , e o ponto de concorrência dos dois traços do plano.

386.

Em primeiro lugar, desenharam-se as projecções da recta, em função dos dados. Para que o plano contenha a recta, é necessário que os traços do plano contenham os traços homónimos da recta. Determinaram-se os traços da recta h nos planos de projecção – a recta h não tem traço horizontal, pois é paralela ao Plano Horizontal de Projecção. Para definir f_p , que é uma recta, temos um ponto (F , traço frontal da recta h) e uma direcção – o ângulo que faz com o eixo X , o que nos permite desenhar f_p . Para definir h_p , que é uma recta, temos igualmente um ponto (o ponto de concorrência dos dois traços do plano) e uma direcção (h_p é paralelo à recta h , pois rectas horizontais de um plano são paralelas entre si e paralelas ao traço horizontal do plano, que é uma recta horizontal do plano com cota nula).



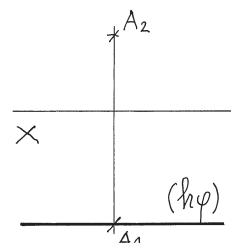
387.



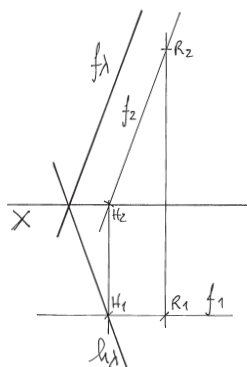
Um plano horizontal (de nível) é um **plano projectante frontal** – um plano projectante frontal projecta todas as suas rectas e pontos no seu traço frontal, ou seja, todos os pontos e rectas do plano têm a sua projecção frontal sobre o traço frontal do plano. Assim, bastou conduzir f_v por A_2 , o que nos garante que o ponto A pertence ao plano (ver exercício 377). Note que o traço frontal do plano é uma recta fronto-horizontal com afastamento nulo e que, atendendo a que o plano não tem traço horizontal (só tem um traço), tem de se representar entre parêntesis – (f_v).

388.

Um plano frontal (de frente) é um **plano projectante horizontal** – um plano projectante horizontal projecta todas as suas rectas e pontos no seu traço horizontal, ou seja, todos os pontos e rectas do plano têm a sua projecção horizontal sobre o traço horizontal do plano. Assim, bastou conduzir h_p por A_1 , o que nos garante que o ponto A pertence ao plano (ver exercício 379). Note que o traço horizontal do plano é uma recta fronto-horizontal com cota nula e que, atendendo a que o plano não tem traço frontal (só tem um traço), tem de se representar entre parêntesis – (h_p).



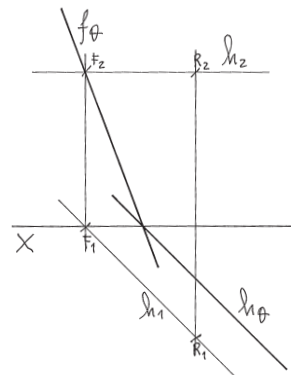
389.



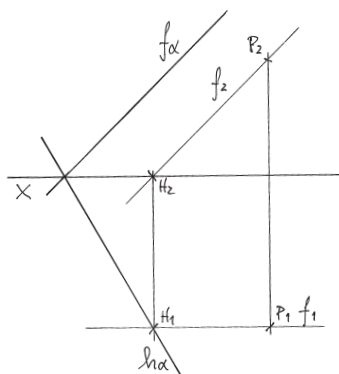
Em primeiro lugar, representou-se o ponto pelas suas projecções. Para que um ponto pertença a um plano, tem de pertencer a uma recta **que pertença** ao plano. Assim, há que conduzir, por R , uma recta **do plano**. As rectas que é possível garantirmos pertencerem ao plano são as rectas frontais (de frente) – note que se sabe a direcção das rectas frontais do plano, que são paralelas ao traço frontal do plano (f_λ é uma recta frontal do plano, com afastamento nulo). Assim, conduziu-se, por R , uma recta frontal (de frente), f , com a direcção dada. Para o plano conter o ponto R , terá de conter a recta f . Por H , traço horizontal de f , conduziu-se h_λ com uma direcção qualquer (não é dada a direcção de h_λ) – f_λ é concorrente com h_λ no eixo X e é paralelo a f .

390.

Em primeiro lugar, representou-se o ponto, pelas suas projecções. Para que um ponto pertença a um plano, tem de pertencer a uma recta **que pertença** ao plano (ver exercício anterior). As rectas que é possível garantirmos pertencerem ao plano são as rectas horizontais (de nível) – note que se sabe a direcção das rectas horizontais do plano, que são paralelas ao traço horizontal do plano (h_0 é uma recta horizontal do plano, com cota nula). Assim, conduziu-se, por **R**, uma recta horizontal (de nível), **h**, com a direcção dada. Para o plano conter o ponto **R**, terá de conter a recta **h**. Por **F**, traço frontal de **h**, conduziu-se **f₀** com uma direcção qualquer (não é dada a direcção de **f₀**) – **h₀** é concorrente com **f₀** no eixo **X** e é paralelo a **h**.



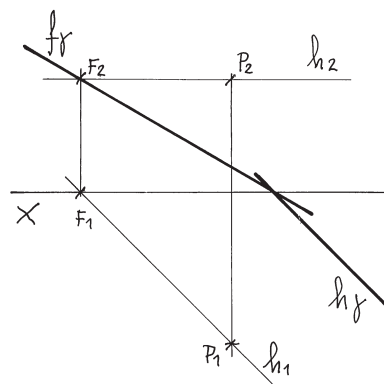
391.



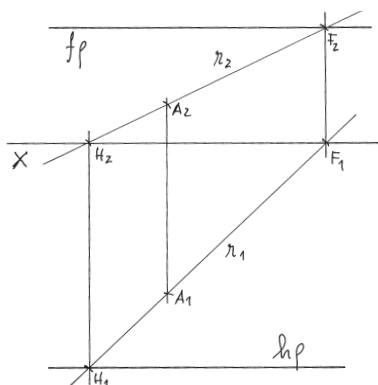
Em primeiro lugar, representou-se o ponto, pelas suas projecções. Para que um ponto pertença a um plano, tem de pertencer a uma recta **que pertença** ao plano (ver exercício anterior). As rectas que é possível garantirmos pertencerem ao plano são as rectas frontais (de frente), que são paralelas ao traço frontal do plano, e as rectas horizontais (de nível), que são paralelas ao traço horizontal do plano. Assim, temos duas hipóteses. Optou-se pela primeira – conduziu-se, por **P**, uma recta frontal (de frente), **f**, com a direcção dada (do traço frontal). Para o plano conter o ponto **P**, terá de conter a recta **f**. Por **H**, traço horizontal de **f**, conduziu-se **h_a**, fazendo um ângulo de 60° (a.d.) com o eixo **X** – **h_a** está definido por um ponto e uma direcção. Em seguida, pelo ponto de concorrência dos dois traços do plano conduziu-se **f_a**, fazendo um ângulo de 45° (a.d.) com o eixo **X** – **f_a** está definido por um ponto e uma direcção.

392.

Ver relatório do exercício anterior. Note que, neste exercício, se optou pela segunda hipótese referida no relatório do exercício anterior – conduziu-se, por **P**, uma recta horizontal com a direcção dada (do traço horizontal).



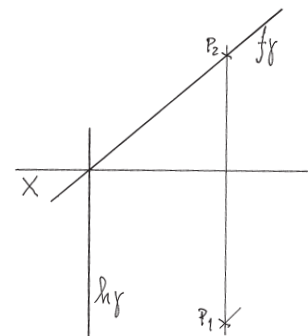
393.



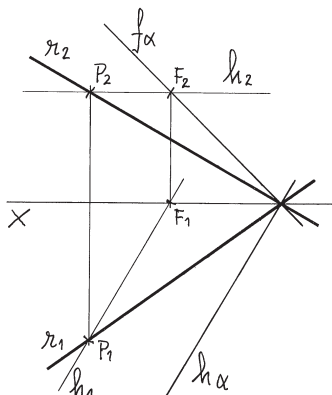
Representou-se o ponto **A** pelas suas projecções e o traço horizontal do plano. Para que um ponto pertença a um plano, tem de pertencer a uma recta do plano. Recorreu-se a uma recta **r**, oblíqua, auxiliar, contida no plano – **r** passa por **A** e tem o seu traço horizontal sobre **h_p**. Note que a recta **r** está definida por dois pontos. Determinou-se o traço frontal de **r** e por **F** conduziu-se **f_p**, que está definido por um ponto (**F**) e por uma direcção (é fronto-horizontal).

394.

Um plano de topo é um **plano projectante frontal** – um plano projectante frontal projecta todas as suas rectas e pontos no seu traço frontal, ou seja, todos os pontos e rectas do plano têm a sua projecção frontal sobre o traço frontal do plano. Assim, bastou conduzir f_y por P_2 , o que nos garante que o ponto P pertence ao plano (ver exercício 377) – f_y faz, com o eixo X , o ângulo pedido. Note que o traço horizontal do plano é uma recta de topo com cota nula.



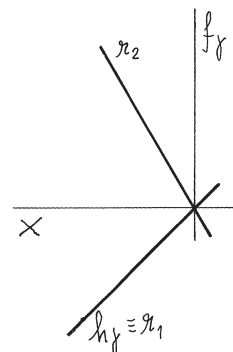
395.



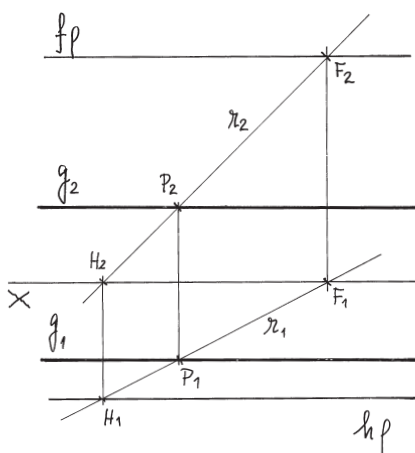
- a) Representou-se o plano pelos seus traços. Trata-se de um **plano apoiado**, pois a face visível em projecção frontal e em projecção horizontal é a mesma.
b) Ver exercício 318. A recta auxiliar a que se recorreu foi uma recta horizontal (de nível), h , do plano.

396.

- a) Representou-se o plano pelos seus traços. Trata-se de um **plano projectante**, pois, numa das projecções (a projecção horizontal), o plano reduz-se a uma recta (é um plano projectante horizontal).
b) Ver exercício 374, atendendo a que, uma vez que se trata de um **plano projectante horizontal** é a projecção horizontal da recta que se determina imediatamente.



397.

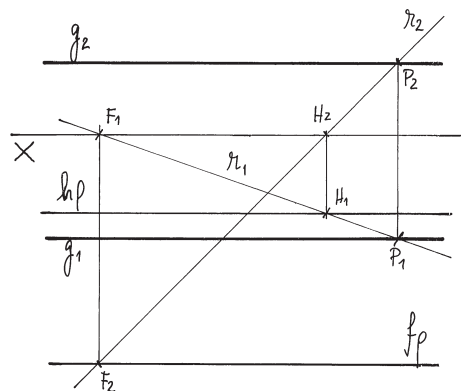


- a) Representou-se o plano pelos seus traços. Trata-se de um **plano apoiado**, pois a face visível em projecção frontal e em projecção horizontal é a mesma.
b) Ver exercício 367.

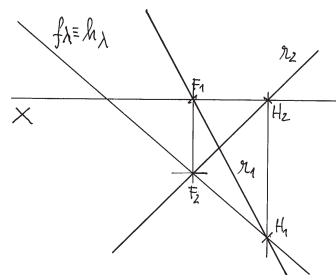
398.

a) Representou-se o plano pelos seus traços. Trata-se de um **plano em tensão**, pois a face visível em projecção frontal e a face visível em projecção horizontal **não são** a mesma.

b) Ver exercício 369.



399.

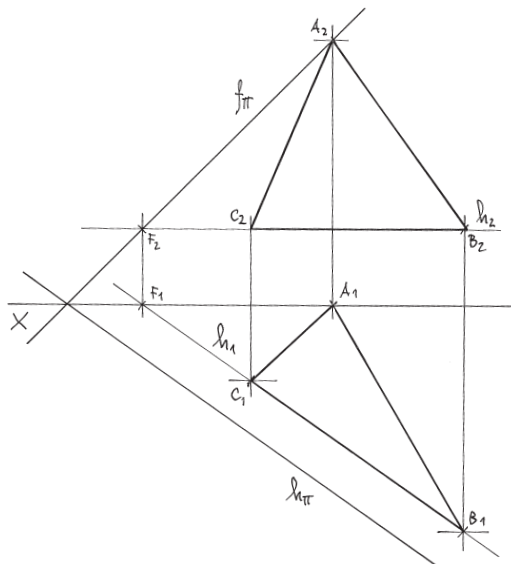


a) Representou-se o plano pelos seus traços. Trata-se de um **plano em tensão**, pois a face visível em projecção frontal e a face visível em projecção horizontal **não são** a mesma.

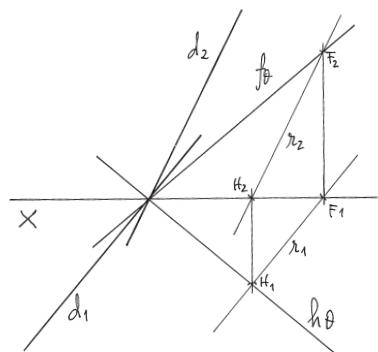
b) Ver exercício 317.

400.

Em primeiro lugar, representou-se o plano π pelos seus traços. Sobre a determinação das projecções do triângulo, ver exercício 348. Para que um ponto pertença a um plano, o ponto tem de pertencer a uma recta que pertença ao plano. As projecções do ponto **A** determinam-se imediatamente, pois é um ponto de f_π (ver exercício 353). Desenharam-se as projecções da recta **h** (a recta horizontal do plano que tem 2 cm de cota), que é a recta suporte do segmento de recta **[BC]**. **C** é o traço da recta no $\beta_{1/3}$ e **B** determinou-se em função do seu afastamento.



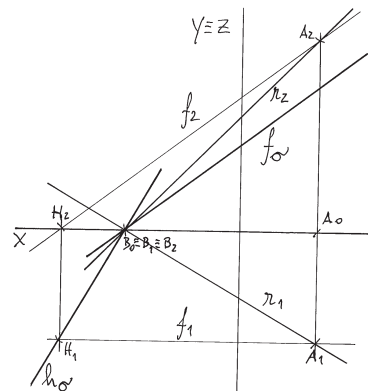
401.



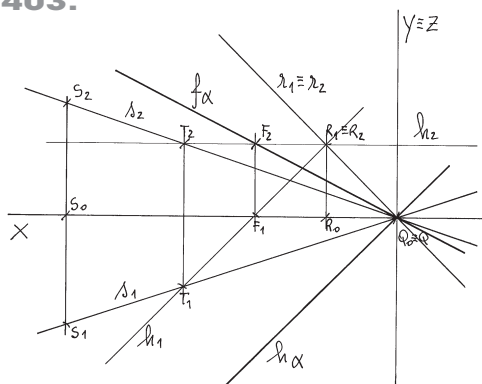
Em primeiro lugar, representou-se o plano θ pelos seus traços. Para definir a recta **d** necessitamos de dois pontos ou um ponto e uma direcção. O ponto de concorência dos traços do plano é o único ponto do plano que pertence ao eixo **X**, pelo que a recta **d**, porque é passante, contém **necessariamente** esse ponto – já temos um ponto para definir a recta. Por esse ponto conduziu-se d_1 , perpendicular a h_θ , pois **d** é uma recta de maior declive do plano. Falta-nos outro ponto ou uma direcção. Os dados do plano são insuficientes para a resolução do exercício, pelo que se torna necessário o recurso a uma recta auxiliar do plano. Recorreu-se a uma recta **r**, do plano, tal que a sua projecção frontal é paralela a d_1 – a recta **r** está definida por dois pontos, que são os seus traços. Note que a recta **r** é **uma outra recta de maior declive** do plano θ . As rectas **d** e **r** são coplanares (pertencem, ambas, ao plano θ), pelo que ou são paralelas ou são concorrentes. Não são concorrentes (as suas projecções horizontais são paralelas), pelo que são paralelas – já temos uma direcção. A recta **d** está definida por um ponto (o ponto de concorência dos traços do plano) e uma direcção (é paralela à recta **r**).

402.

Em primeiro lugar, desenharam-se as projecções da recta r , de acordo com os dados. Para determinar h_σ , que é uma recta, são necessários dois pontos ou um ponto e uma direcção. A recta r é uma recta de maior declive do plano, pelo que h_σ é perpendicular a r_1 – já temos a direcção de h_σ . Os traços do plano têm de ser concorrentes no ponto B , que é o único ponto do plano que se situa no eixo X . Assim, h_σ fica definido por um ponto (B) e por uma direcção (é perpendicular a r_1). Para determinar f_σ , que é uma recta, são necessários dois pontos ou um ponto e uma direcção. Já temos um ponto – o ponto B . Falta-nos outro ponto ou uma direcção. Os dados do plano são insuficientes para definir f_σ , pelo que é necessário o recurso a uma recta auxiliar do plano. Recorreu-se a uma recta f , frontal (de frente), do plano – a recta f está definida por dois pontos (o seu traço horizontal e o seu ponto de concorrência com a recta r). Atendendo a que rectas frontais (de frente) de um plano são paralelas entre si e paralelas ao traço frontal do plano, já temos a direcção de f_σ – é paralelo à recta f . f_σ fica definido por um ponto (B) e uma direcção (a direcção de f).



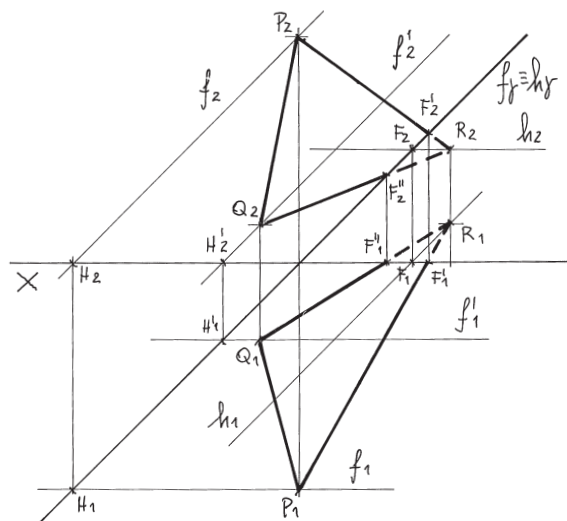
403.



Em primeiro lugar, definiu-se o plano, pelas projecções das rectas r e s . Sobre a determinação dos traços do plano, ver exercício 312, atendendo a que, nesta situação, a recta auxiliar a que se recorreu foi uma recta horizontal (de nível) do plano. f_α está definido por dois pontos (F e Q) e h_α está definido por um ponto (Q) e por uma direcção (é paralelo à recta h).

404.

- a) Sobre a determinação das projecções dos três vértices do triângulo, ver exercícios 343 a 347 (relembre a condição para que um ponto pertença a um plano).
- b) À semelhança do estudado para as rectas, a parte visível do triângulo é aquela que se situa no 1º Diedro. Analisando as projecções dos três vértices do triângulo, observa-se que o lado $[PQ]$ se situa, na totalidade, no espaço do 1º Diedro (os seus extremos têm, ambos, as duas coordenadas positivas), pelo que é visível na totalidade. O mesmo não se verifica com os lados $[PR]$ e $[QR]$, uma vez que R é um ponto do 2º Diedro. Assim, há que determinar, previamente, os pontos em que cada um daqueles lados atravessa o Plano Frontal de Projectação e inicia o seu percurso no 2º Diedro. F' é o traço frontal da recta suporte do lado $[PQ]$ e F'' é o traço frontal da recta suporte do lado $[QR]$. Os pontos F' e F'' definem, assim, a parte do triângulo que se situa no 2º Diedro e que, por isso, é invisível, sendo representada a traço interrompido em ambas as projecções.

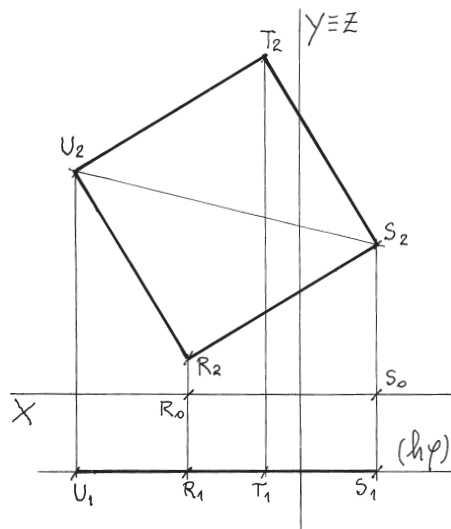


6

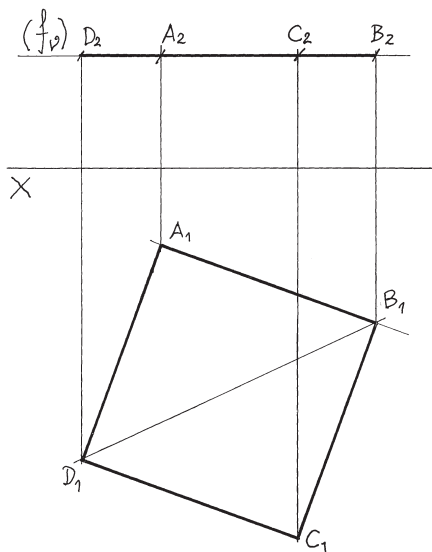
REPRESENTAÇÃO DE FIGURAS PLANAS I

405.

Em primeiro lugar, representaram-se os dois pontos pelas suas projecções, bem como o plano frontal (de frente) que os contém, pelo seu traço horizontal (ver exercício 379). O quadrado está contido no plano frontal (de frente), que é paralelo ao Plano Frontal de Projecção, pelo que o quadrado projecta-se em **verdadeira grandeza** no Plano Frontal de Projecção – a projecção frontal do quadrado não apresenta qualquer deformação. Já a projecção horizontal do quadrado se reduz a um segmento de recta, pois o plano frontal (de frente) é projectante horizontal. Assim, a partir das projecções frontais de **R** e **S** construiu-se a projecção frontal do quadrado em V.G., obtendo-se as projecções frontais dos outros dois vértices do polígono – **T₂** e **U₂**. Note que, na construção do polígono, se atendeu a que o quadrado se situa no 1.^o *Diedro* – nenhum dos seus vértices tem cota negativa. **T₁** e **U₁** situam-se sobre (**h_φ**), pois φ é projectante horizontal. O quadrado [**R₂S₂T₂U₂**] é a projecção frontal do quadrado [**RSTU**]. O segmento [**U₁S₁**] é a projecção horizontal do quadrado.



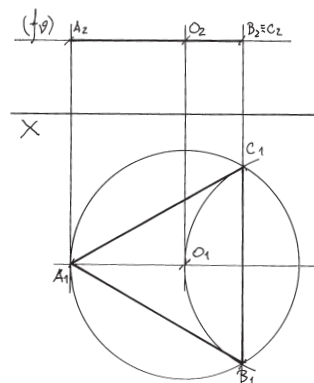
406.



Em primeiro lugar, representou-se o ponto **A** pelas suas projecções, bem como o plano horizontal (de nível) que o contém, pelo seu traço frontal (ver exercício 377). O quadrado está contido no plano horizontal (de nível), que é paralelo ao Plano Horizontal de Projecção, pelo que o quadrado se projecta em **verdadeira grandeza** no Plano Horizontal de Projecção – a projecção horizontal do quadrado não apresenta qualquer deformação. Já a projecção frontal do quadrado se reduz a um segmento de recta, pois o plano horizontal (de nível) é projectante frontal. Assim, a partir da projecção horizontal de **A** representou-se o lado [**AB**] pelas suas projecções, atendendo ao ângulo que [**AB**] faz com o Plano Frontal de Projecção e ao seu comprimento (que se projecta em V.G. no Plano Horizontal de Projecção). A partir das projecções horizontais de **A** e **B** construiu-se a projecção horizontal do quadrado em V.G., obtendo-se as projecções horizontais dos outros dois vértices do polígono – **C₁** e **D₁**. Note que, na construção do polígono, se atendeu a que o quadrado se situa no 1.^o *Diedro* – nenhum dos seus vértices tem afastamento negativo. **C₂** e **D₂** situam-se sobre (**f_φ**), pois φ é projectante frontal. O quadrado [**A₁B₁C₁D₁**] é a projecção horizontal do quadrado [**ABCD**]. O segmento [**B₂D₂**] é a projecção frontal do quadrado.

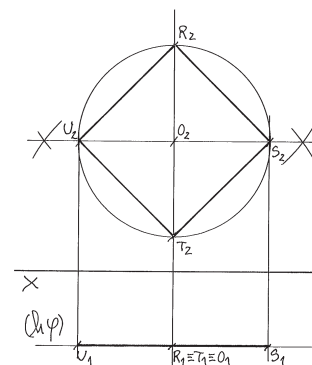
407.

Em primeiro lugar, representou-se o plano ν pelo seu traço frontal e o centro da circunferência circunscrita ao triângulo (o ponto **O**), pertencente ao plano – **O₂** tem de se situar sobre (**f_ν**), pois ν é projectante frontal (ver exercício 377). Como o plano é paralelo ao Plano Horizontal de Projecção, a figura projecta-se em V.G. em projecção horizontal. Desenhou-se a circunferência em V.G. (em projecção horizontal) e fez-se a construção do triângulo de acordo com os dados. Note que o vértice mais à esquerda é o ponto **A** e que o lado [**BC**] (o lado oposto a **A**) é de topo. Determinando as projecções dos três vértices, desenharam-se as projecções do triângulo – a sua projecção frontal reduz-se a um segmento de recta, sobre (**f_ν**), pois o plano é projectante frontal. O triângulo [**A₁B₁C₁**] é a projecção horizontal do triângulo [**ABC**].

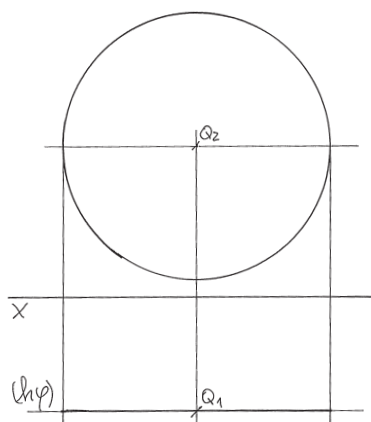


408.

Representaram-se o traço horizontal de φ e as projecções do ponto **T**, que é o vértice inferior do quadrado (tem 1 cm de cota). Em seguida, uma vez que a diagonal **[RT]** é vertical, projecta-se em V.G. no Plano Frontal de Projecção – a partir de **T₂** mediram-se os 5 cm, obtendo-se **R₂**, garantindo que **R** é o vértice de maior cota (ver exercício 245). O plano φ é paralelo ao Plano Frontal de Projecção, pelo que o quadrado se projecta em V.G. em projecção frontal. Assim, construiu-se a projecção frontal do quadrado em V.G. – **O** é o centro da circunferência circunscrita ao quadrado e é o ponto médio da diagonal **[RT]**. Em seguida, determinaram-se as projecções dos restantes vértices do quadrado, garantindo que **S** é o vértice mais à direita, e desenharam-se as projecções da figura (ver exercício 405). A projecção horizontal do quadrado reduz-se a um segmento de recta sobre (**h_φ**), pois φ é projectante horizontal.



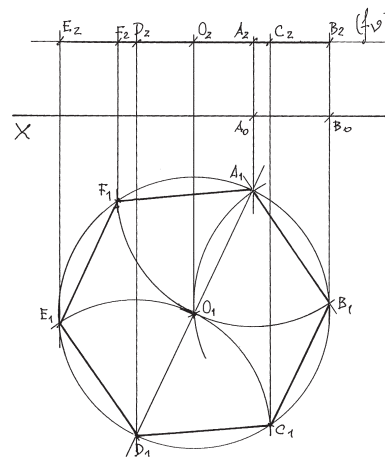
409.



Em primeiro lugar, representou-se o ponto **Q** pelas suas projecções, bem como o plano frontal (de frente) que o contém, pelo seu traço horizontal (ver exercício 379). O plano que contém a circunferência é paralelo ao Plano Frontal de Projecção, pelo que a figura se projecta em V.G. em projecção frontal. A projecção horizontal da circunferência reduz-se a um segmento de recta, pois o plano é projectante horizontal. Note que a projecção horizontal da circunferência corresponde à projecção horizontal do seu diâmetro horizontal (fronto-horizontal).

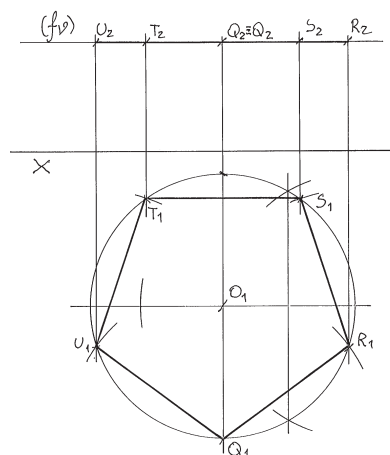
410.

Em primeiro lugar, representaram-se os dois pontos pelas suas projecções, bem como o plano horizontal (de nível) que os contém, pelo seu traço frontal (ver exercício 379). O hexágono projecta-se em V.G. no Plano Horizontal de Projecção (está contido num plano horizontal), pelo que **A B** está em V.G. em **A₁ B₁**. O hexágono é o único polígono cujo lado é igual ao raio da circunferência em que se inscreve. Assim, a partir do lado **[AB]** construiu-se um triângulo equilátero, obtendo-se o ponto **O**, que é o terceiro vértice desse triângulo – **O** é o centro da circunferência circunscrita ao hexágono. Desenhou-se a circunferência e construiu-se o hexágono em V.G. em projecção horizontal. Note que haveria duas hipóteses para a localização do ponto **O** – a localização escolhida é aquela que garante que o hexágono se situe na totalidade no espaço do 1^o Diedro, como é expressamente pedido no enunciado. Note que, a partir da circunferência, a construção do hexágono se processou recorrendo a um diâmetro da circunferência – o diâmetro que contém o vértice **A** (diâmetro inicial). Note, ainda, que há dois lados do hexágono (os lados **[BC]** e **[EF]**) que são paralelos ao diâmetro inicial.

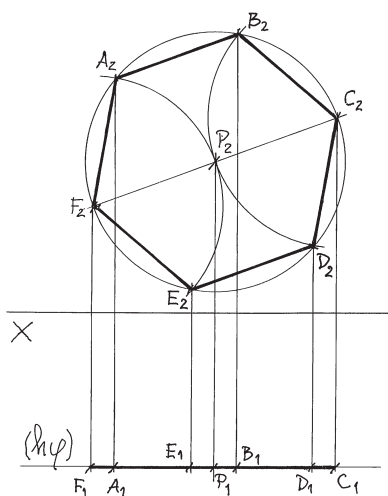


411.

Em primeiro lugar, representou-se o plano v pelo seu traço frontal e o centro da circunferência circunscrita ao pentágono (o ponto O), pertencente ao plano – O_2 tem de se situar sobre (f_v) , pois v é projectante frontal (ver exercício 377). O pentágono projecta-se em V.G. no Plano Horizontal de Projectção, pois o plano v é horizontal (é paralelo ao Plano Horizontal de Projectção). Construiu-se o pentágono em V.G., em projecção horizontal, tendo em conta que o lado $[TS]$ (o lado oposto a Q) é fronto-horizontal e que R é o vértice mais à direita (R é o vértice de menor abscissa). Note que o vértice Q fica **necessariamente** na mesma projectante frontal do centro da circunferência circunscrita ao polígono. A projecção frontal do pentágono é um segmento de recta, pois o plano v é projectante frontal. Note que a construção do pentágono se processou, a partir da circunferência, desenhando dois dos seus diâmetros – um diâmetro de topo (que contém o vértice Q e que foi o **diâmetro inicial**) e um segundo diâmetro **perpendicular** ao primeiro. Note ainda que o lado $[TS]$ é **paralelo** ao segundo diâmetro e **perpendicular** ao diâmetro inicial.



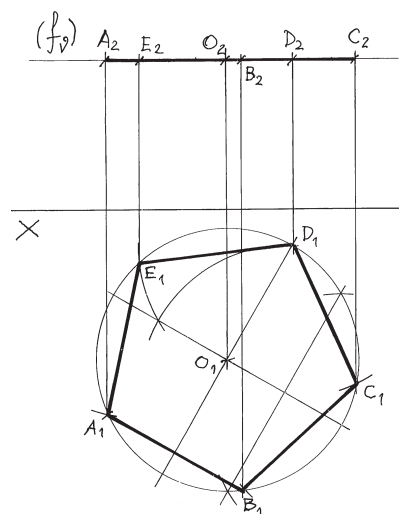
412.



O ponto P tem coordenadas iguais e projecções simétricas em relação ao eixo X (é um ponto do $\beta_{1/3}$). Representou-se o ponto P e o plano ϕ , frontal (de frente) que o contém (ver exercício 405). Uma vez que o plano que contém a figura é paralelo ao Plano Frontal de Projectção, o hexágono e a circunferência circunscrita ao polígono projectam-se, ambos, em V.G. no Plano Frontal de Projectção. Com centro em P_2 desenhou-se a projecção frontal da circunferência circunscrita ao polígono. É expresso, no enunciado, que dois lados do hexágono fazem, com o Plano Horizontal de Projectção, ângulos de 20° (a.d.). De acordo com o referido no relatório do exercício 410, a construção de um hexágono a partir da divisão da circunferência em partes iguais processa-se através de um **diâmetro inicial**, sendo que **dois dos lados do hexágono** ficam **paralelos** ao diâmetro inicial. Assim, em primeiro lugar, desenhou-se um diâmetro da circunferência (o **diâmetro inicial**), fazendo um ângulo de 20° (a.d.) com o eixo X , a partir do qual se efectuou a construção do polígono, em V.G., em projecção horizontal. Note que os lados $[AB]$ e $[DE]$ do hexágono são paralelos ao **diâmetro inicial**, que é a diagonal $[CF]$. A partir das projecções de todos os vértices da figura, desenharam-se as **duas projecções** do hexágono. Note que a atribuição das letras aos vértices da figura foi arbitrária, pois nada no enunciado nos refere qualquer imposição nesse sentido.

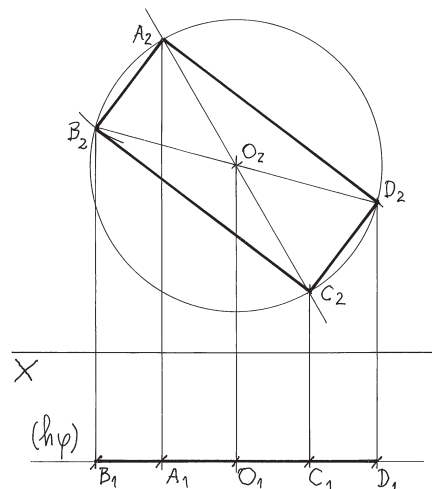
413.

O centro da circunferência circunscrita ao pentágono é o ponto O (letra atribuída arbitrariamente), que é um ponto do $\beta_{1/3}$ (ver relatório do exercício anterior). Representou-se o ponto O e o plano v , horizontal (de nível) que o contém (ver exercício 406). Uma vez que o plano que contém a figura é paralelo ao Plano Horizontal de Projectção, o pentágono e a circunferência circunscrita ao polígono projectam-se, ambos, em V.G. no Plano Horizontal de Projectção. Com centro em O_1 desenhou-se a projecção horizontal da circunferência circunscrita ao polígono. É expresso, no enunciado, que o lado $[AB]$ do pentágono faz, com o Plano Frontal de Projectção, um ângulo de 30° (a.d.). De acordo com o referido no relatório do exercício 411, a construção de um pentágono a partir da divisão da circunferência em partes iguais processa-se através de um **diâmetro inicial** e de um segundo diâmetro, sendo que **um dos lados do pentágono** fica **perpendicular** ao diâmetro inicial. Assim, em primeiro lugar, desenhou-se um diâmetro da circunferência (o **diâmetro inicial**), fazendo um ângulo de 60° (a.e.) com o eixo X , a partir do qual se efectuou a construção do polígono, em V.G., em projecção horizontal. Atendendo a que A é o vértice mais à esquerda do pentágono, o extremo do **diâmetro inicial** que é um vértice do pentágono terá de ser o extremo de menor afastamento. Dessa forma, o lado $[AB]$ será o lado de maior afastamento do pentágono e A é, como é expressamente pedido, o vértice mais à esquerda. As projecções frontais dos cinco vértices do polígono estão sobre (f_v) , pois v é projectante frontal. A partir das projecções de todos os vértices da figura, desenharam-se as **duas projecções** do pentágono.



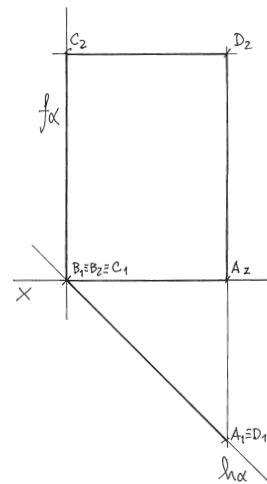
414.

Em primeiro lugar, representou-se o ponto **O** pelas suas projecções, bem como o plano frontal (de frente) que o contém (ver exercício 405). Em seguida, passando por **O**, representou-se a recta suporte da diagonal **[AC]**, com o ângulo pedido. Uma vez que a diagonal **[AC]** é frontal (de frente), projecta-se em V.G. no Plano Frontal de Projecção e **O** é o seu ponto médio – a partir de **O₂** mediram-se 4 cm (metade do comprimento da diagonal) para cada lado, obtendo-se **A₂** e **C₂**, as projecções frontais dos extremos da diagonal (note que **A** é o vértice de maior cota do rectângulo). Em função dos dados, a construção do rectângulo passa **necessariamente** pelo recurso à circunferência na qual o polígono se inscreve, e que também se projecta em V.G. no Plano Frontal de Projecção. Com centro em **O₂** desenhou-se a projecção frontal da circunferência circunscrita ao rectângulo, que passa necessariamente por **A₂** e por **C₂**. Os vértices **B** e **D** do rectângulo têm de pertencer à circunferência. Uma vez que o rectângulo se projecta em V.G. no Plano Frontal de Projecção, determinou-se o vértice **B** em função do comprimento do lado **[AB]** – com o recurso ao compasso, fazendo centro em **A₂** e com 3 cm de raio, obteve-se **B₂** sobre a projecção frontal da circunferência (à esquerda de **A**). Por **B₂** e **O₂** conduziu-se a outra diagonal do rectângulo, o que nos permitiu determinar **D₂**. As projecções horizontais dos quatro vértices do polígono estão sobre **(h_φ)**, pois φ é projectante horizontal. A partir das projecções de todos os vértices da figura, desenharam-se as **duas projecções** do rectângulo.

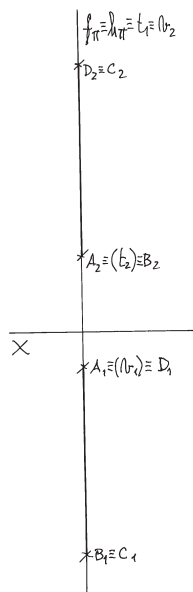


415.

Em primeiro lugar, representou-se o plano α pelos seus traços. Note que, uma vez que o plano α **não é paralelo** a nenhum dos planos de projecção, o quadrado **não se projecta em V.G.** em nenhuma das suas projecções – ambas as projecções da figura apresentam deformação. No entanto, a construção das projecções da figura pode processar-se em função da V.G. dos seus lados, caso estes se projectem em V.G., como é o caso. O lado **[AB]** do quadrado tem cota nula, pelo que está **necessariamente** contido em **h_α** – é horizontal (de nível) e está em V.G., pois é paralelo ao Plano Horizontal de Projecção (está contido no próprio Plano Horizontal de Projecção). O lado **[BC]** tem afastamento nulo, pelo que está contido em **f_α** – é vertical e está em V.G., pois é paralelo ao Plano Frontal de Projecção (está contido no próprio Plano Frontal de Projecção). O ponto **B** pertence simultaneamente ao lado **[AB]** e ao lado **[BC]**, pelo que tem **necessariamente** cota e afastamento nulos. O vértice **A**, que tem cota nula, tem afastamento positivo, pois o quadrado situa-se no 1.^o Diedro. O ponto **C**, que tem afastamento nulo, tem cota positiva, pois o quadrado situa-se no 1.^o Diedro. Estes raciocínios permitiram-nos determinar as projecções dos vértices **A**, **B** e **C** – **B** é o ponto de concorrência dos traços do plano, **A** situa-se sobre **h_α** a 6 cm de **B** e **C** situa-se sobre **f_α**, a 6 cm de **B**. Para determinar as projecções do vértice **D**, uma vez que o quadrado não se projecta em V.G. em nenhuma das suas projecções, é necessário algum exercício de visualização espacial ou alguns raciocínios elementares. Um quadrado tem os lados todos iguais e paralelos dois a dois. Assim, o lado **[AD]** é vertical, pois é paralelo a **[BC]** – **A** e **D** situam-se na mesma recta projectante horizontal, pelo que têm as suas projecções horizontais coincidentes. Este raciocínio permite-nos determinar **D₁**. Por sua vez, o lado **[BD]** é horizontal (de nível), pois é paralelo a **[AB]** – **B** e **D** têm **necessariamente** a mesma cota. Este raciocínio permite-nos determinar **D₂**, na mesma linha de chamada de **D₁**. A partir das projecções dos quatro vértices do quadrado, é possível desenhar as projecções do quadrado. A sua projecção horizontal é um segmento de recta, pois o plano é projectante horizontal. A projecção frontal do quadrado é um rectângulo (está deformada). Observe, agora, que o quadrado não se projecta em V.G. em nenhuma das suas projecções.



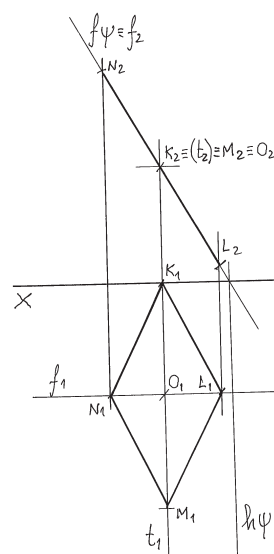
416.



Em primeiro lugar, representaram-se os traços do plano π e as projecções do ponto **A**, pertencente ao plano (que é duplamente projectante). Note que, uma vez que o plano π **não é paralelo** a nenhum dos planos de projecção, o quadrado **não se projecta em V.G.** em nenhuma das suas projecções – ambas as projecções da figura apresentam deformação (ver exercício anterior). O lado **[AB]** é de topo, pelo que se projecta em V.G. em projecção horizontal – $A_1 B_1 = 5$ cm, sendo que **B** tem afastamento positivo (o quadrado está no 1.^a Diedro). O lado **[AD]** é vertical, pelo que se projecta em V.G. em projecção frontal – $A_2 D_2 = 5$ cm, sendo que **D** tem cota positiva (o quadrado está no 1.^a Diedro). O lado **[CD]** é de topo (é paralelo a **[AB]**), pelo que as projecções frontais de **C** e **D** estão coincidentes (os dois pontos situam-se na mesma recta projectante frontal). Este raciocínio permite-nos determinar **C₂**. O lado **[BC]** é vertical (é paralelo a **[AD]**) – as projecções horizontais dos pontos **B** e **C** estão coincidentes (os dois pontos situam-se na mesma recta projectante horizontal). Este raciocínio permite-nos determinar **C₁**. A partir das projecções dos quatro pontos, determinaram-se as projecções do quadrado. As duas projecções do quadrado são segmentos de recta, pois o plano é simultaneamente projectante horizontal (a projecção horizontal da figura reduz-se a um segmento de recta) e projectante frontal (a projecção frontal da figura reduz-se a um segmento de recta).

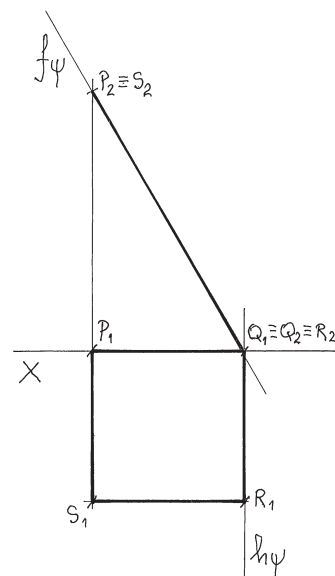
417.

Em primeiro lugar, representaram-se os traços do plano e as projecções do ponto **K**, pertencente ao plano (que é projectante frontal). O ponto **K** é um ponto de f_ψ , pois **K** tem afastamento nulo. Note que, uma vez que o plano α **não é paralelo** a nenhum dos planos de projecção, o quadrado **não se projecta em V.G.** em nenhuma das suas projecções – ambas as projecções da figura apresentam deformação (ver exercício 415). A recta **t**, de topo, é a recta suporte da diagonal **[KM]**. A recta **t** é paralela ao Plano Horizontal de Projecção, pelo que **[KM]** se projecta em V.G. em projecção horizontal. Tem-se, portanto, que $K_1 M_1 = 6$ cm. Uma vez que as diagonais de um quadrado são **perpendiculares**, a diagonal **[LN]** existe **necessariamente** numa recta frontal (de frente) do plano α (perpendicular a **t**). A recta **f**, que passa por **O** (o ponto médio de **[KM]**) é a recta suporte da diagonal **[LN]**, que se projecta em V.G. em projecção frontal, pois **f** é paralela ao Plano Frontal de Projecção. $O_2 L_2 = O_2 N_2 = 3$ cm (metade do comprimento da diagonal). Note que se atendeu a que **L** é o vértice de menor cota do polígono. A partir das projecções dos quatro pontos, desenharam-se as **duas projecções** do quadrado. Observe que, apesar de a figura ser um quadrado, a sua projecção horizontal é um losango (está deformada).



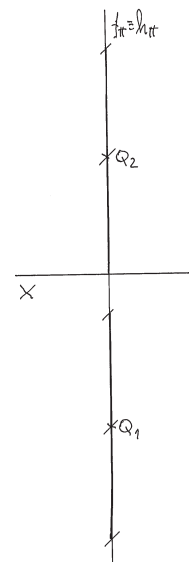
418.

Ver exercício 415. Note que, apesar de se tratar de um rectângulo, a projecção horizontal da figura é um quadrado, mas este resulta da deformação inerente ao facto de o plano ψ não ser paralelo ao Plano Horizontal de Projecção. Assim, se efectuar um exercício de visualização da situação no espaço, verificará que, realmente, se trata de um rectângulo.



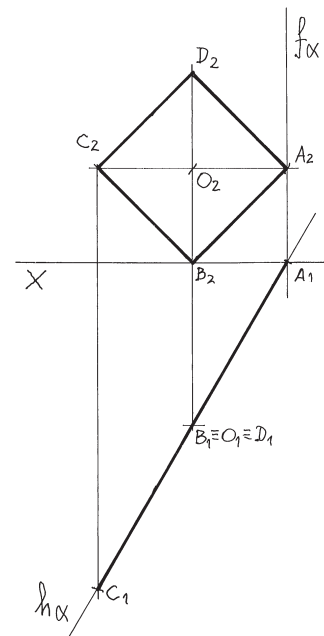
419.

Em primeiro lugar, representaram-se os traços do plano π e as projecções do ponto Q , pertencente ao plano (que é duplamente projectante). A circunferência é tangente ao Plano Horizontal de Projectão (plano $XY - v_0$) e o seu centro tem 3 cm de cota, pelo que o raio da circunferência é 3 cm. O plano π **não é paralelo** a nenhum dos planos de projecção, pelo que a circunferência **não se projecta em V.G.** em nenhuma das suas projecções – ambas as projecções da figura apresentam deformação. Uma vez que o plano π é duplamente projectante, sabe-se imediatamente que as duas projecções da circunferência são segmentos de recta. As projecções frontal e horizontal da circunferência ficam, assim, sobre os traços correspondentes de π . A projecção frontal da circunferência corresponde à projecção frontal do seu diâmetro vertical, que se projecta em V.G. no Plano Frontal de Projectão – a partir de O_2 mediram-se os 3 cm (o raio da circunferência), para cima e para baixo, obtendo-se imediatamente a projecção frontal da figura. A projecção horizontal da circunferência corresponde à projecção horizontal do seu diâmetro de topo, que se projecta em V.G. no Plano Horizontal de Projectão – a partir de O_1 mediram-se os 3 cm (o raio da circunferência), para cima e para baixo, obtendo-se imediatamente a projecção horizontal da figura.



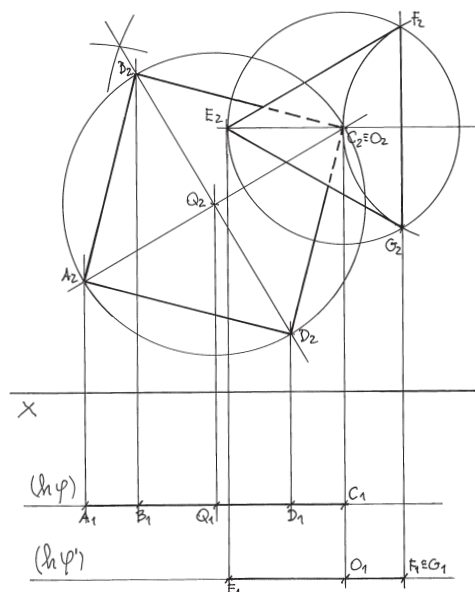
420.

Em primeiro lugar, representaram-se os traços do plano. Em seguida, representou-se A_1 , a projecção horizontal de A , que é um ponto de f_α , pois A tem afastamento nulo. Atendendo a que não nos é dada a cota de A nem o afastamento de B , não é possível prosseguir a resolução do exercício, sem raciocínios prévios que nos permitam determinar mais dados sobre os vértices da figura. As diagonais de um losango são **perpendiculares**, pelo que a diagonal $[BD]$ existe **necessariamente** numa recta vertical do plano α – numa recta perpendicular às rectas horizontais de α , uma vez que a diagonal $[AC]$ é horizontal. As duas diagonais bissectam-se num ponto (ponto O) que é, simultaneamente, o ponto médio das duas diagonais. A diagonal $[AC]$ é horizontal (paralela ao Plano Horizontal de Projectão), pelo que $[AC]$ se projecta em V.G. em projecção horizontal. A partir de A_1 é possível medir os 10 cm (o comprimento da diagonal) e obter C_1 , a projecção horizontal de C . Em seguida, é possível determinar O_1 , a projecção horizontal de O , o centro do losango O_1 é o ponto médio do segmento $[A_1C_1]$. Sabe-se, então, que as projecções horizontais de O , B e D estão coincidentes, pois os três pontos situam-se na mesma recta projectante horizontal. B tem cota nula, o que nos permite determinar B_2 . Como a diagonal $[BD]$ é vertical, projecta-se em V.G. no Plano Frontal de Projectão. Assim, a partir de B_2 mediram-se 5 cm (o comprimento da diagonal) e obteve-se a projecção frontal de D . O é o ponto médio de $[BD]$, o que nos permite determinar O_2 . Uma vez que a diagonal $[AC]$ é horizontal (de nível), os pontos A , C e O têm a mesma cota, o que nos permitiu determinar as projecções frontais de A e C . A partir das projecções dos quatro pontos, desenharam-se as **duas projecções** do losango. Observe que, apesar de a figura ser um losango, a sua projecção frontal é um quadrado (está deformada). Esta situação, à semelhança do referido no relatório do exercício 418, resulta da deformação inerente ao facto de o plano α não ser paralelo ao Plano Frontal de Projectão. Assim, se efectuar um exercício de visualização da situação no espaço, verificará que, realmente, se trata de um losango. Sublinha-se que o plano α **não é paralelo** a nenhum dos planos de projecção, pelo que o losango **não se projecta em V.G.** em nenhuma das suas projecções.



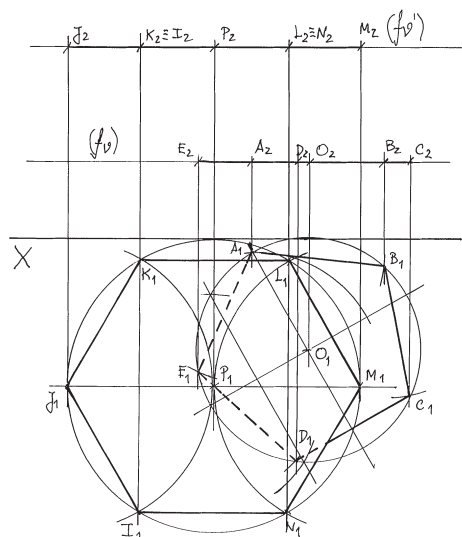
421.

Em primeiro lugar, representou-se o ponto **Q** pelas suas projecções, bem como o plano frontal (de frente) φ que o contém (ver exercício 405). O plano φ é paralelo ao Plano Frontal de Projectação, pelo que o quadrado se projecta em V.G. em projecção frontal. Com centro em O_2 desenhou-se a projecção frontal da circunferência circunscrita ao quadrado, bem como o seu diâmetro que faz, com o Plano Horizontal de Projectação, um ângulo de 30° (a.d.). A partir deste, construiu-se o quadrado em V.G., em projecção frontal, e atribuíram-se letras arbitrariamente aos quatro vértices do polígono (o enunciado é omissivo). Em seguida, representou-se o plano φ' , o plano frontal (de frente) com 5 cm de afastamento que contém o triângulo. O centro da circunferência circunscrita ao triângulo é o ponto **O**, que se situa na mesma recta projectante frontal do vértice **C** do quadrado (o vértice mais à direita do quadrado) – $O_2 \equiv C_2$. O_1 situa-se sobre (h_φ) , pois φ' é projectante horizontal. Com centro em O_1 , desenhou-se a projecção frontal da circunferência circunscrita ao triângulo e construiu-se o polígono em projecção frontal (o plano φ' é paralelo ao Plano Frontal de Projectação) de acordo com os dados – o lado mais à direita é vertical. Atribuíram-se letras aos vértices do triângulo, arbitrariamente, pois o enunciado é omissivo. É possível, em seguida, a partir das projecções horizontais de todos os vértices das duas figuras, desenhar imediatamente as respectivas projecções horizontais. Em projecção frontal, observa-se que existe uma **sobreposição** das duas figuras, o que implica que **uma delas oculta parcialmente a outra**. Neste caso, uma vez que o triângulo é **a figura que tem maior afastamento**, é o triângulo que **é visível** (é visível a figura que tiver maior afastamento), pelo que a parte do quadrado que se situa por detrás do triângulo é **invisível** (está oculta) – representa-se a traço interrompido.



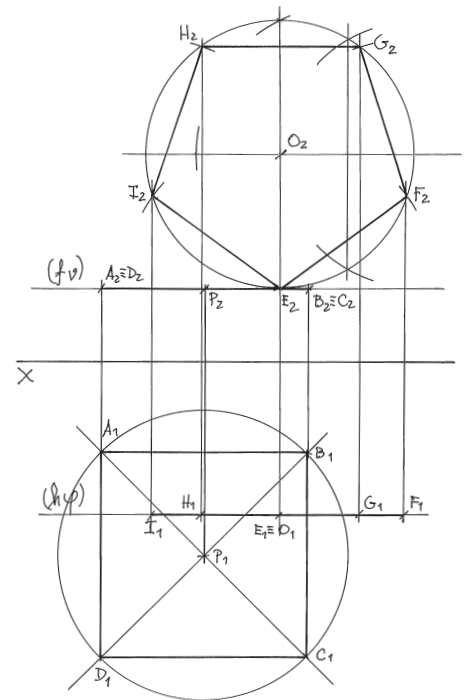
422.

Em primeiro lugar, representou-se o ponto **O** pelas suas projecções, bem como o plano horizontal (de nível) v que o contém (ver exercício 406). O plano v é paralelo ao Plano Horizontal de Projectação, pelo que o pentágono se projecta em V.G. no Plano Horizontal de Projectação. Com centro em O_1 desenhou-se a projecção horizontal da circunferência circunscrita ao pentágono e construiu-se o polígono, de acordo com os dados (ver exercício 413, atendendo que, neste caso, o ângulo é de abertura à esquerda). O **diâmetro inicial** tem de fazer um ângulo de 60° (a.d.) com o Plano Frontal de Projectação. Atribuíram-se letras arbitrariamente aos vértices do pentágono, pois o enunciado é omissivo. Em seguida, representou-se o plano v' , o plano horizontal (de nível) que contém o hexágono – v' tem 5 cm de cota, pois situa-se 3 cm acima de v , que tem 2 cm de cota. Representou-se o ponto **P** pelas suas projecções, de acordo com os dados. O plano v' é paralelo ao Plano Horizontal de Projectação, pelo que o hexágono se projecta em V.G. no Plano Horizontal de Projectação. Com centro em P_1 desenhou-se a projecção horizontal da circunferência circunscrita ao hexágono, e construiu-se o polígono de acordo com os dados, em projecção horizontal. A circunferência tem 4 cm de raio, pois o hexágono é o único polígono cujo lado é igual ao raio da circunferência em que se inscreve. Dois dos lados do hexágono são fronto-horizontais, pelo que o **diâmetro inicial** tem de ser fronto-horizantal (ver relatório do exercício 412). Nomearam-se arbitrariamente os vértices do hexágono, pois o enunciado é omissivo. É possível, em seguida, a partir das projecções frontais de todos os vértices das duas figuras, desenhar imediatamente as respectivas projecções frontais. Em projecção horizontal, observa-se que existe uma **sobreposição** das duas figuras, o que implica que **uma oculta parcialmente a outra**. O hexágono é **a figura que tem maior cota**, pelo que é o hexágono que **é visível** (é visível a figura que tiver maior cota), pelo que a parte do pentágono que se situa por baixo do hexágono é **invisível** (está oculta) – representa-se a traço interrompido.



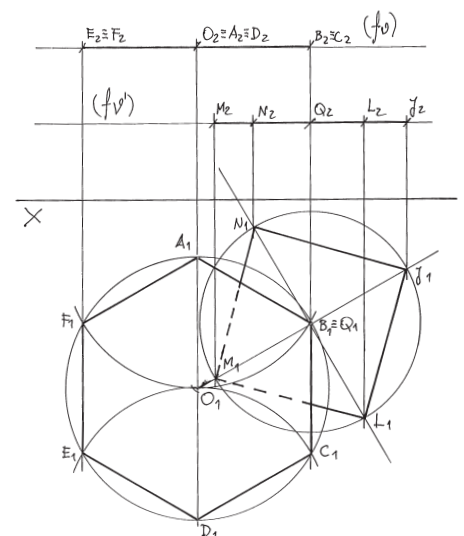
423.

Em primeiro lugar, representou-se o ponto **P** pelas suas projecções, bem como o plano horizontal (de nível) v que o contém (ver exercício 406). O plano v é paralelo ao Plano Horizontal de Projectação, pelo que o quadrado se projecta em V.G. no Plano Horizontal de Projectação. Com centro em P_1 desenhou-se a projecção horizontal da circunferência circunscrita ao quadrado e construiu-se o polígono, de acordo com os dados. Note que a circunferência circunscrita ao quadrado tem 4 cm de raio, que é metade do comprimento da diagonal do polígono. Por outro lado, atendendo a que as diagonais do quadrado fazem ângulos de 45° com o Plano Frontal de Projectação, o quadrado vai ter **necessariamente** dois lados fronto-horizontais e dois lados de topo. Depois de obtidas as projecções horizontais de todos os vértices do quadrado, determinaram-se as suas projecções frontais, que estão sobre (f_v) , pois v é projectante frontal. Em seguida, representou-se o ponto **O** pelas suas projecções, de acordo com os dados. Note que o ponto **O** se situa 3,5 cm (o raio da circunferência circunscrita ao pentágono) acima do plano v , pelo que **O** tem 5,5 cm de cota. Representou-se o plano ϕ , o plano frontal (de frente) que contém o pentágono – o plano ϕ é paralelo ao Plano Frontal de Projectação, pelo que o pentágono se projecta em V.G. em projecção frontal. Com centro em O_2 desenhou-se a projecção frontal da circunferência circunscrita ao pentágono (que é **necessariamente** tangente ao plano v) e efectuou-se a construção do polígono, de acordo com os dados (o lado de maior cota é fronto-horizontal). Note que, de acordo com o pretendido, o vértice inferior do polígono pertence ao plano horizontal que contém o quadrado. Depois de obtidas as projecções frontais de todos os vértices do pentágono, determinaram-se as suas projecções horizontais, que estão sobre (h_ϕ) , pois ϕ é projectante horizontal. A partir das projecções das duas figuras e da análise da sua posição relativa no espaço, conclui-se que não existem invisibilidades, uma vez que não há sobreposição de superfícies.



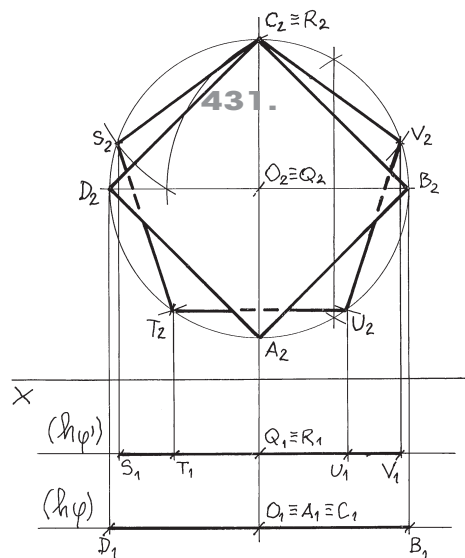
424.

Em primeiro lugar, representou-se o ponto **O** pelas suas projecções, bem como o plano horizontal (de nível) v que o contém (ver exercício 406). O plano v é paralelo ao Plano Horizontal de Projectação, pelo que o quadrado se projecta em V.G. no Plano Horizontal de Projectação. Com centro em O_1 desenhou-se a projecção horizontal da circunferência circunscrita ao hexágono (com 3,5 cm de raio – ver relatório do exercício 422), e construiu-se o polígono de acordo com os dados, em projecção horizontal. Dois dos lados do hexágono são de topo, pelo que o **diâmetro inicial** tem de ser de topo (ver relatório do exercício 412). Em seguida, representou-se o plano v' , o plano horizontal (de nível) que contém o quadrado – v' tem 2 cm de cota, pois situa-se 2 cm abaixo de v , que tem 4 cm de cota. O centro da circunferência circunscrita ao triângulo é o ponto **Q**, que se situa na mesma recta projectante horizontal do vértice **B** do hexágono (o vértice de menor abscissa do hexágono que tem menor afastamento) – $Q_1 \equiv B_1$. Q_2 situa-se sobre $(f_{v'})$, pois v' é projectante frontal. Com centro em Q_1 desenhou-se a projecção horizontal da circunferência circunscrita ao quadrado, que tem 3 cm de raio (metade do comprimento das diagonais do quadrado) e construiu-se o polígono em V.G., em projecção horizontal, garantindo que uma das suas diagonais faz um ângulo de 60° (a.d.) com o Plano Frontal de Projectação. É possível, em seguida, a partir das projecções frontais de todos os vértices das duas figuras, desenhar imediatamente as respectivas projecções frontais. Em projecção horizontal, observa-se que existe uma **sobreposição** das duas figuras, o que implica que **uma oculta parcialmente a outra**. O hexágono é a **figura que tem maior cota**, pelo que é o hexágono que é **visível** (é visível a figura que tiver maior cota), pelo que a parte do quadrado que se situa por baixo do hexágono é **invisível** (está oculta) – representa-se a traço interrompido.



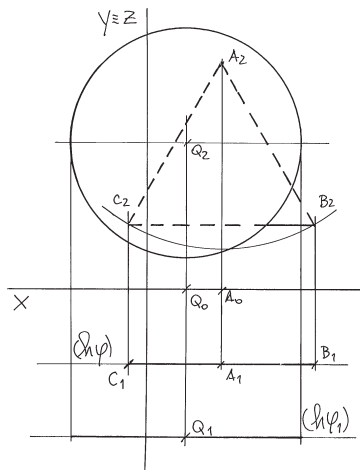
425.

Em primeiro lugar, representou-se o ponto **A** pelas suas projecções, bem como o plano frontal (de frente) φ que o contém (ver exercício 405). O quadrado projecta-se em V.G. em projecção frontal, pois o plano φ é paralelo ao Plano Frontal de Projecção. Atendendo a que os lados do quadrado fazem ângulos de 45° com o Plano Horizontal de Projecção, uma das suas diagonais é vertical e a outra é fronto-horizontal. Este raciocínio permitiu-nos determinar o ponto **O**, o centro da circunferência circunscrita ao quadrado – **O** situa-se na mesma recta projectante horizontal de **A**, 4 cm acima deste (o raio da circunferência). Construiu-se o quadrado em V.G., em projecção frontal e determinaram-se as projecções horizontais dos seus vértices, sobre (h_φ) – a atribuição das letras aos vértices do quadrado foi arbitrária, pois o enunciado é omissivo. Em seguida, representou-se o plano frontal (de frente) φ' , que contém o pentágono. Uma vez que as circunferências circunscritas aos dois polígonos têm a mesma projecção frontal, o ponto **Q**, o centro da circunferência circunscrita ao pentágono, está na mesma recta projectante frontal de **O** – $Q_2 \equiv O_2$. Uma vez que o vértice de maior cota do pentágono (**R**) está na mesma projectante frontal do vértice de maior cota do quadrado (**C**), tem-se $R_2 \equiv C_2$. Construiu-se o pentágono em V.G. em projecção frontal, pois o plano φ' é paralelo ao Plano Frontal de Projecção. A atribuição de nomes (letras) aos vértices do pentágono foi arbitrária, pois o enunciado é omissivo. A partir das projecções horizontais de todos os vértices das duas figuras, desenharam-se imediatamente as respectivas projecções horizontais. Em projecção frontal, observa-se que existe uma **sobreposição** das duas figuras, o que implica que **uma oculta parcialmente a outra**. O quadrado é a **figura que tem maior afastamento**, pelo que é o quadrado que é **visível** (é visível a figura que tiver maior afastamento), pelo que a parte do pentágono que se situa por detrás do quadrado é **invisível** (está oculta) – representa-se a traço interrompido.



426.

Representaram-se as projecções do ponto **A** e o traço horizontal de φ , o plano frontal (de frente) que contém o triângulo. O triângulo é equilátero e o lado oposto a **A** é fronto-horizontal, pelo que os lados adjacentes ao vértice **A** fazem, com o Plano Horizontal de Projecção (plano **XY**), ângulos de 60° (a medida dos ângulos internos de um triângulo equilátero). A partir dos ângulos e das medidas dos lados, construiu-se o triângulo em V.G., em projecção frontal. Em seguida, desenharam-se as projecções da circunferência (ver exercício 409). Representaram-se as projecções horizontais das duas figuras, nas quais não há lugar à representação de invisibilidades, pois não há sobreposições. Em projecção frontal, existe uma **sobreposição** das duas figuras – **uma oculta parcialmente a outra**. A circunferência é a **figura que tem maior afastamento**, pelo que é a circunferência que é **visível**, pelo que a parte do triângulo que se situa por detrás da circunferência é **invisível** (está oculta) – representa-se a traço interrompido.



7

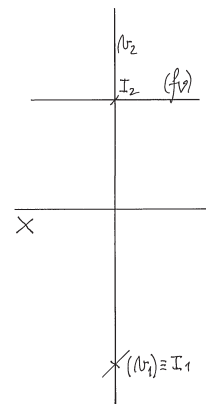
INTERSECÇÕES

427.

A afirmação é **verdadeira**. De facto, a figura geométrica resultante da intersecção de uma recta com um plano é **sempre** um ponto. Este, no entanto, pode ser um **ponto próprio** (caso se situe a distância finita) ou um **ponto impróprio** (caso se situe a distância infinita). Na situação em que a recta seja paralela ao plano, o ponto de intersecção da recta com o plano situa-se no infinito – trata-se, pois, de um **ponto impróprio**. Nas restantes situações, em que a recta e o plano não sejam paralelos, será sempre um **ponto próprio**.

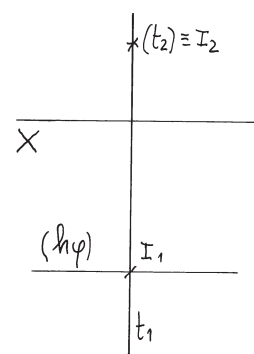
428.

O ponto de intersecção de uma recta com um plano é um ponto que pertence, simultaneamente, à recta e ao plano. O ponto **I** tem, assim, de pertencer à recta **v** e ao plano **v**. A recta **v** é **projectante horizontal**, logo projecta horizontalmente todos os seus pontos – **I**₁ está coincidente com a projecção horizontal de **v**. Fazendo **I**₁ = (**v**₁), garante-se que o ponto **I** pertence à recta **v**. O ponto **I** tem, agora, de pertencer ao plano. O plano **v** é **projectante frontal**, logo projecta frontalmente todas as suas rectas e pontos sobre (**f**_v) – **I**₂ tem de se situar sobre (**f**_v), na mesma linha de chamada de **I**₁. Garante-se, assim, que o ponto pertence ao plano **v**. **I**₂ é, pois, o ponto de intersecção de **v**₂ com (**f**_v).



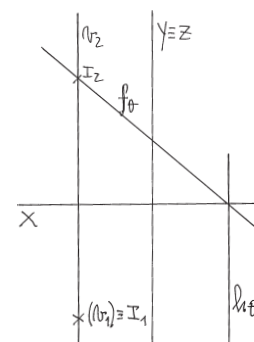
429.

O ponto de intersecção de uma recta com um plano é um ponto que pertence, simultaneamente, à recta e ao plano. O ponto **I** tem, assim, de pertencer à recta **t** e ao plano ϕ . A recta **t** é **projectante frontal**, logo projecta frontalmente todos os seus pontos – **I**₂ está coincidente com a projecção frontal da recta **t**. Fazendo **I**₂ = (**t**₂) garante-se que o ponto **I** pertence à recta **t**. O ponto **I** tem, agora, de pertencer ao plano. O plano ϕ é **projectante horizontal**, logo projecta horizontalmente todas as suas rectas e pontos sobre (**h** _{ϕ}) – **I**₁ tem de se situar sobre (**h** _{ϕ}), na mesma linha de chamada de **I**₂. Garante-se, assim, que o ponto pertence ao plano ϕ . **I**₁ é, pois, o ponto de intersecção de **t**₁ com (**h** _{ϕ}).



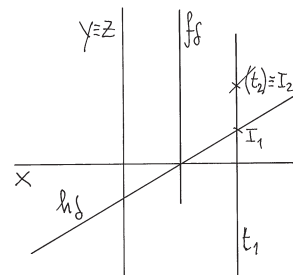
430.

A recta **v** é **projectante horizontal** e o plano θ é **projectante frontal** – ver relatório do exercício 428.



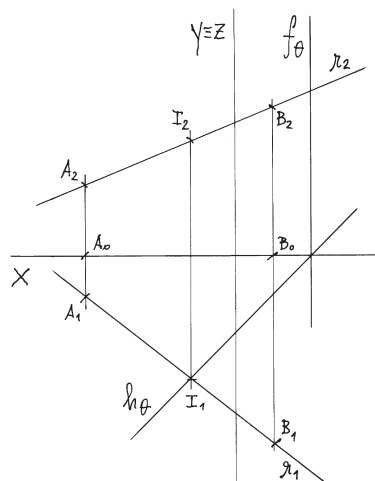
431.

A recta t é **projectante frontal** e o plano δ é **projectante horizontal** – ver relatório do exercício 429.



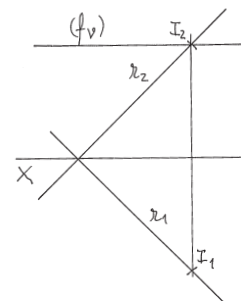
432.

O ponto de intersecção de uma recta com um plano é um ponto que pertence, simultaneamente, à recta e ao plano. O ponto I tem, assim, de pertencer à recta r e ao plano θ . Para que o ponto pertença ao plano θ , que é **projectante horizontal**, I_1 tem de se situar sobre h_θ . Para que o ponto pertença à recta, as projecções do ponto têm de pertencer às projecções homónimas da recta. Assim, I_1 tem de se situar simultaneamente sobre r_1 e sobre h_θ – I_1 é, pois, o ponto de concorrência de r_1 com h_θ . I_2 situa-se sobre r_2 , na mesma linha de chamada de I_1 . Assim, I é o ponto de r tal que I_1 está sobre r_1 e h_θ .



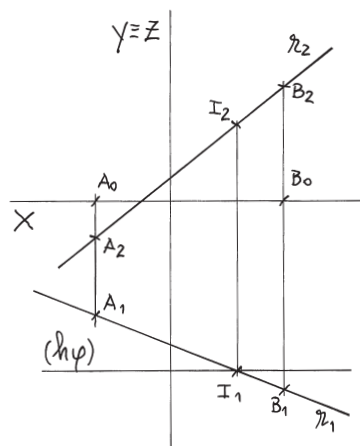
433.

A recta r pertence ao $\beta_{1/3}$, logo as suas projecções são simétricas em relação ao eixo X . O ponto de intersecção de uma recta com um plano é um ponto que pertence, simultaneamente, à recta e ao plano. O ponto I tem, assim, de pertencer à recta r e ao plano v . Para que o ponto pertença ao plano v , que é **projectante frontal**, I_2 tem de se situar sobre (f_v) . Para que o ponto pertença à recta, as projecções do ponto têm de pertencer às projecções homónimas da recta. Assim, I_2 tem de se situar simultaneamente sobre r_2 e sobre (f_v) – I_2 é, pois, o ponto de concorrência de r_2 com (f_v) . I é, então, o ponto de r tal que I_2 está sobre r_2 e (f_v) .



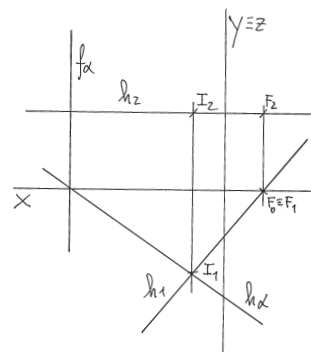
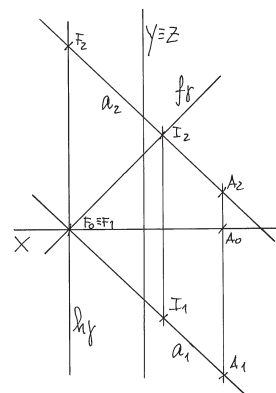
434.

O plano φ é **projectante horizontal** – ver relatório do exercício 432.

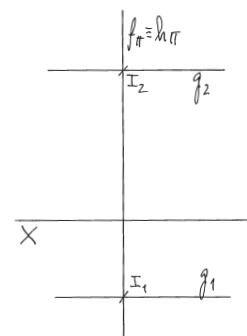


435.

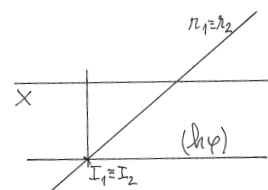
Ver relatório do exercício 432.

**436.**O plano γ é **projectante frontal** – ver relatório do exercício 433.**437.**

O plano π é **projectante frontal**, pelo que I_2 é o ponto de concorrência de g_2 com f_π (ver exercício 433). O plano π também é **projectante horizontal**, pelo que I_1 é o ponto de concorrência de g_1 com h_π (ver exercício 432). As projecções de I têm, assim, determinação imediata.

**438.**

O plano φ é **projectante frontal** – ver relatório do exercício 433. Note que, uma vez que a recta r é uma recta do $\beta_{2/4}$, todos os seus pontos têm projecções coincidentes, pois pertencem ao $\beta_{2/4}$ – o ponto I tem, assim, as suas projecções coincidentes.



439.

A afirmação é **verdadeira**. Dois planos intersectam-se sempre segundo uma recta, que pode ser uma **recta própria** (situada a distância finita) no caso dos planos serem secantes, ou uma **recta imprópria** (recta situada a distância infinita) no caso de os planos serem paralelos.

440.

Três planos intersectam-se segundo uma recta em todas as situações em que os três planos têm, pelo menos, uma «família» de rectas em comum. Caso só tenham uma única «família» de rectas em comum, a recta de intersecção é uma **recta própria**. Se tiverem mais do que uma «família» de rectas em comum, a recta de intersecção é uma **recta imprópria** (os três planos são paralelos).

441.

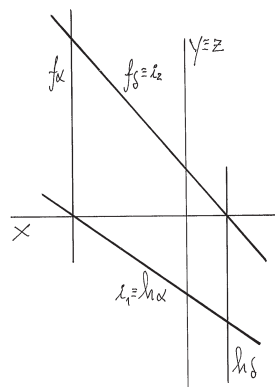
Conclui-se que cada plano intersecta os outros dois segundo duas rectas concorrentes. As três rectas de intersecção dos três planos são, assim, concorrentes num ponto – o ponto de intersecção dos três planos.

442.

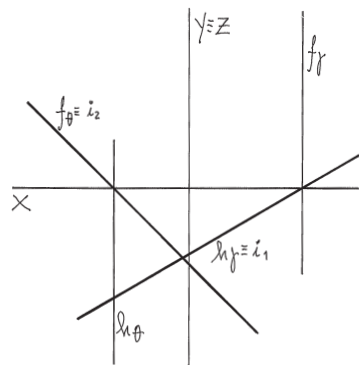
A intersecção de três planos resulta num **ponto impróprio** em todas as situações em que pelo menos um dos planos intersecta os outros dois segundo duas rectas paralelas.

443.

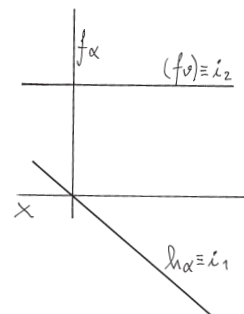
A recta de intersecção dos dois planos (recta i) é uma recta que pertence aos dois planos – é o lugar geométrico dos pontos do espaço que pertencem simultaneamente aos dois planos. Todos os pontos da recta i têm de pertencer aos dois planos. O plano α é projectante horizontal, pelo que as projecções horizontais de todas as rectas do plano estão sobre h_α – fazendo $i_1 \equiv h_\alpha$, garante-se que a recta i pertence ao plano α . O plano δ é projectante frontal, pelo que as projecções frontais de todas as rectas do plano estão sobre f_δ – fazendo $i_2 \equiv f_\delta$, garante-se que a recta i pertence ao plano δ . A recta i , definida pelas suas projecções, pertence, assim, a ambos os planos – é a recta de intersecção dos dois planos.

**444.**

Ver relatório do exercício anterior. O plano θ é projectante frontal, pelo que $i_2 \equiv f_\theta$, para que i pertença a θ . O plano γ é projectante horizontal, pelo que $i_1 \equiv h_\gamma$, para que i pertença a γ .

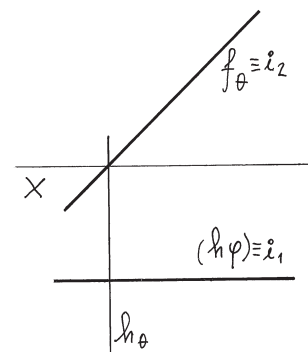
**445.**

Ver relatório do exercício 443. O plano v é projectante frontal, pelo que $i_2 \equiv (f_v)$, para que i pertença a v . O plano α é projectante horizontal, pelo que $i_1 \equiv h_\alpha$, para que i pertença a α .

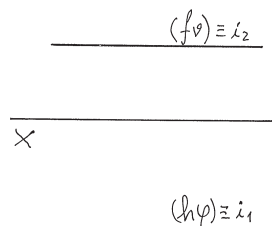


446.

Ver relatório do exercício 443. O plano θ é projectante frontal, pelo que $i_2 \equiv f_\theta$ para que i pertença a θ . O plano φ é projectante horizontal, pelo que $i_1 \equiv (h_\varphi)$ para que i pertença a φ .



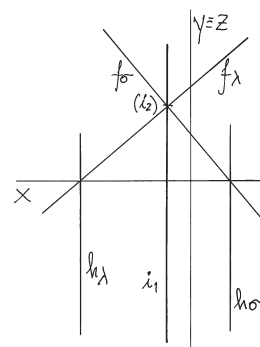
447.



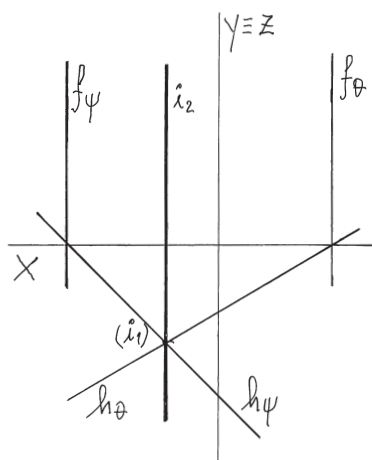
Ver relatório do exercício 443. O plano v é projectante frontal, pelo que $i_2 \equiv (f_v)$, para que i pertença a v . O plano φ é projectante horizontal, pelo que $i_1 \equiv (h_\varphi)$, para que i pertença a φ .

448.

A recta de intersecção dos dois planos é uma recta que pertence aos dois planos – é o lugar geométrico dos pontos do espaço que pertencem simultaneamente aos dois planos. Todos os pontos da recta i têm de pertencer aos dois planos. O plano λ é projectante frontal, pelo que as projecções frontais de todas as rectas do plano têm de estar sobre f_λ . Por outro lado, o plano σ também é projectante frontal, pelo que as projecções frontais de todas as rectas do plano têm de estar sobre f_σ . A projecção frontal da recta de intersecção dos dois planos tem, assim, de estar simultaneamente sobre f_λ e sobre f_σ – a projecção frontal da recta tem de ser **um ponto**. A única recta cuja projecção frontal é um ponto é uma recta de topo, pelo que a recta de intersecção dos dois planos (recta i) tem **necessariamente** de ser uma **recta de topo (projectante frontal)**. Uma outra forma de analisar este problema seria recordar que a recta de intersecção entre dois planos é **uma recta da única «família»** de rectas comum aos dois planos. Os dois planos são, ambos, planos **projectantes frontais**, pelo que ambos contêm **rectas projectantes frontais**. Se os dois planos são secantes (não paralelos), eles têm, em comum, apenas uma única «família» de rectas que é, assim, a das rectas de topo, pelo que a recta de intersecção dos dois planos é **necessariamente** uma recta de topo. A recta i , de topo, é, assim, a recta de intersecção dos dois planos.



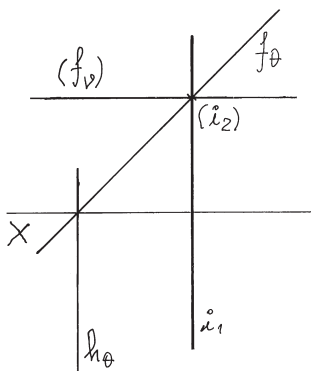
449.



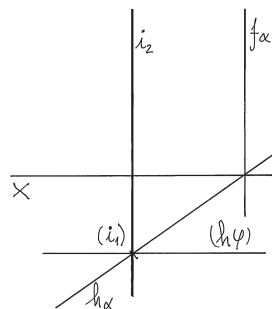
A recta de intersecção dos dois planos é uma recta que pertence aos dois planos – é o lugar geométrico dos pontos do espaço que pertencem simultaneamente aos dois planos. Todos os pontos da recta i têm de pertencer aos dois planos. O plano ψ é projectante frontal, pelo que as projecções horizontais de todas as rectas do plano têm de estar sobre h_ψ . Por outro lado, o plano θ também é projectante horizontal, pelo que as projecções horizontais de todas as rectas do plano têm de estar sobre h_θ . A projecção horizontal da recta de intersecção dos dois planos tem, assim, de estar simultaneamente sobre h_ψ e sobre h_θ – a projecção horizontal da recta tem de ser **um ponto**. A única recta cuja projecção horizontal é um ponto é uma recta vertical, pelo que a recta de intersecção dos dois planos (recta i) tem **necessariamente** de ser uma **recta vertical (projectante horizontal)**. Uma outra forma de analisar este problema seria recordar que a recta de intersecção entre dois planos é **uma recta da única «família»** de rectas comum aos dois planos. Os dois planos são, ambos, planos **projectantes horizontais**, pelo que ambos contêm **rectas projectantes horizontais**. Se os dois planos são secantes (não paralelos), eles têm, em comum, apenas uma única «família» de rectas que é, assim, a das rectas verticais, pelo que a recta de intersecção dos dois planos é **necessariamente** uma recta vertical. A recta i , vertical, é, assim, a recta de intersecção dos dois planos.

450.

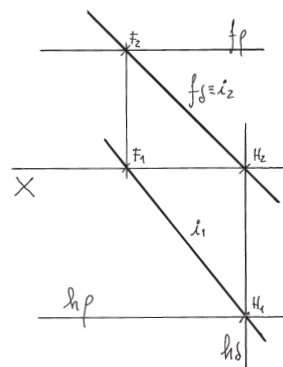
Ver relatório do exercício 448.

**451.**

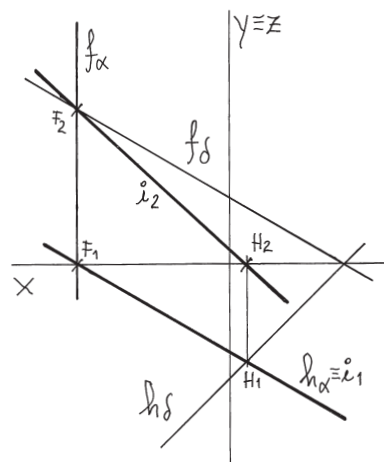
Ver relatório do exercício 449.

**452.**

A recta de intersecção dos dois planos (recta i) é uma recta que pertence aos dois planos – é o lugar geométrico dos pontos do espaço que pertencem simultaneamente aos dois planos. Todos os pontos da recta i têm de pertencer aos dois planos. O plano δ é projectante frontal, pelo que as projecções frontais de todas as rectas do plano estão sobre f_δ – fazendo $i_2 \equiv f_\delta$, garante-se que a recta i pertence ao plano δ . A recta i já pertence ao plano δ , que é projectante. A recta i tem, agora, de pertencer ao plano ρ , que **não é projectante**. Para que uma recta pertença a um plano, os seus traços têm de estar sobre os traços homónimos do plano. Assim, a partir da projecção frontal da recta i , determinaram-se os seus traços, sobre os traços homónimos do plano ρ , para garantir que a recta também pertence ao plano ρ – os traços permitiram-nos obter i_1 , a projecção horizontal da recta. A recta i está definida por dois pontos, que são os seus traços.

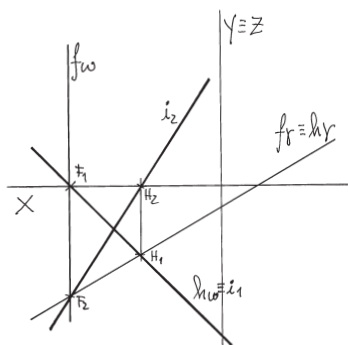
**453.**

A recta de intersecção dos dois planos (recta i) pertence aos dois planos – é o lugar geométrico dos pontos do espaço que pertencem simultaneamente aos dois planos. Todos os seus pontos têm de pertencer aos dois planos. O plano α é projectante horizontal, pelo que as projecções horizontais de todas as rectas do plano estão sobre h_α – fazendo $i_1 \equiv h_\alpha$, garante-se que a recta i pertence ao plano α . A recta i já pertence ao plano α , que é projectante. A recta i tem, agora, de pertencer ao plano δ , que **não é projectante**. Para que uma recta pertença a um plano, os seus traços têm de estar sobre os traços homónimos do plano. Assim, a partir da projecção horizontal da recta i , determinaram-se os seus traços, sobre os traços homónimos do plano δ , para garantir que a recta também pertence ao plano δ – os traços permitiram-nos obter i_2 , a projecção frontal da recta. A recta i está definida por dois pontos, que são os seus traços.



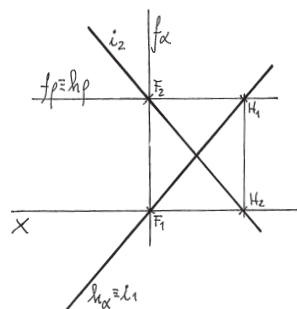
454.

Ver relatório do exercício anterior.



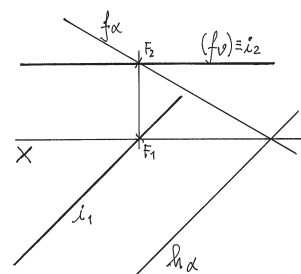
455.

Ver relatório do exercício 453.

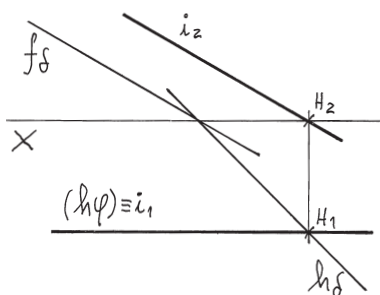


456.

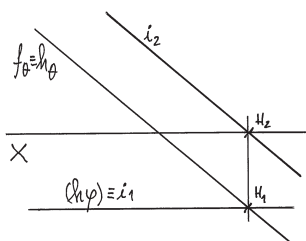
A recta de intersecção dos dois planos (recta i) pertence aos dois planos – é o lugar geométrico dos pontos do espaço que pertencem simultaneamente aos dois planos. Todos os seus pontos têm de pertencer aos dois planos. O plano v é projectante frontal, pelo que as projecções frontais de todas as rectas do plano estão sobre (f_v) – fazendo $i_2 \equiv (f_v)$, garante-se que a recta i pertence ao plano v . A recta i tem, **necessariamente** de ser uma recta horizontal (de nível), pois todos os seus pontos têm a mesma cota. A recta i é, assim, uma recta horizontal (de nível) que pertence simultaneamente aos dois planos. A recta i é, então, uma recta horizontal (de nível) do plano α – rectas horizontais de um plano são paralelas entre si e paralelas ao traço horizontal do plano (que é uma recta horizontal do plano com cota nula), pelo que já temos a direcção da recta i – é paralela a h_α . Determinou-se o traço frontal da recta i , sobre f_α (a recta tem de verificar a condição para que uma recta pertença a um plano), e desenhou-se i_1 , passando por F_1 e paralela a h_α . A recta i está definida por um ponto e uma direcção.



457.



A recta de intersecção dos dois planos (recta i) pertence aos dois planos – é o lugar geométrico dos pontos do espaço que pertencem simultaneamente aos dois planos. Todos os seus pontos têm de pertencer aos dois planos. O plano ϕ é projectante horizontal, pelo que as projecções horizontais de todas as rectas do plano estão sobre (h_ϕ) – fazendo $i_1 \equiv (h_\phi)$, garante-se que a recta i pertence ao plano ϕ . A recta i tem, **necessariamente** de ser uma recta frontal (de frente), pois todos os seus pontos têm o mesmo afastamento. A recta i é, assim, uma recta frontal (de frente) que pertence simultaneamente aos dois planos. A recta i é, então, uma recta frontal (de frente) do plano δ , pois rectas frontais (de frente) de um plano são paralelas entre si e paralelas ao traço frontal do plano (que é uma recta frontal do plano com afastamento nulo), pelo que já temos a direcção da recta i – é paralela a f_δ . Determinou-se o traço horizontal da recta i , sobre h_δ (a recta tem de verificar a condição para que uma recta pertença a um plano), e desenhou-se i_2 , passando por H_2 e paralela a f_δ . A recta i está definida por um ponto e uma direcção.

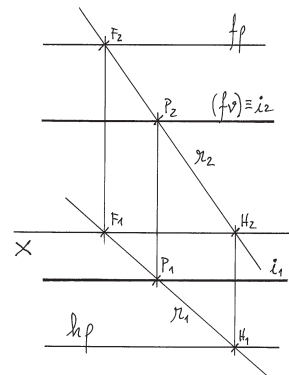


458.

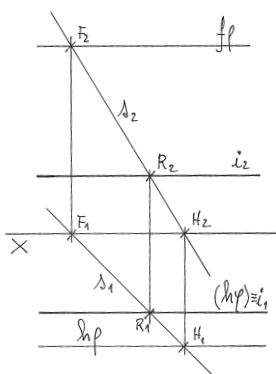
Ver relatório do exercício anterior.

459.

A recta de intersecção dos dois planos (recta i) pertence aos dois planos – é o lugar geométrico dos pontos do espaço que pertencem simultaneamente aos dois planos. Todos os seus pontos têm de pertencer aos dois planos. O plano v é projectante frontal, pelo que as projecções frontais de todas as rectas do plano estão sobre (f_v) – fazendo $i_2 \equiv (f_v)$, garante-se que a recta i pertence ao plano v . A recta i tem, **necessariamente** de ser uma recta horizontal (de nível), pois todos os seus pontos têm a mesma cota. As rectas horizontais (de nível) do plano ρ são **necessariamente** fronto-horizontais, pelo que a recta i é uma recta fronto-horizontal do plano ρ – já temos a direcção da recta i . Falta-nos um ponto – o exercício redundava, assim, na situação do exercício 367, pelo que se aconselha a leitura do respectivo relatório. É necessário recorrer a uma recta auxiliar do plano ρ para definir a recta i . Recorreu-se a uma recta oblíqua r , auxiliar, pertencente ao plano ρ – a recta r está definida por dois pontos, que são os seus traços. As rectas i e r são coplanares e não paralelas, pelo que são concorrentes, pelo que existe um ponto de concorrência – o ponto P . Já temos o ponto que nos faltava. Por P_1 conduziu-se i_1 . A recta i está definida por um ponto (P) e por uma direcção (é fronto-horizontal). Note que se poderia ter percebido, desde o início, que a recta de intersecção dos dois planos era uma recta fronto-horizontal – a recta de intersecção entre dois planos é **uma recta da única «família»** de rectas comum aos dois planos. A **única «família»** de rectas comum a um plano de rampa e a um plano horizontal (de nível) é **necessariamente** a das rectas fronto-horizontais.



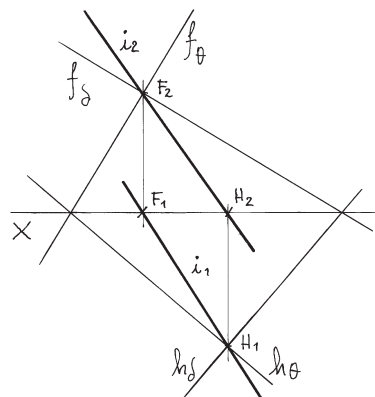
460.



A recta de intersecção dos dois planos (recta i) pertence aos dois planos – é o lugar geométrico dos pontos do espaço que pertencem simultaneamente aos dois planos. O plano ϕ é projectante horizontal, pelo que as projecções horizontais de todas as rectas do plano estão sobre (h_ϕ) – fazendo $i_1 \equiv (h_\phi)$, garante-se que a recta i pertence ao plano ϕ . A recta i tem, **necessariamente** de ser uma recta frontal (de frente), pois todos os seus pontos têm o mesmo afastamento. As rectas frontais (de frente) do plano ρ são **necessariamente** fronto-horizontais, pelo que a recta i é uma recta fronto-horizontal do plano ρ – já temos a direcção da recta i . Falta-nos um ponto – o exercício redundava, de novo, na situação do exercício 367, pelo que se aconselha a leitura do respectivo relatório. É necessário recorrer a uma recta auxiliar do plano ρ para definir a recta i . Recorreu-se a uma recta oblíqua s , auxiliar, pertencente ao plano ρ – a recta s está definida por dois pontos, que são os seus traços. As rectas i e s são coplanares e não paralelas, pelo que são concorrentes, pelo que existe um ponto de concorrência – o ponto R . Já temos o ponto que nos faltava. Por R_2 conduziu-se i_2 . A recta i está definida por um ponto (R) e por uma direcção (é fronto-horizontal). Note que se poderia ter percebido, desde o início, que a recta de intersecção dos dois planos era uma recta fronto-horizontal – a recta de intersecção entre dois planos é **uma recta da única «família»** de rectas comum aos dois planos. A **única «família»** de rectas comum a um plano de rampa e a um plano frontal (de frente) é **necessariamente** a das rectas fronto-horizontais.

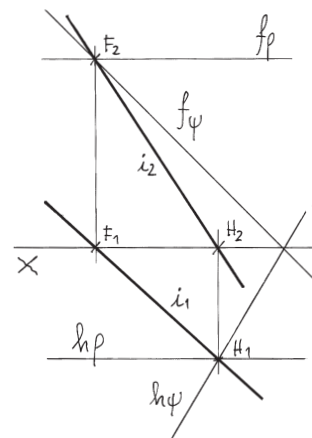
461.

A recta de intersecção dos dois planos (recta i) pertence aos dois planos – é o lugar geométrico dos pontos do espaço que pertencem simultaneamente aos dois planos. Nenhum dos dois planos é projectante, pelo que os raciocínios utilizados nos exercícios anteriores não têm aplicação nesta situação – ambos os planos são oblíquos (trata-se do **caso geral** da intersecção entre planos). Assim, a recta tem de verificar a condição para que pertença a um plano em relação aos dois planos. Para definir uma recta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direcção. Para que a recta pertença ao plano θ , o seu traço frontal tem de se situar sobre f_θ . Por outro lado, para que a recta pertença ao plano δ , o seu traço frontal tem de se situar sobre f_δ . Assim, o traço frontal da recta (F) tem de se situar, simultaneamente, sobre f_θ e sobre f_δ – F , o traço frontal da recta i , é **necessariamente** o ponto de concorrência de f_δ com f_θ . Já temos um ponto para definir a recta. Falta-nos outro ponto ou uma direcção. Por outro lado, para que a recta pertença ao plano θ , o seu traço horizontal tem de se situar sobre h_θ . Para que a recta pertença ao plano δ , o seu traço horizontal tem de se situar sobre h_δ . Assim, o traço horizontal da recta (H) tem de se situar simultaneamente sobre h_θ e sobre h_δ – H , o traço horizontal da recta i , é **necessariamente** o ponto de concorrência de h_δ com h_θ . Já temos outro ponto para definir a recta – a recta i está definida por dois pontos, que são os seus traços nos planos de projecção.

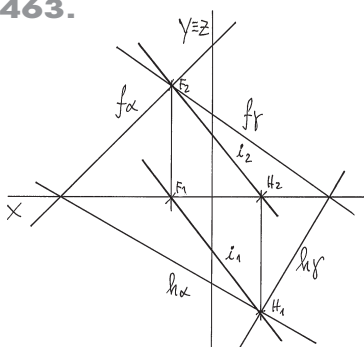


462.

Nenhum dos dois planos, ψ e ρ , é projectante, pelo que a situação apresentada é semelhante à do exercício anterior (**caso geral** da intersecção entre planos) – ver relatório do exercício anterior.



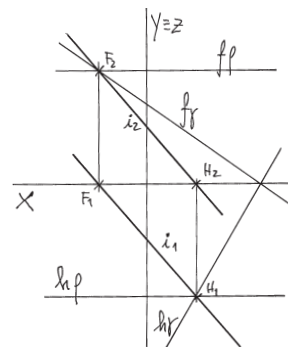
463.



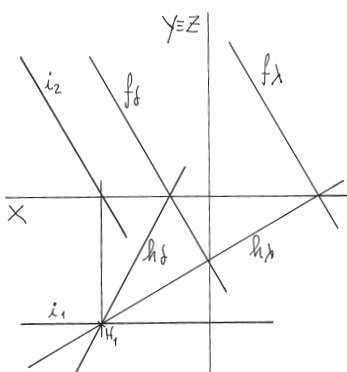
Nenhum dos dois planos, α e γ , é projectante, pelo que a situação apresentada é semelhante à do exercício 461 (**caso geral** da intersecção entre planos) – ver relatório do exercício 461.

464.

Nenhum dos dois planos, γ e ρ , é projectante, pelo que a situação apresentada é semelhante à do exercício 461 (**caso geral** da intersecção entre planos) – ver relatório do exercício 461.



465.

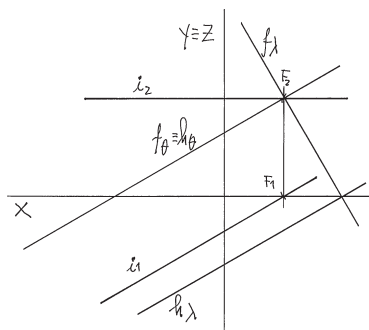


A recta de intersecção dos dois planos (recta i) pertence aos dois planos – é o lugar geométrico dos pontos do espaço que pertencem simultaneamente aos dois planos. Nenhum dos dois planos é projectante – trata-se, portanto, do **caso geral** da intersecção entre planos. Para definir uma recta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direcção. Para que a recta pertença ao plano δ , o seu traço horizontal tem de se situar sobre h_δ . Para que a recta pertença ao plano λ , o seu traço horizontal tem de se situar sobre h_λ . Assim, o traço horizontal da recta (H) tem de se situar simultaneamente sobre h_δ e sobre h_λ – H , o traço horizontal da recta i , é **necessariamente** o ponto de concorrência de h_δ com h_λ . Já temos um ponto para definir a recta – falta-nos outro ponto ou uma direcção. Por outro lado, para que a recta pertença ao plano δ , o seu traço frontal tem de se situar sobre f_δ . Para que a recta pertença ao plano λ , o seu traço frontal tem de se situar sobre f_λ . Assim, o traço frontal da recta (F) tem de se situar, simultaneamente, sobre f_δ e sobre f_λ – F , o traço frontal da recta i , é **necessariamente** o ponto de concorrência de f_δ com f_λ . Acontece que f_δ e f_λ não se intersectam (são paralelos) – mais correc-

tamente, f_δ e f_λ intersectam-se num ponto do infinito. Dessa forma, F , o traço frontal da recta i situa-se no infinito. A recta i não tem traço frontal – é **necessariamente** uma **recta frontal (de frente)** que pertence aos dois planos. Atendendo a que rectas frontais (de frente) de um plano são paralelas entre si e paralelas ao traço frontal do plano (que é uma recta frontal do plano com afastamento nulo), já temos a direcção da recta i . A recta i está definida por um ponto (H) e por uma direcção – é paralela a f_δ e f_λ . Uma outra forma de resolver o exercício seria recordar que a recta de intersecção entre dois planos é **necessariamente** uma recta da **única «família»** de rectas comum aos dois planos. Observando os traços dos dois planos, e atendendo a que **dois planos secantes têm uma única «família» de rectas em comum**, constata-se que essa «família» de rectas é a das rectas frontais (de frente), pois os traços frontais dos dois planos são paralelos – a recta de intersecção é, assim, uma recta frontal (de frente) comum aos dois planos.

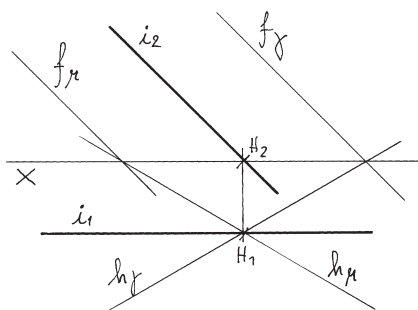
466.

A recta de intersecção dos dois planos (recta i) pertence aos dois planos. Nenhum dos dois planos é projectante – trata-se, portanto, do **caso geral** da intersecção entre planos. Para definir uma recta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direcção. Para que a recta pertença ao plano λ , o seu traço frontal tem de se situar sobre f_λ . Para que a recta pertença ao plano θ , o seu traço frontal tem de se situar sobre f_θ . Assim, o traço frontal da recta (F) tem de se situar, simultaneamente, sobre f_λ e sobre f_θ – F , o traço frontal da recta i , é **necessariamente** o ponto de concorrência de f_λ com f_θ . Já temos um ponto para definir a recta – falta-nos outro ponto ou uma direcção. Por outro lado, para que a recta pertença ao plano λ , o seu traço horizontal tem de se situar sobre h_λ . Para que a recta pertença ao plano θ , o seu traço horizontal tem de se situar sobre h_θ . Assim, o traço horizontal da recta (H) tem de se situar, simultaneamente, sobre h_λ e sobre h_θ – H , o traço horizontal da recta i , é **necessariamente** o ponto de concorrência de h_λ com h_θ . Acontece que h_λ e h_θ não se intersectam (são paralelos) – mais correctamente, h_λ e h_θ intersectam-se num ponto do infinito. Dessa forma, H , o traço horizontal da recta i situa-se no infinito. A recta i não tem traço horizontal – é **necessariamente** uma **recta horizontal (de nível)** que pertence aos dois planos. Atendendo a que rectas horizontais (de nível) de um plano são paralelas entre si e paralelas ao traço horizontal do plano (que é uma recta horizontal do plano com cota nula), já temos a direcção da recta i . A recta i está definida por um ponto (F) e por uma direcção – é paralela a h_λ e h_θ . Uma outra forma de resolver o exercício seria recordar que a recta de intersecção entre dois planos é **necessariamente** uma recta da **única «família»** de rectas comum aos dois planos. Observando os traços dos dois planos, e atendendo a que **dois planos secantes têm uma única «família» de rectas em comum**, constata-se que essa «família» de rectas é a das rectas horizontais (de nível), pois os traços horizontais dos dois planos são paralelos – a recta de intersecção é, assim, uma recta horizontal (de nível) comum aos dois planos.



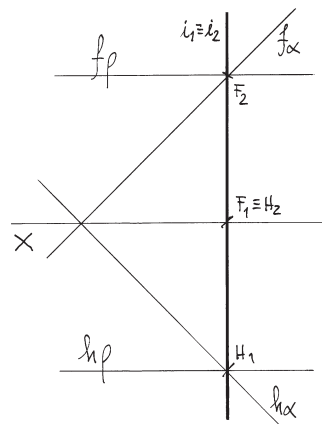
467.

Ver exercício 465.

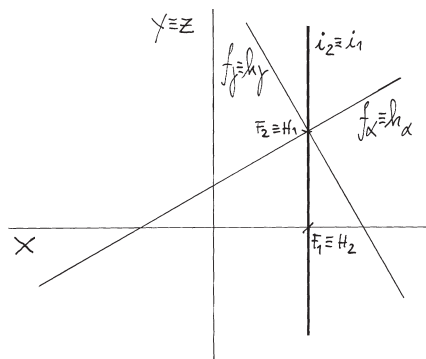


468.

Nenhum dos dois planos, α e ρ , é projectante, pelo que a situação apresentada é semelhante à do exercício 461 (**caso geral** da intersecção entre planos) – ver relatório do exercício 461. A projecção frontal da recta i , i_2 , está definida por F_2 e H_2 . A projecção horizontal da recta i , i_1 , está definida por F_1 e H_1 . Trata-se de uma **recta de perfil**.



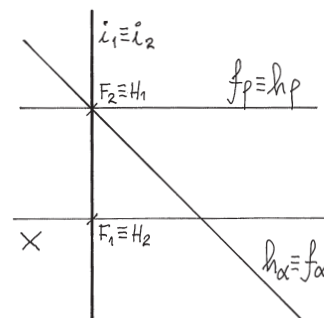
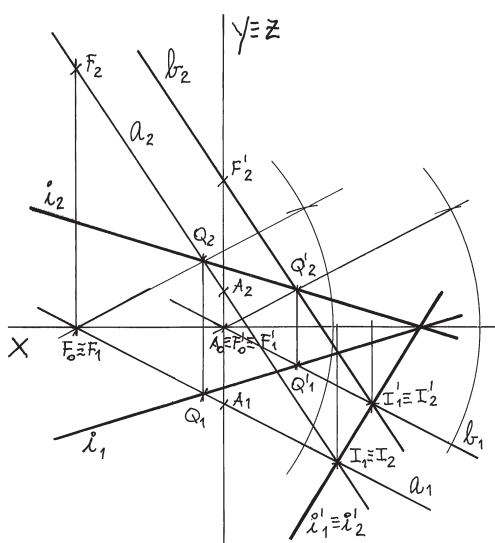
469.



Nenhum dos dois planos, α e γ , é projectante, pelo que a situação apresentada é semelhante à do exercício 461 (**caso geral** da intersecção entre planos) – ver relatório do exercício 461. A projecção frontal da recta i , i_2 , está definida por F_2 e H_2 . A projecção horizontal da recta i , i_1 , está definida por F_1 e H_1 . Trata-se de uma **recta de perfil**.

470.

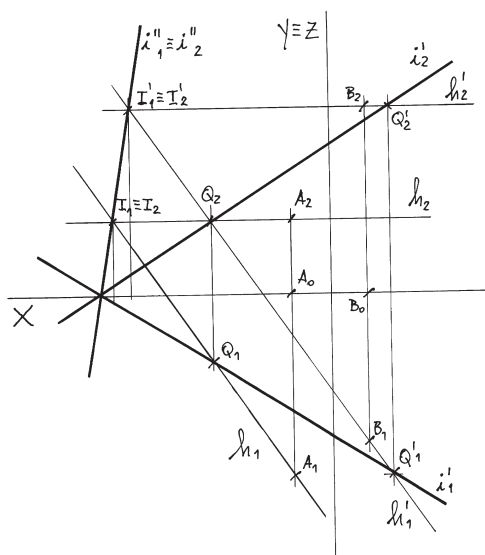
No enunciado refere-se que os dois planos têm os seus traços coincidentes – quer isto dizer que os traços do plano α (frontal e horizontal) estão coincidentes e que os traços de ρ (frontal e horizontal) também estão coincidentes. Não se pretende dizer, em circunstância nenhuma, que os traços de α estão coincidentes com os traços de ρ . Ver relatório do exercício anterior. Trata-se de uma **recta de perfil**.

**471.**

Sobre a determinação das projeções da recta i (a recta de intersecção do plano com o $\beta_{1/3}$), ver relatório do exercício 277. Sobre a determinação das projeções da recta i' (a recta de intersecção do plano com o $\beta_{2/4}$), ver relatório do exercício 278.

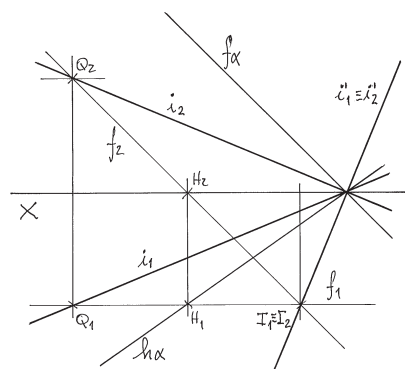
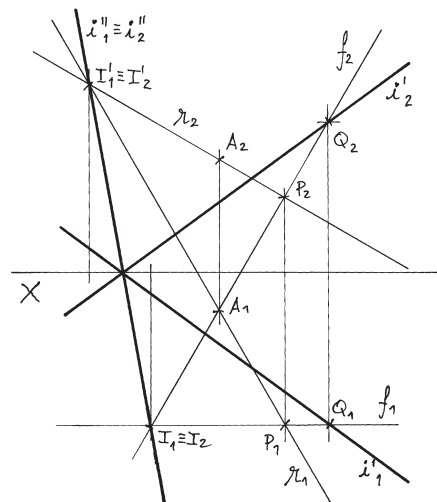
472.

- a) Ver relatório do exercício 277.
b) Ver relatório do exercício 278.



473.

Optou-se, nesta situação, por determinar em primeiro lugar as projecções da recta i'' , a recta de intersecção do plano com o $\beta_{2/4}$ (ver relatório do exercício 278). Para determinar a recta i' recorreu-se ao traço no $\beta_{1/3}$ da recta f , o ponto Q , e ao ponto de concorrência das rectas i' e i'' , que é um ponto do eixo X (ver relatório do exercício 279) – a recta i' está, assim, definida por dois pontos.

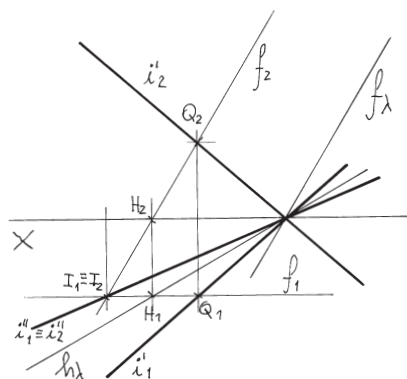
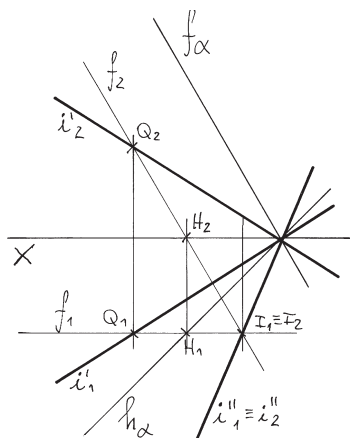
**474.**

É um **plano apoiado**, pois a face visível em projecção frontal e em projecção horizontal é a mesma. A recta i é a recta de intersecção do plano dado com o $\beta_{1/3}$ – essa recta tem de pertencer simultaneamente aos dois planos, ou seja, a recta i é o lugar geométrico dos pontos do espaço que pertencem simultaneamente aos dois planos. Para definir uma recta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direcção. O ponto de concorrência dos traços do plano é um ponto do $\beta_{1/3}$ (todos os pontos do eixo X pertencem ao $\beta_{1/3}$) e pertence ao plano α – já temos um ponto para definir a recta i . Falta-nos outro ponto ou uma direcção. É necessário o recurso a uma recta auxiliar do plano. Recorreu-se a uma recta frontal (de frente) f , do plano. Todos os pontos da recta f pertencem ao plano α . Determinou-se o traço da recta f no $\beta_{1/3}$ – Q . Q pertence ao plano α , pois pertence a uma recta do plano (recta f) e pertence ao $\beta_{1/3}$, pois tem as suas projecções simétricas em relação ao eixo X . Q é, assim, um ponto que pertence a ambos os planos. Já temos outro ponto para definir a recta i . A recta i está definida por dois pontos – o ponto Q e o ponto de concorrência dos traços do plano. A recta i' é a recta de intersecção do plano dado com o $\beta_{2/4}$ –

essa recta tem de pertencer simultaneamente aos dois planos (a recta i' é o lugar geométrico dos pontos do espaço que pertencem simultaneamente aos dois planos). Para definir uma recta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direcção. O ponto de concorrência dos traços do plano é também um ponto do $\beta_{2/4}$ (todos os pontos do eixo X pertencem ao $\beta_{2/4}$) e pertence ao plano α – já temos um ponto para definir a recta i' . Falta-nos outro ponto ou uma direcção. Em seguida, determinou-se o traço da recta f no $\beta_{2/4}$ – I . I pertence ao plano α , pois pertence a uma recta do plano (recta f) e pertence ao $\beta_{2/4}$, pois tem as suas projecções coincidentes. I é, assim, um ponto que pertence a ambos os planos. Já temos outro ponto para definir a recta i' . A recta i' está definida por dois pontos – o ponto I e o ponto de concorrência dos traços do plano.

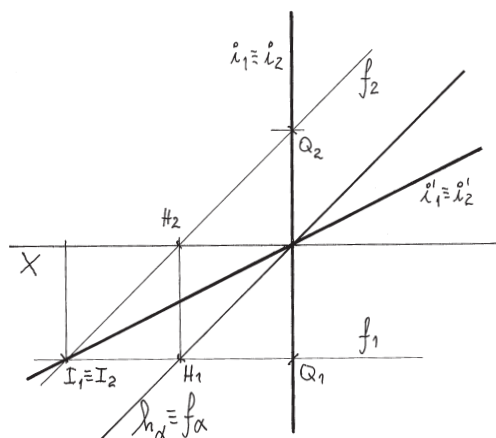
475. Ver relatório do exercício anterior.

476. Ver relatório do exercício 474.

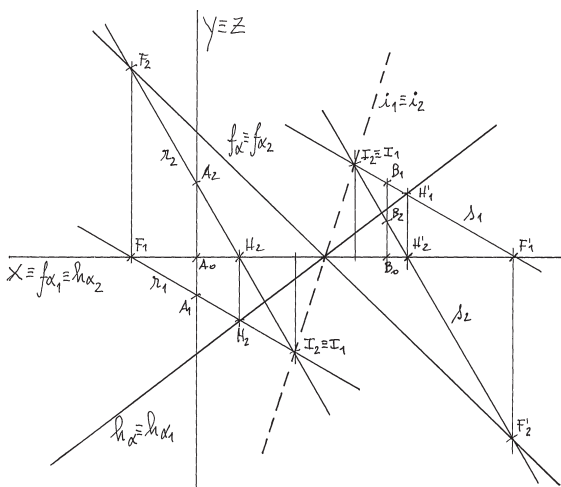


477.

Ver relatório do exercício 474. Note que, na presente situação, a recta i (a recta de intersecção do plano α com o $\beta_{1/3}$) é uma **recta de perfil**.



478.



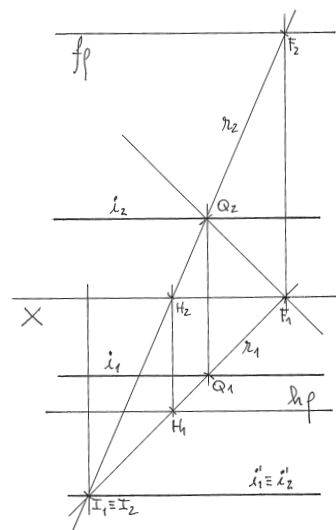
a) Desenharam-se as projecções de r e s , em função dos dados.

Em seguida, determinaram-se os traços das duas rectas nos planos de projecção e desenharam-se os traços do plano – h_α e f_α . Para determinar as **projectões dos traços do plano**, teve-se em conta que cada um deles é uma recta. Assim, h_α é uma recta horizontal (de nível) do plano com cota nula – $h_{\alpha 1}$ está definida por H_1 e H'_1 ($h_{\alpha 1} \equiv h_\omega$) e $h_{\alpha 2}$ está definida por H_2 e H'_2 ($h_{\alpha 2}$ está no eixo X , pois é a projecção frontal de uma recta horizontal com cota nula – ver exercícios 228 e 282). Por outro lado, f_α é uma recta frontal (de frente) do plano com afastamento nulo – $f_{\alpha 2}$ está definida por F_2 e F'_2 ($f_{\alpha 2} \equiv f_\omega$) e $f_{\alpha 1}$ está definida por F_1 e F'_1 ($f_{\alpha 1}$ está no eixo X , pois é a projecção horizontal de uma recta frontal com afastamento nulo – ver exercícios 229 e 282).

b) A recta i fica definida pelos traços de r e s no $\beta_{2/4}$ (ver exercício 278). Note que a recta i contém o ponto de concorrência dos traços do plano. A recta i atravessa o 2º e o 4º Diedros (é uma recta do $\beta_{2/4}$), pelo que é invisível na sua totalidade.

479.

É um **plano apoiado**, pois a face visível em projecção frontal e em projecção horizontal é a mesma. A recta i é a recta de intersecção do plano dado com o $\beta_{1/3}$ – tem de pertencer simultaneamente aos dois planos. Para definir uma recta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direcção. A recta de intersecção entre dois planos é uma recta da única «família» de rectas comum aos dois planos. A única «família» de rectas comum a um plano de rampa e ao $\beta_{1/3}$ (que é outro plano de rampa – é um plano passante) é **necessariamente** uma recta fronto-horizontal. Já temos a direcção da recta i – é fronto-horizontal. Falta-nos um ponto. É necessário o recurso a uma recta auxiliar do plano. Recorreu-se a uma recta qualquer, oblíqua, do plano – recta r . Todos os pontos da recta r pertencem ao plano p . Determinou-se o traço da recta r no $\beta_{1/3}$ – Q . Q pertence ao plano p , pois pertence a uma recta do plano (recta r) e pertence ao $\beta_{1/3}$, pois tem as suas projecções simétricas em relação ao eixo X . Q é, assim, um ponto que pertence a ambos os planos. Já temos o ponto que nos faltava. A recta i está definida por um ponto (o ponto Q) e por uma direcção (é fronto-horizontal). Note que as projecções da recta i são simétricas em relação ao eixo X . A recta i' é a recta de intersecção do plano dado com o $\beta_{2/4}$ – tem de pertencer simultaneamente aos dois planos. Para definir uma recta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direcção. A recta de intersecção entre dois planos é uma recta da única «família» de rectas comum aos dois planos. A única «família» de rectas comum a um plano de rampa e ao $\beta_{2/4}$ (que é outro plano de rampa – é um plano passante) é **necessariamente** uma recta fronto-horizontal. Já temos a direcção da recta i' – é fronto-horizontal. Falta-nos um ponto. Determinou-se o traço da recta r no $\beta_{2/4}$ – I . I pertence ao plano p , pois pertence a uma recta do plano (recta r) e pertence ao $\beta_{2/4}$, pois tem as suas projecções coincidentes. I é, assim, um ponto que pertence a ambos os planos. Já temos o ponto que nos faltava. A recta i' está definida por um ponto (o ponto I) e por uma direcção (é fronto-horizontal). Note que as projecções da recta i' estão coincidentes.



484.

A recta de intersecção do plano φ com o $\beta_{1/3}$ é uma recta que pertence simultaneamente ao plano φ e ao $\beta_{1/3}$. O plano φ é **projectante horizontal**, pelo que projecta horizontalmente todas as suas rectas e pontos no seu traço horizontal. Fazendo $i'_1 = (h_\varphi)$, garante-se que a recta i' pertence ao plano φ . A recta i' pertence ao $\beta_{1/3}$ e rectas do $\beta_{1/3}$ têm projecções simétricas em relação ao eixo X , pelo que i'_2 tem de ser simétrica de i'_1 em relação ao eixo X . A recta i' é uma recta fronto-horizontal. A recta de intersecção do plano φ com o $\beta_{2/4}$ é uma recta que pertence simultaneamente ao plano φ e ao $\beta_{2/4}$. O plano φ é **projectante horizontal**, pelo que fazendo $i''_1 = (h_\varphi)$ se garante que a recta i'' pertence ao plano φ . A recta i'' pertence ao $\beta_{2/4}$ e rectas do $\beta_{2/4}$ têm projecções coincidentes, pelo que se tem $i''_2 = i''_1 = (h_\varphi)$. A recta i'' é também uma recta fronto-horizontal. Note que se poderia ter determinado previamente a direcção das rectas i' e i'' , raciocinando sobre o facto de a recta de intersecção entre dois planos ser uma recta da única «família» de rectas comum aos dois planos. Ora, a única «família» de rectas comum a um plano frontal (de frente) e a um plano de rampa (ambos os planos bissectores são planos de rampa – são planos passantes) é **necessariamente** uma recta fronto-horizontal (ver exercício 460).

 i'_2

X

$$(h_\varphi) \equiv i'_1 \equiv i''_1 \equiv i''_2$$

485.

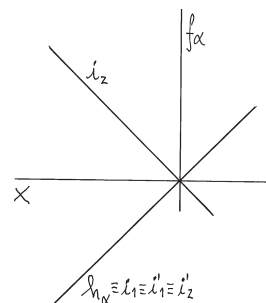
$$(f_v) \equiv i'_2 \equiv i''_2 \equiv i''_1$$

X

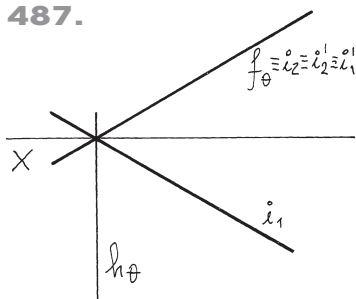
A recta de intersecção do plano v com o $\beta_{1/3}$ é uma recta que pertence simultaneamente ao plano v e ao $\beta_{1/3}$. O plano v é **projectante frontal**, pelo que projecta frontalmente todas as suas rectas e pontos no seu traço frontal. Fazendo $i'_2 = (f_v)$, garante-se que a recta i' pertence ao plano v . A recta i' pertence ao $\beta_{1/3}$ e rectas do $\beta_{1/3}$ têm projecções simétricas em relação ao eixo X , pelo que i'_1 tem de ser simétrica de i'_2 em relação ao eixo X . A recta i' é uma recta fronto-horizontal. A recta de intersecção do plano v com o $\beta_{2/4}$ é uma recta que pertence simultaneamente ao plano v e ao $\beta_{2/4}$. O plano v é **projectante frontal**, pelo que fazendo $i''_2 = (f_v)$ se garante que a recta i'' pertence ao plano v . A recta i'' pertence ao $\beta_{2/4}$ e rectas do $\beta_{2/4}$ têm projecções coincidentes, pelo que se tem $i''_1 = i''_2 = (f_v)$. A recta i'' é também uma recta fronto-horizontal. Note que se poderia ter determinado previamente a direcção das rectas i' e i'' , raciocinando sobre o facto de a recta de intersecção entre dois planos ser uma recta da única «família» de rectas comum aos dois planos. Ora, a única «família» de rectas comum a um plano horizontal (de nível) e a um plano de rampa (ambos os planos bissectores são planos de rampa – são planos passantes) é **necessariamente** uma recta fronto-horizontal (ver exercício 459).

486.

É um **plano projectante**, pois numa das projecções (a projecção horizontal) o plano reduz-se a uma recta (é um plano projectante horizontal). A recta de intersecção do plano α com o $\beta_{1/3}$ é uma recta que pertence simultaneamente ao plano α e ao $\beta_{1/3}$. O plano α é **projectante horizontal**, pelo que projecta horizontalmente todas as suas rectas e pontos no seu traço horizontal. Fazendo $i_1 = h_\alpha$, garante-se que a recta i pertence ao plano α . A recta i pertence ao $\beta_{1/3}$ e rectas do $\beta_{1/3}$ têm projecções simétricas em relação ao eixo X , pelo que i_2 tem de ser simétrica de i_1 em relação ao eixo X . A recta de intersecção do plano α com o $\beta_{2/4}$ é uma recta que pertence simultaneamente ao plano α e ao $\beta_{2/4}$. O plano α é **projectante horizontal**, pelo que fazendo $i'_1 = h_\alpha$ se garante que a recta i' pertence ao plano α . A recta i' pertence ao $\beta_{2/4}$ e rectas do $\beta_{2/4}$ têm projecções coincidentes, pelo que se tem $i'_2 = i'_1 = h_\alpha$.



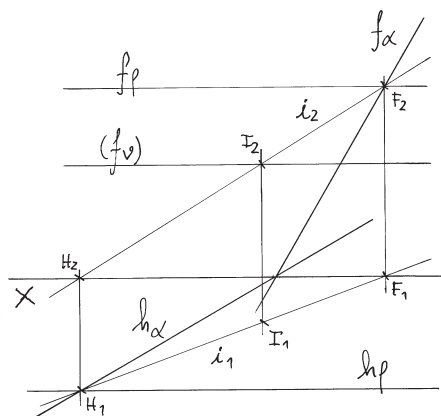
487.



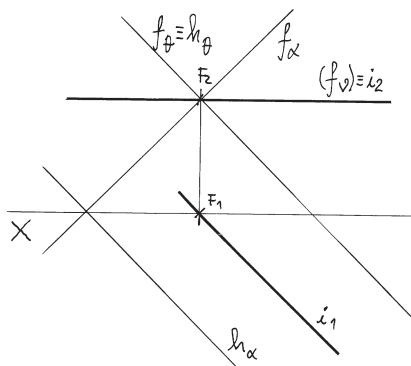
A recta de intersecção do plano θ com o $\beta_{1/3}$ é uma recta que pertence simultaneamente ao plano θ e ao $\beta_{1/3}$. O plano θ é **projectante frontal**, pelo que projecta frontalmente todas as suas rectas e pontos no seu traço frontal. Fazendo $i_2 = f_\theta$, garante-se que a recta i pertence ao plano θ . A recta i pertence ao $\beta_{1/3}$ e rectas do $\beta_{1/3}$ têm projecções simétricas em relação ao eixo X , pelo que i_1 tem de ser simétrica de i_2 em relação ao eixo X . A recta de intersecção do plano θ com o $\beta_{2/4}$ é uma recta que pertence simultaneamente ao plano θ e ao $\beta_{2/4}$. O plano θ é **projectante frontal**, pelo que fazendo $i'_2 = f_\theta$ se garante que a recta i' pertence ao plano θ . A recta i' pertence ao $\beta_{2/4}$ e rectas do $\beta_{2/4}$ têm projecções coincidentes, pelo que se tem $i'_1 = i'_2 = f_\theta$.

488.

Em primeiro lugar, determinou-se a recta i , a recta de intersecção de α com ρ - trata-se do **caso geral** da intersecção de planos, pois nenhum dos dois planos é projectante. Todos os pontos da recta i pertencem a α e a ρ . O plano v corta a recta i no ponto I . O ponto I é, pois, o ponto de intersecção da recta i com o plano v (v é projectante frontal - ver exercício 433). O ponto I pertence aos planos α e ρ (porque pertence à recta i) e pertence ao plano v . O ponto I é, assim, um ponto que pertence simultaneamente aos três planos. A figura geométrica resultante da intersecção dos três planos é um ponto - o ponto I .



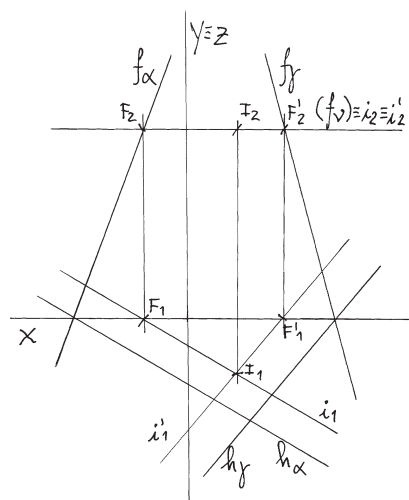
489.



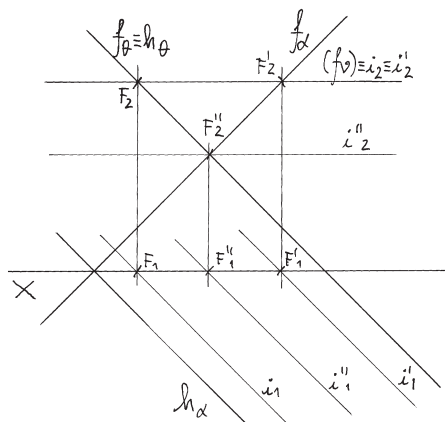
Em primeiro lugar, determinou-se a recta i , a recta de intersecção do plano α com o plano v - i é uma recta horizontal (de nível) do plano α (ver exercício 456) e é o lugar geométrico dos pontos do espaço que pertencem simultaneamente a v e a α . Em seguida, determinou-se a recta de intersecção entre os planos v e θ , que é também uma recta horizontal (de nível) - é a própria recta i . A recta i é, também, o lugar geométrico dos pontos do espaço que pertencem simultaneamente a v e a θ . Conclui-se, portanto, que todos os pontos da recta i pertencem simultaneamente aos três planos, pelo que a figura geométrica resultante da intersecção dos três planos é a própria recta i .

490.

Em primeiro lugar, determinou-se a recta i , a recta de intersecção do plano α com o plano v - i é uma recta horizontal (de nível) do plano α (ver exercício 456) e é o lugar geométrico dos pontos do espaço que pertencem simultaneamente a v e a α . Em seguida, determinou-se a recta i' , a recta de intersecção do plano γ com o plano v - i' é uma recta horizontal (de nível) do plano γ (ver exercício 456) e é o lugar geométrico dos pontos do espaço que pertencem simultaneamente a v e a γ . As rectas i e i' são concorrentes no ponto I - o ponto I pertence aos planos α e v , pois pertence à recta i , e pertence aos planos γ e v , pois pertence à recta i' . O ponto I é, assim, um ponto comum aos três planos - é o ponto de intersecção dos três planos. A figura geométrica resultante da intersecção dos três planos é o ponto I .



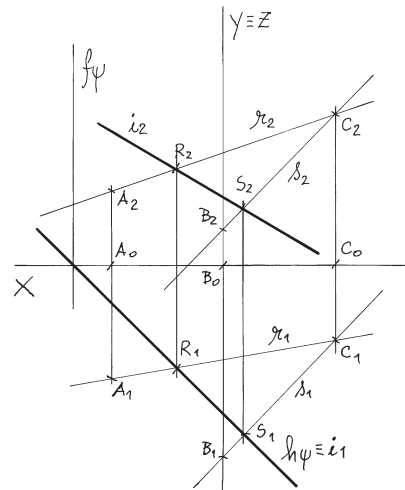
491.



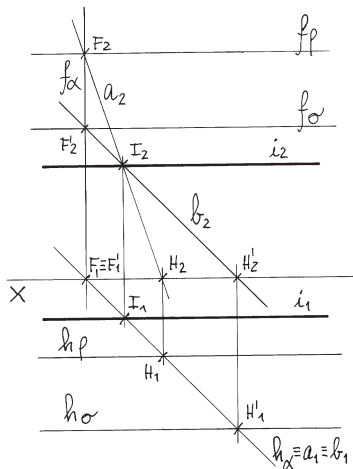
Em primeiro lugar, determinou-se a recta i , a recta de intersecção do plano θ com o plano v - i é uma recta horizontal (de nível) do plano θ (ver exercício 456) e é o lugar geométrico dos pontos do espaço que pertencem simultaneamente a v e a θ . Em seguida, determinou-se a recta i' , a recta de intersecção do plano α com o plano v - i' é uma recta horizontal (de nível) do plano α (ver exercício 456) e é o lugar geométrico dos pontos do espaço que pertencem simultaneamente a v e a α . Por fim, determinou-se a recta i'' , a recta de intersecção do plano θ com o plano α (ver exercício 466) - i'' é uma recta horizontal (de nível) comum aos dois planos e é o lugar geométrico dos pontos do espaço que pertencem simultaneamente a α e a θ . As rectas i , i' e i'' são paralelas entre si - são concorrentes num ponto do infinito (**ponto impróprio**). A figura geométrica resultante da intersecção dos três planos é, assim, um **ponto impróprio** (o ponto do infinito no qual são concorrentes as três rectas).

495.

Ver relatório do exercício 493. Note que os dados do plano α não são suficientes para definir a recta i , de que se conhece, apenas, a projecção horizontal ($i_1 \equiv h_\psi$). Assim, foi necessário o recurso a uma recta auxiliar do plano α – a recta r , que está definida pelos pontos **A** e **C**. O ponto de intersecção do plano ψ com a recta r dá-nos um ponto da recta i – o ponto **R**. Em seguida foi necessário o recurso a outra recta auxiliar do plano α – a recta s , que está definida pelos pontos **B** e **C**. O ponto de intersecção do plano ψ com a recta s dá-nos outro ponto para definir a recta i – o ponto **S**.



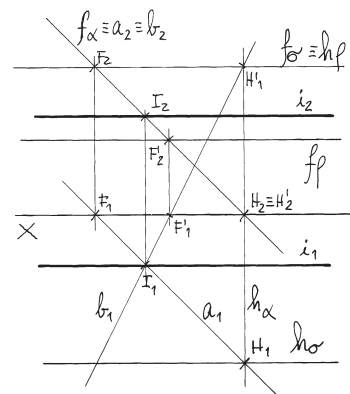
496.



A recta de intersecção entre dois planos tem de pertencer simultaneamente aos dois planos. Para definir uma recta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direcção. A recta de intersecção entre dois planos é uma recta da única «família» de rectas comum aos dois planos. A única «família» de rectas comum a dois planos de rampa é **necessariamente** uma recta fronto-horizontal. Já temos a direcção da recta i – é fronto-horizontal. Falta-nos um ponto para definir a recta. Nesta situação, é necessário o recurso a um **plano auxiliar**. Recorreu-se a um plano auxiliar – plano α (um **plano vertical**). Em seguida determinou-se a recta de intersecção do plano α , auxiliar, com o plano ρ – recta a (ver exercício 455). Em seguida determinou-se a recta de intersecção do plano α , auxiliar, com o plano σ – recta b . As rectas a e b , porque são coplanares (estão, ambas, contidas no plano auxiliar α), ou são paralelas ou são concorrentes. Não são paralelas, pelo que são concorrentes, pelo que existe um ponto de concorrência – ponto **I**. Já temos um ponto para definir a recta i – a recta i está definida por um ponto (ponto **I**) e por uma direcção (é fronto-horizontal). Note que todos os pontos da recta a pertencem simultaneamente a α e a ρ . Por outro lado, todos os pontos da recta b pertencem simultaneamente a α e a σ . Assim, o ponto **I** é um ponto que pertence aos três planos – é a figura geométrica resultante da intersecção dos três planos (α , ρ e σ). Este raciocínio justifica que o ponto **I** pertence **necessariamente** aos planos ρ e σ , pelo que é um ponto da recta de intersecção dos dois planos.

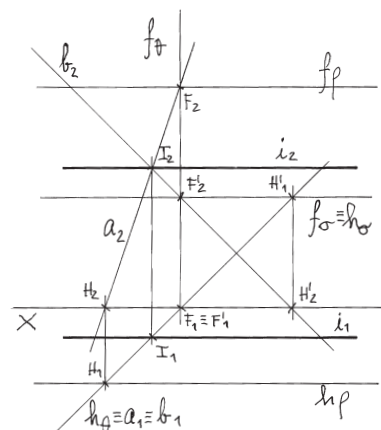
497.

Ver relatório do exercício anterior. O plano auxiliar a que se recorreu foi um **plano de topo**.

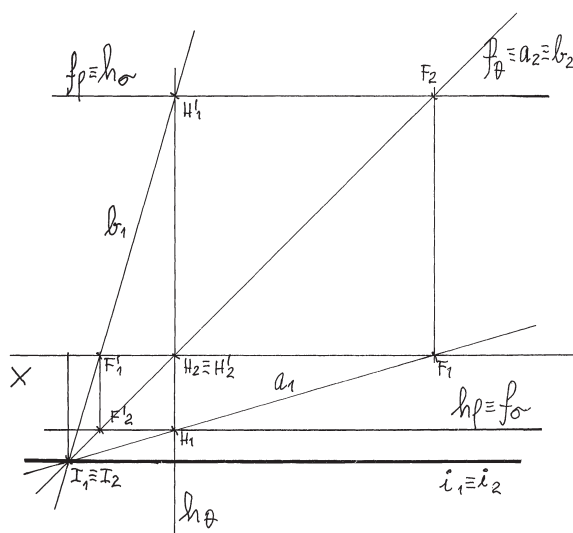


498.

Ver relatório do exercício 496. O plano auxiliar a que se recorreu (plano θ) foi um **plano vertical**.



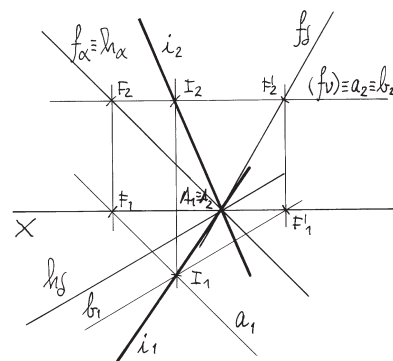
499.



Ver relatório do exercício 496. O plano auxiliar a que se recorreu (plano θ) foi um **plano de topo**. Note que a recta de intersecção dos dois planos (ρ e σ) é **necessariamente** uma recta do $\beta_{2/4}$ (tem as suas projecções coincidentes).

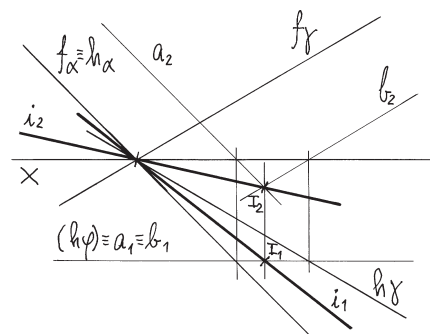
500.

O ponto do eixo X que os dois planos têm em comum é **necessariamente** o ponto de concorrência dos traços de ambos os planos – ponto **A**. A recta de intersecção entre dois planos (recta i) é uma recta que pertence simultaneamente aos dois planos. Para definir uma recta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direcção. O ponto **A**, do eixo X , é um ponto comum a α e a δ . Já temos um ponto para definir a recta i . Falta-nos outro ponto ou uma direcção. De forma imediata, não é possível obter mais nenhum elemento da recta de intersecção dos dois planos, pelo que é necessário o recurso a um **plano auxiliar**. Recorreu-se a um plano horizontal (de nível) como plano auxiliar – plano v . Determinou-se a recta a , a recta de intersecção do plano v com o plano α – a é uma recta horizontal (de nível) do plano α (ver exercício 456) e é o lugar geométrico dos pontos do espaço que pertencem simultaneamente a v e a α . Em seguida, determinou-se a recta b , a recta de intersecção do plano v com o plano δ – b é uma recta horizontal (de nível) do plano δ (ver exercício 456) e é o lugar geométrico dos pontos do espaço que pertencem simultaneamente a v e a δ . As rectas a e b são concorrentes no ponto **I**. O ponto **I** é um ponto comum aos três planos (α , δ e v) – ver exercício 490. O ponto **I** é, assim, um ponto que pertence simultaneamente aos planos α e δ , pelo que é um ponto da recta de intersecção dos dois planos. Já temos o ponto que nos faltava. A recta i está definida por dois pontos – **A** e **I**.

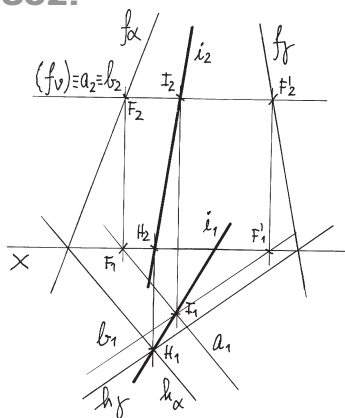


501.

Ver relatório do exercício anterior. O plano auxiliar a que se recorreu foi um **plano frontal (de frente)**. A recta a é a recta de intersecção do plano α com o plano φ - é uma recta frontal (de frente) do plano α (ver exercício 457). A recta b é a recta de intersecção do plano γ com o plano φ - é uma recta frontal (de frente) do plano γ (ver exercício 457).



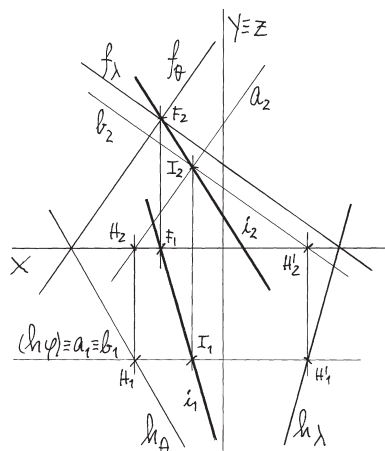
502.



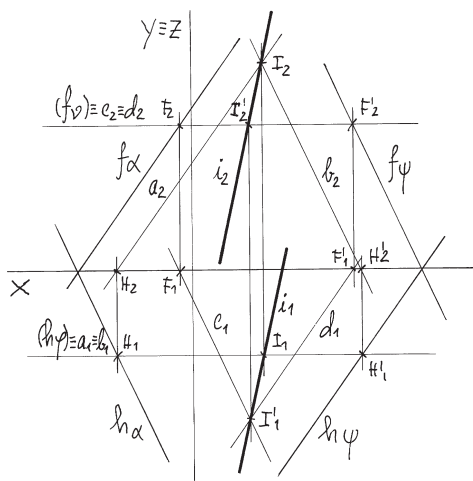
A recta de intersecção entre dois planos (recta i) é uma recta que pertence simultaneamente aos dois planos. Para definir uma recta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direcção. O recurso ao **caso geral** da intersecção entre planos (ver exercício 461) permite-nos, nesta situação, determinar apenas um ponto da recta - **H**, o seu traço horizontal (que é o ponto de concorrência de h_α com h_γ). Já temos um ponto para definir a recta i . Falta-nos outro ponto ou uma direcção. De forma imediata, não é possível obter mais nenhum elemento da recta de intersecção dos dois planos, pelo que é necessário o recurso a um **plano auxiliar**. Recorreu-se a um plano horizontal (de nível) como plano auxiliar - plano v . O recurso a um **plano auxiliar** permite-nos obter mais **um ponto** da recta de intersecção dos dois planos (ver exercício 500). A recta i está definida por dois pontos - **H**, o seu traço horizontal, e o ponto **I**.

503.

Ver relatório do exercício anterior. O ponto que o recurso ao **caso geral** da intersecção entre planos nos permite determinar é **F**, o traço frontal da recta i (que é o ponto de concorrência de f_α com f_γ). O plano auxiliar a que se recorreu foi um plano frontal (de frente) - ver exercício 501. Salienta-se que o recurso a um **plano auxiliar** permite-nos obter mais **um ponto** da recta de intersecção dos dois planos.



504.

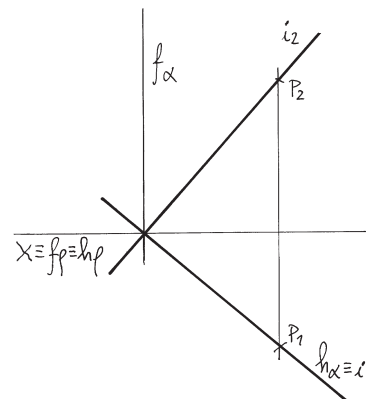


A recta de intersecção entre dois planos (recta i) é uma recta que pertence simultaneamente aos dois planos. Para definir uma recta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direcção. O recurso ao **caso geral** da intersecção entre planos (ver exercício 461), nesta situação, não nos permite determinar ponto algum da recta, pelo que necessitamos de dois pontos ou de um ponto e uma direcção. Como se fez referência no relatório do exercício 502, o recurso a um **(1) plano auxiliar** permite-nos determinar **um (1) ponto** da recta de intersecção dos dois planos. Assim, neste caso, será necessário recorrer a **dois (2) planos auxiliares** para que, dessa forma, se possam determinar **dois (2) pontos** da recta de intersecção. Recorreu-se a um plano frontal (de frente) como **primeiro** plano auxiliar - plano φ (ver exercício 501). A recta a é a recta de intersecção de φ com α . A recta b é a recta de intersecção de φ com ψ . As rectas a e b são concorrentes no ponto **I**, que é um ponto da recta de intersecção entre os planos α e ψ . Já temos **um ponto** para definir a recta i . Falta-nos outro ponto ou uma direcção. Em seguida recorreu-se a um plano horizontal (de nível) como **segundo** plano auxiliar - plano v (ver exercício 500). A recta c

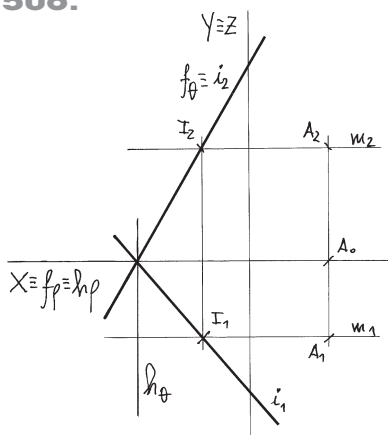
é a recta de intersecção de v com α . A recta d é a recta de intersecção de v com ψ . As rectas c e d são concorrentes no ponto **I'**, que é outro ponto da recta de intersecção entre os planos α e ψ . A recta i está definida por dois pontos - **I** e **I'**.

505.

A recta de intersecção entre dois planos (recta i) é uma recta que pertence simultaneamente aos dois planos – todos os seus pontos pertencem aos dois planos. O plano α é **projectante horizontal**, pelo que as projecções horizontais de todas as suas rectas estão sobre h_α – fazendo $i_1 \equiv h_\alpha$, garante-se que a recta i pertence ao plano α . Para definir uma recta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direcção. Todos os pontos do eixo X pertencem ao plano ρ . O ponto de concorrência de f_α e h_α , que se situa no eixo X , pertence ao plano α – esse ponto é, assim, um ponto que pertence simultaneamente aos dois planos, pelo que já é um ponto da recta i . Já temos um ponto para definir a recta. Falta-nos outro ponto ou uma direcção. O ponto P pertence ao plano ρ (é o ponto que define o plano) e também pertence ao plano α (que passa por P), pelo que P é, também, um ponto comum aos dois planos. Já temos outro ponto para definir a recta i – a recta i está definida por dois pontos.



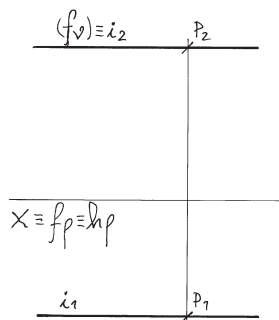
506.



A recta de intersecção entre dois planos (recta i) é uma recta que pertence simultaneamente aos dois planos – todos os seus pontos pertencem aos dois planos. O plano θ é **projectante frontal**, pelo que as projecções frontais de todas as suas rectas estão sobre f_θ – fazendo $i_2 \equiv f_\theta$, garante-se que a recta i pertence ao plano θ . Para definir uma recta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direcção. Todos os pontos do eixo X pertencem ao plano ρ . O ponto de concorrência de f_θ e h_θ , que se situa no eixo X , pertence ao plano θ – esse ponto é, assim, um ponto que pertence simultaneamente aos dois planos, pelo que já é um ponto da recta i . Já temos um ponto para definir a recta. Falta-nos outro ponto ou uma direcção. Note que já temos a projecção frontal da recta i , e já se sabe que pertence ao plano θ – trata-se, agora, de determinar as projecções de uma recta pertencente ao plano ρ . Os dados do plano são insuficientes para definir a recta, pelo que é necessário o recurso a uma recta auxiliar do plano ρ . Recorreu-se a uma recta fronto-horizontal do plano ρ – a recta m , que está definida por um ponto (o ponto A) e pela sua direcção. As rectas i e m são coplanares (pertencem, ambas, ao plano ρ) e não são paralelas, pelo que são concorrentes, pelo que existe um ponto de concorrência – o ponto I . A recta i está, assim, definida por dois pontos – o ponto de concorrência dos traços de θ e o ponto I . Note que o ponto I é o ponto em que o plano θ intersecta a recta m (ver exercício 436).

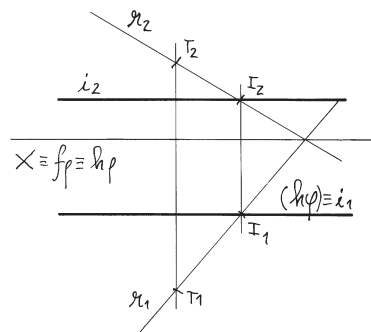
507.

A recta de intersecção entre dois planos (recta i) é uma recta que pertence simultaneamente aos dois planos – todos os seus pontos pertencem aos dois planos. O plano v é **projectante frontal**, pelo que as projecções frontais de todas as suas rectas estão sobre (f_v) – fazendo $i_2 \equiv (f_v)$, garante-se que a recta i pertence ao plano v . Para definir uma recta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direcção. A recta de intersecção entre um plano horizontal (de nível) e um plano de rampa é **necessariamente** uma recta fronto-horizontal (a «família» das rectas fronto-horizontais é a única «família» de rectas comuns aos dois planos), pelo que já temos a direcção da recta i . O ponto P é um ponto que pertence aos dois planos (o plano v contém o ponto P , que define o plano passante), pelo que também já temos um ponto para definir a recta. A recta i está definida por um ponto (P) e por uma direcção (é fronto-horizontal).

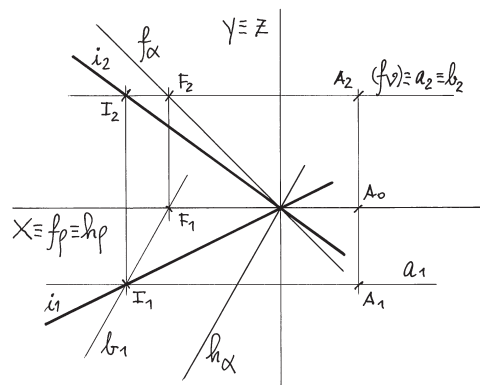


508.

A recta de intersecção entre dois planos (recta i) é uma recta que pertence simultaneamente aos dois planos – todos os seus pontos pertencem aos dois planos. O plano φ é **projectante horizontal**, pelo que as projecções horizontais de todas as suas rectas estão sobre (h_φ) – fazendo $i_1 \equiv (h_\varphi)$, garante-se que a recta i pertence ao plano φ . Para definir uma recta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direcção. A recta de intersecção entre um plano frontal (de frente) e um plano de rampa é **necessariamente** uma recta fronto-horizontal (a «família» das rectas fronto-horizontais é a única «família» de rectas comuns aos dois planos), pelo que já temos a direcção da recta i . Falta-nos um ponto para definir a recta i . Note que já temos a projecção horizontal da recta i , e já se sabe que pertence ao plano φ – trata-se, agora, de determinar as projecções de uma recta pertencente ao plano ρ . Os dados do plano são insuficientes para definir a recta, pelo que é necessário o recurso a uma recta auxiliar do plano ρ . Recorreu-se a uma recta oblíqua do plano ρ – a recta r (que é necessariamente uma recta passante). A recta r está definida por dois pontos – o ponto T , que define o plano, e o seu ponto de concorrência com o eixo X . As rectas i e r são coplanares (pertencem, ambas, ao plano ρ) e não são paralelas, pelo que são concorrentes, pelo que existe um ponto de concorrência – o ponto I . A recta i está, assim, definida um ponto (o ponto I) e por uma direcção (é fronto-horizontal). Note que o ponto I é o ponto em que o plano φ intersecta a recta r (ver exercício 434).



509.

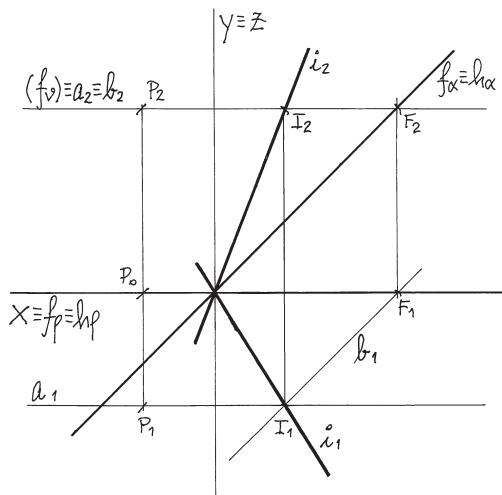


A recta de intersecção entre dois planos (recta i) é uma recta que pertence simultaneamente aos dois planos – todos os seus pontos pertencem aos dois planos. Para definir uma recta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direcção. Todos os pontos do eixo X pertencem ao plano ρ . O ponto de concorrência de f_α e h_α , que se situa no eixo X , pertence ao plano α – esse ponto é, assim, um ponto que pertence simultaneamente aos dois planos, pelo que já é um ponto da recta i . Já temos um ponto para definir a recta. Falta-nos outro ponto ou uma direcção. Ao contrário das situações anteriores, em que já tínhamos uma das projecções da recta i , nesta situação só temos um ponto da recta. Para determinar outro ponto da recta é necessário o recurso a um plano auxiliar (ver relatório do exercício 496). Recorreu-se a um plano horizontal (de nível) v , como plano auxiliar. Note que se escolheu criteriosamente a posição do plano auxiliar – é de toda a conveniência que o plano auxiliar contenha o ponto A , pois, dessa forma, a determinação da recta de intersecção do plano auxiliar com o plano passante

é mais simples. Em seguida determinou-se a recta a , a recta de intersecção do plano v com o plano ρ – a recta a é uma recta fronto-horizontal (ver exercício 507). Em seguida determinou-se a recta b , a recta de intersecção do plano v com o plano α – a recta b é uma recta horizontal (de nível) do plano α (ver exercício 456). As rectas a e b são concorrentes num ponto I – o ponto I é um ponto comum aos três planos, pelo que é um ponto que pertence simultaneamente ao plano α e ao plano ρ . O ponto I é, assim, um ponto da recta de intersecção dos planos α e ρ . Já temos outro ponto para definir a recta i . A recta i está definida por dois pontos – o ponto de concorrência dos traços de α e o ponto I . Note que se poderia ter recorrido a um plano frontal (de frente) como plano auxiliar – o plano teria de conter o ponto A , para uma maior economia de traçados e de raciocínios.

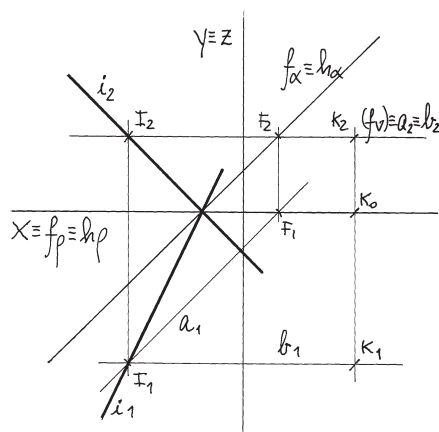
510.

Ver relatório do exercício anterior. Note que se poderia ter recorrido a um plano frontal (de frente) como plano auxiliar – o plano teria de conter o ponto P , para uma maior economia de traçados e de raciocínios.



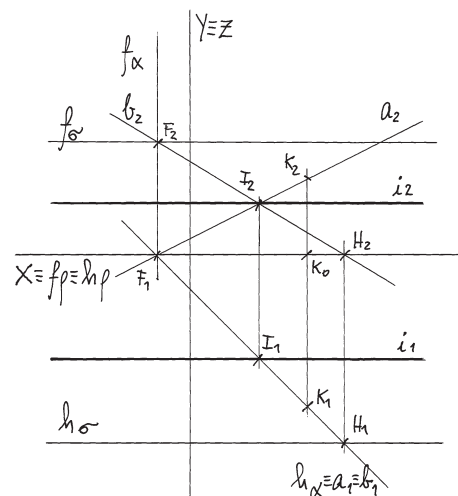
511.

Ver relatório do exercício 509.



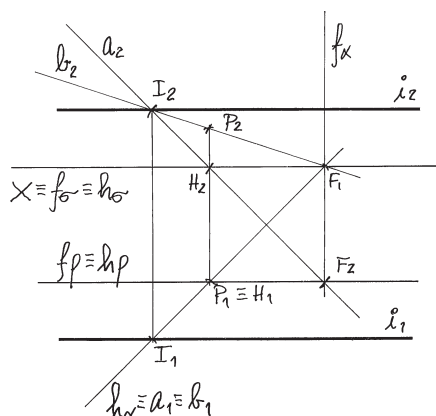
512.

A recta de intersecção entre dois planos tem de pertencer simultaneamente aos dois planos. Para definir uma recta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direcção. A recta de intersecção entre dois planos de rampa é **necessariamente** uma recta fronto-horizontal, pois a «família» das rectas fronto-horizontais é a única «família» de rectas comum a dois planos de rampa (um plano passante é um plano de rampa). Já temos a direcção da recta i – é fronto-horizontal. Falta-nos um ponto para definir a recta. É necessário o recurso a **um plano auxiliar** (ver exercício 496). Recorreu-se a um plano auxiliar α (um **plano vertical**) – note que se escolheu criteriosamente a posição do plano auxiliar, pois é de toda a conveniência que o plano auxiliar contenha o ponto K . Dessa forma, a determinação da recta de intersecção do plano auxiliar com o plano passante é mais simples. Determinou-se a recta de intersecção do plano α , auxiliar, com o plano ρ – recta a (ver exercício 505). Determinou-se a recta de intersecção do plano α , auxiliar, com o plano σ – recta b . As rectas a e b , porque são coplanares (estão, ambas, contidas no plano auxiliar α), ou são paralelas ou são concorrentes. Não são paralelas, pelo que são concorrentes, pelo que existe um ponto de concorrência – ponto I . Já temos um ponto para definir a recta i – a recta i está definida por um ponto (ponto I) e por uma direcção (é fronto-horizontal). Note que todos os pontos da recta a pertencem simultaneamente a α e a ρ . Por outro lado, todos os pontos da recta b pertencem simultaneamente a α e a σ . Assim, o ponto I é um ponto que pertence aos três planos – é a figura geométrica resultante da intersecção dos três planos (α , ρ e σ). Este raciocínio justifica que o ponto I pertence **necessariamente** aos planos ρ e σ , pelo que é um ponto da recta de intersecção dos dois planos.



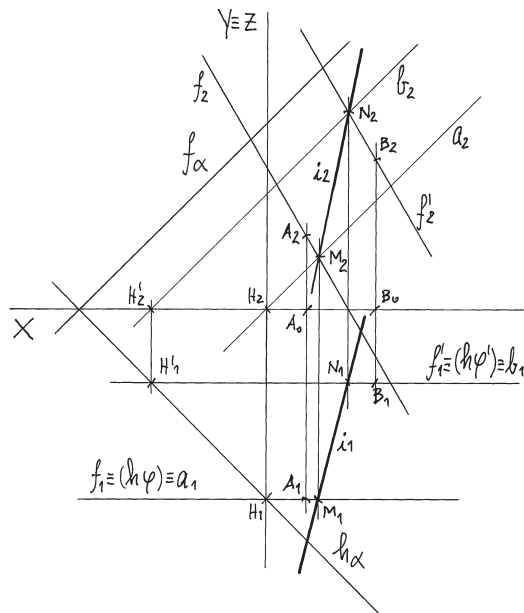
513.

Ver relatório do exercício anterior.

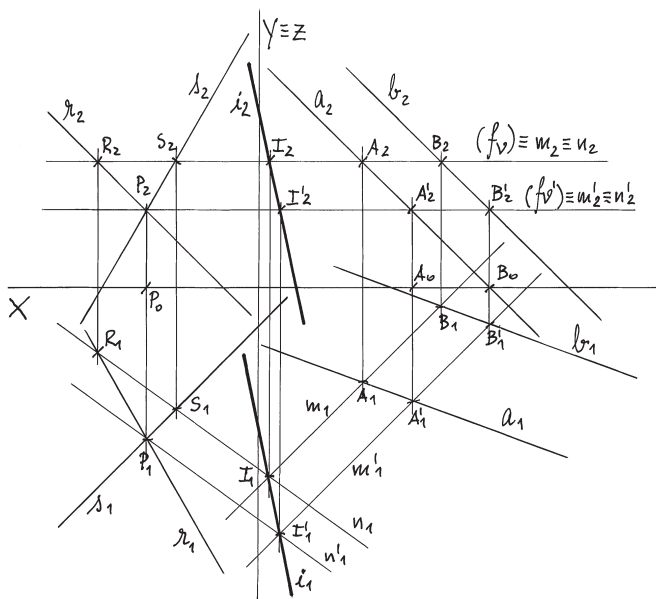


514.

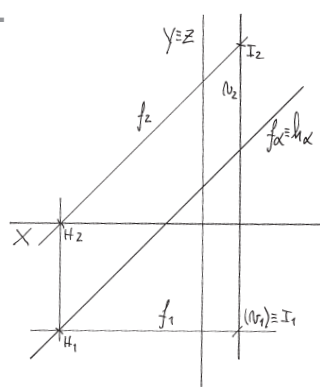
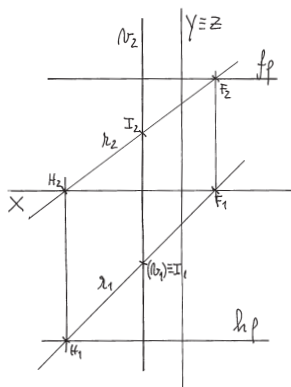
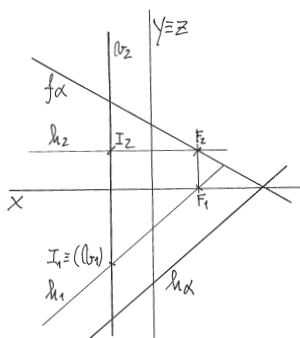
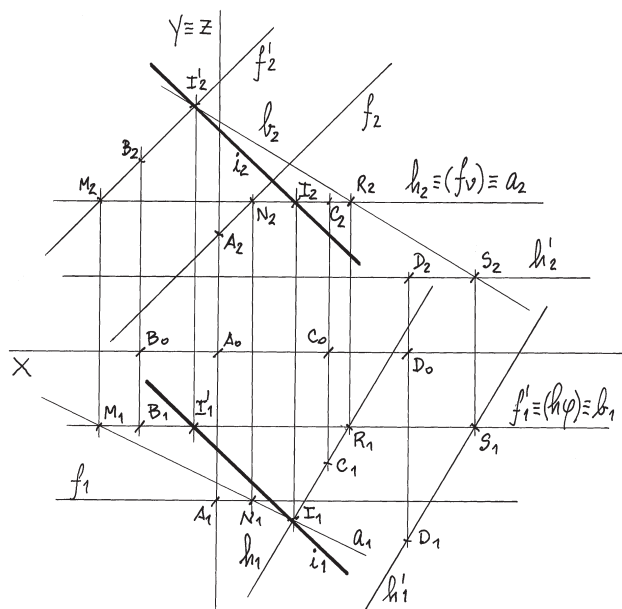
A recta de intersecção entre dois planos (recta i) é uma recta que pertence simultaneamente aos dois planos. Para definir uma recta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direcção. Na situação apresentada, não é possível o recurso ao **caso geral** da intersecção entre planos, pois um dos planos não está definido pelos seus traços. Necessitamos, pois, de processos auxiliares para determinarmos pontos da recta de intersecção dos dois planos. Como se fez referência no relatório do exercício 502, o recurso a **um (1) plano auxiliar** permite-nos determinar **um (1) ponto** da recta de intersecção dos dois planos. Assim, neste caso, será necessário recorrer a **dois (2) planos auxiliares** para que, dessa forma, se possam determinar **dois (2) pontos** da recta de intersecção. Recorreu-se a um plano frontal (de frente), φ , como **primeiro** plano auxiliar e determinaram-se as rectas de intersecção do plano φ com os dois planos dados. O plano φ contém a recta f – a recta f é, assim, de forma imediata, a recta de intersecção do plano φ com o plano θ . Todos os pontos da recta f pertencem simultaneamente a θ e a φ . A recta a é a recta de intersecção do plano φ com o plano α (ver exercício 457). Todos os pontos da recta a pertencem simultaneamente a α e a φ . As rectas a e f são concorrentes no ponto M – M é, assim, o ponto de intersecção dos três planos, pelo que é um ponto comum aos planos α e θ . Já temos **um ponto** para definir a recta i . Falta-nos outro ponto ou uma direcção. Recorreu-se a outro plano frontal (de frente), φ' , como **segundo** plano auxiliar e determinaram-se as rectas de intersecção do plano φ' com os dois planos dados. O plano φ' contém a recta f' – a recta f' é, assim, de forma imediata, a recta de intersecção do plano φ' com o plano θ . Todos os pontos da recta f' pertencem simultaneamente a θ e a φ' . A recta b é a recta de intersecção do plano φ' com o plano α . Todos os pontos da recta b pertencem simultaneamente a α e a φ' . As rectas b e f' são concorrentes no ponto N – N é, assim, o ponto de intersecção dos três planos, pelo que é um ponto comum aos planos α e θ . Já temos **outro ponto** para definir a recta i . A recta i está definida por dois pontos – M e N .



515.

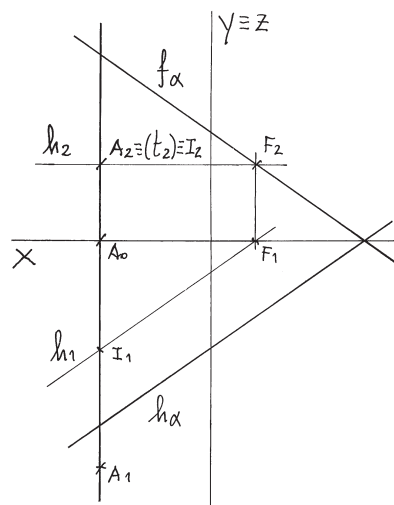
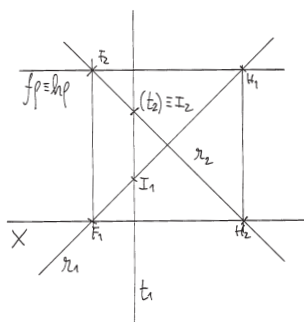


Ver relatório do exercício anterior. O plano v , horizontal (de nível), é o **primeiro** plano auxiliar. A recta m é a recta de intersecção de v com o plano α (m está definida pelos pontos A e B – ver exercício 492) e a recta n é a recta de intersecção de v com o plano γ (n está definida pelos pontos R e S – ver exercício 492). As rectas m e n são concorrentes no ponto I – I é, assim, o ponto de intersecção dos três planos, pelo que é um ponto que pertence simultaneamente aos planos α e γ . I é um ponto da recta i – já temos **um ponto** para definir a recta. Falta-nos outro ponto. O plano v' , horizontal (de nível), é o **segundo** plano auxiliar. A recta m' é a recta de intersecção de v' com o plano α (m' está definida pelos pontos A' e B') e a recta n' é a recta de intersecção de v' com o plano γ (n' está definida por um ponto, o ponto P , e por uma direcção, pois é paralela à recta n , pois são, ambas, rectas horizontais do plano γ). As rectas m' e n' são concorrentes no ponto I' – I' é, assim, o ponto de intersecção dos três planos, pelo que é **outro ponto** que pertence simultaneamente aos planos α e γ . I' é um ponto da recta i – já temos outro ponto para definir a recta. A recta i está definida por dois pontos – I e I' .



520.

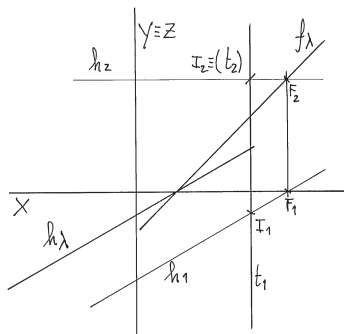
O ponto de intersecção de uma recta com um plano é um ponto que pertence, simultaneamente, à recta e ao plano. O ponto **I** tem, assim, de pertencer à recta **t** e ao plano α . A recta **t** é **projectante frontal**, logo projecta frontalmente todos os seus pontos – **I**₂ está coincidente com a projecção frontal de **t**. Fazendo **I**₂ = (**t**₂) garante-se que o ponto **I** pertence à recta **t**. O ponto **I** tem, agora, de pertencer ao plano α . O plano α **não é projectante**. Assim, para que o ponto **I** pertença ao plano α , tem de pertencer a uma recta do plano (condição para que um ponto pertença a um plano). Recorreu-se a uma recta auxiliar do plano – uma recta horizontal (de nível) **h**, do plano, tal que **h**₂ passa por **I**₂ (a recta auxiliar tem de conter o ponto, cuja projecção frontal já se conhece). Desenharam-se as projecções da recta **h** e determinou-se **I**₁ sobre **h**₁ (o ponto **I** é um ponto da recta **h**). O ponto **I** pertence à recta **t** e ao plano α , pelo que é o ponto de intersecção da recta com o plano.

**521.**

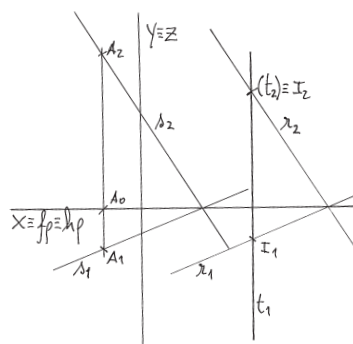
Ver relatório do exercício anterior. A recta auxiliar utilizada foi uma recta oblíqua, **r**, pertencente ao plano.

522.

Ver exercício 520.

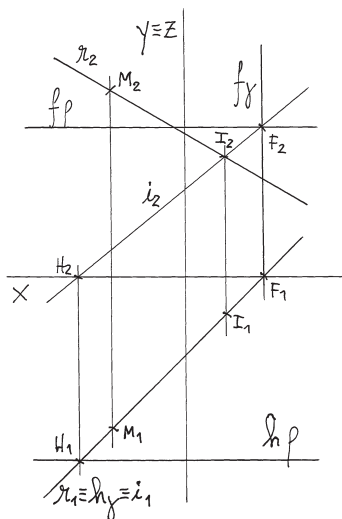
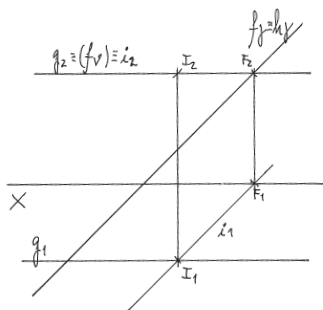
**523.**

Ver exercício 520. Recorreu-se a uma recta **r**, oblíqua, do plano, como recta auxiliar, de forma a que **r**₂ passe por **I**₂. A recta **r** é **necessariamente** uma **recta passante**. Para definir uma recta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direcção. Já temos um ponto para definir a recta **r** – o seu ponto de concorrência com o eixo **X**. Note que o ponto **I** não pode definir a recta **r**, pois ainda não temos o ponto **I** – necessitamos da recta **r** para determinar o ponto **I**. Assim, recorreu-se a uma recta auxiliar do plano para definir a recta **r** – optou-se por recorrer a uma recta **s**, oblíqua (passante), paralela a **r** e passando por **A** (o ponto que define o plano). A recta **s** está definida por dois pontos – o ponto **A** e o seu ponto de concorrência com o eixo **X**. A recta **r** fica definida por um ponto (o seu ponto de concorrência com o eixo **X**) e uma direcção (é paralela à recta **s**). A partir das projecções da recta **r**, obteve-se a projecção horizontal do ponto **I** – **I**₁ situa-se sobre **r**₁. O ponto **I** pertence à recta **t** e pertence ao plano α , pois pertence a uma recta do plano – a recta **r**.



528.

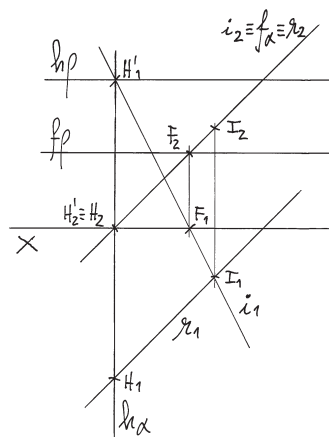
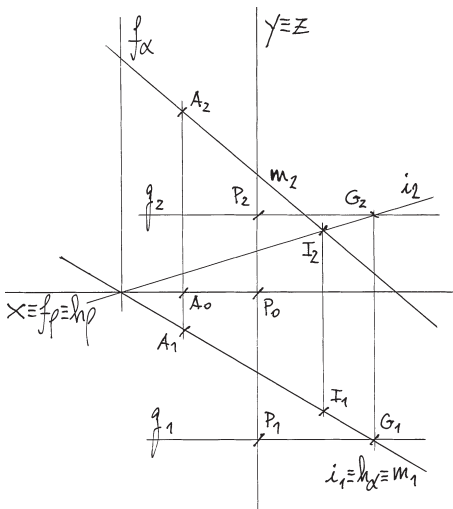
Ver relatório do exercício 524.

**529.**

Ver relatório do exercício 524. O plano auxiliar α que se recorreu foi um plano horizontal (de nível) v , que contém a recta g . A recta de intersecção dos dois planos (recta i) é uma recta horizontal (de nível) do plano γ (ver exercício 456).

530.

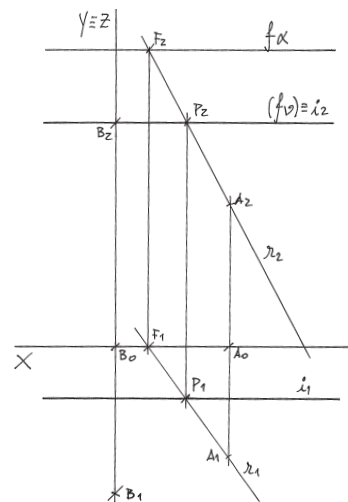
Ver relatório do exercício 524. O plano auxiliar α que se recorreu foi um plano de topo, α .

**531.**

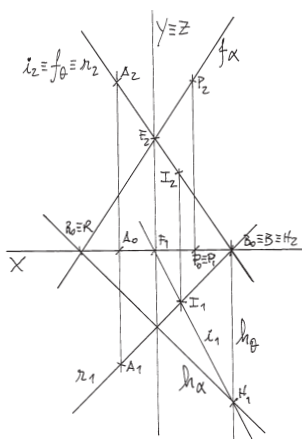
Ver relatório do exercício 524. A recta de intersecção do plano α , vertical (o plano auxiliar) com o plano ρ , passante, determinou-se conforme exposto no relatório do exercício 506. A recta g é a recta auxiliar, fronto-horizantal, do plano ρ , a que se recorreu para determinar a recta i , através do ponto de concorrência das duas rectas (ponto G).

535.

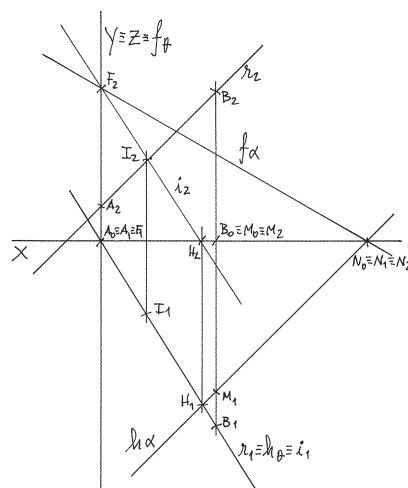
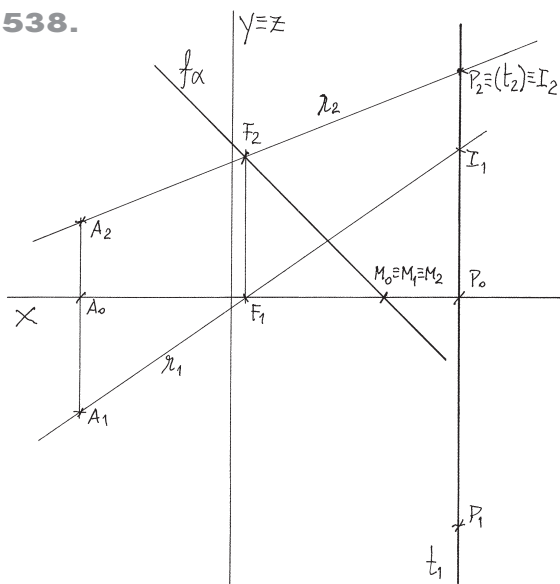
Ver relatório do exercício **459**. Note que não se determinou o traço horizontal do plano ρ , pois tal não se revelou necessário para a resolução do exercício. De facto, como se refere no relatório do exercício **459**, a resolução do exercício passa pelo recurso a uma recta auxiliar do plano ρ , recta essa que, se passar pelo ponto **A**, fica imediatamente definida por dois pontos – o ponto **A** e o seu traço frontal, que tem de se situar sobre f_ρ .

**536.**

Ver relatório do exercício **524**. O plano auxiliar a que se recorreu foi um plano θ , de topo.

**537.**

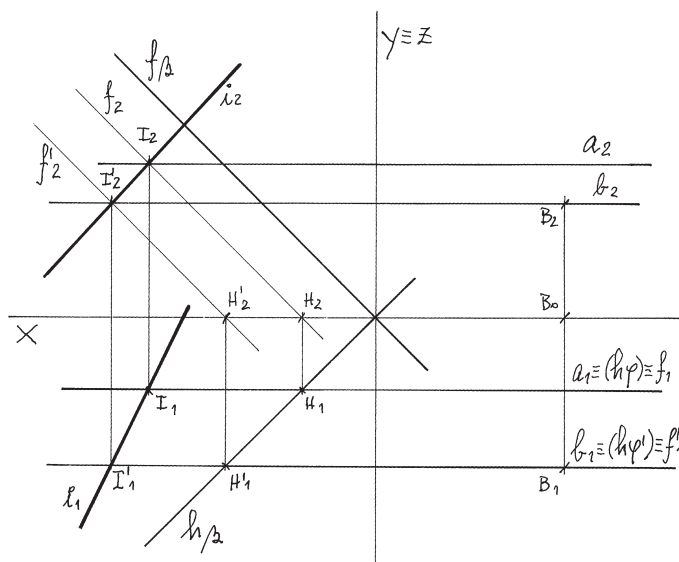
Ver relatório do exercício **524**.

**538.**

Ver relatório do exercício **520**. Note que não se determinou o traço horizontal do plano α , pois tal não se revelou necessário para a resolução do exercício. De facto, como se refere no relatório do exercício **520**, a resolução do exercício passa pelo recurso a uma recta auxiliar do plano α , recta essa que, se passar pelo ponto **A**, fica imediatamente definida por dois pontos – o ponto **A** e o seu traço frontal, que tem de se situar sobre f_α .

539.

Ver relatório do exercício 514. O plano φ , frontal (de frente) que contém a recta a , é o **primeiro** plano auxiliar. A recta a é, assim, de forma imediata, a recta de intersecção do plano φ com o plano p . A recta f é a recta de intersecção do plano φ com o plano β – a recta f é uma recta frontal (de frente) do plano β (ver exercício 457). As rectas a e f são concorrentes no ponto $I - I'$ é, assim, o ponto de intersecção dos três planos, pelo que é um ponto que pertence simultaneamente aos planos p e β . I é um ponto da recta i – já temos **um ponto** para definir a recta. Falta-nos outro ponto. O plano φ' , frontal (de frente), que contém a recta b , é o **segundo** plano auxiliar. A recta b é, assim, de forma imediata, a recta de intersecção do plano φ' com o plano p . A recta f' é a recta de intersecção do plano φ' com o plano β – a recta f' é uma recta frontal (de frente) do plano β (ver exercício 457). As rectas b e f' são concorrentes no ponto $I' - I'$ é, assim, o ponto de intersecção dos três planos, pelo que é **outro ponto** que pertence simultaneamente aos planos p e β . I' é um ponto da recta i – já temos outro ponto para definir a recta. A recta i está definida por dois pontos – I e I' .

**8****REPRESENTAÇÃO DE SÓLIDOS I****540.**

Por **contorno aparente frontal** entende-se a linha que limita exteriormente a projecção frontal do sólido e que é a **projecção frontal** da linha que separa, no espaço, a parte do sólido que é visível em projecção frontal da que é invisível.

541.

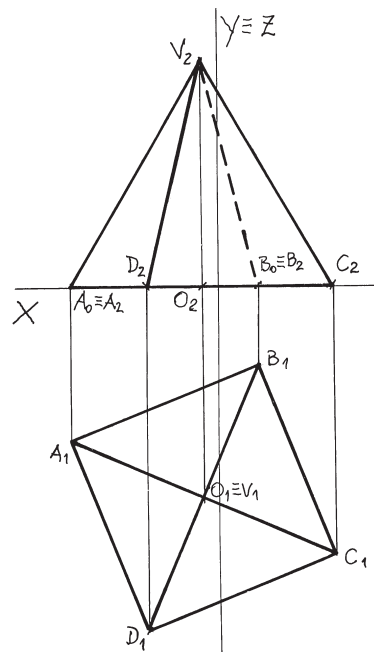
Por **contorno aparente horizontal** entende-se a linha que limita exteriormente a projecção horizontal do sólido e que é a **projecção horizontal** da linha que separa, no espaço, a parte do sólido que é visível em projecção horizontal da que é invisível.

542.

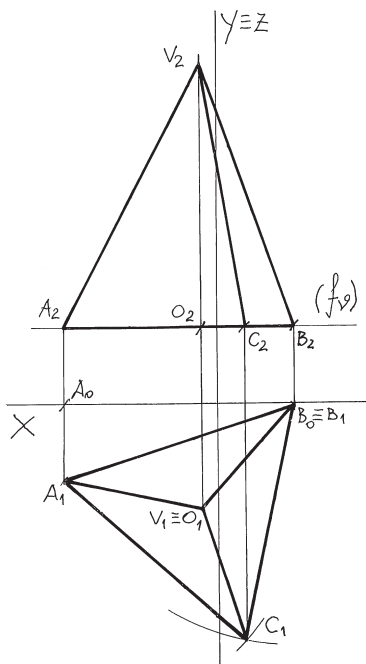
Em **projecção horizontal**, analisa-se a visibilidade ou invisibilidade dos vértices que não integram o contorno aparente horizontal em função das respectivas cotas. Assim, **os vértices de maior cota são visíveis**, enquanto que **os de menor cota são invisíveis**.

543.

Representaram-se os pontos **A** e **B** pelas suas projecções. Em seguida construiu-se o quadrado da base em verdadeira grandeza, em projecção horizontal (garantindo que o quadrado se situa no 1^a Diedro), e determinaram-se as projecções de **O**, o seu centro. A pirâmide é **regular**, pelo que o seu eixo é ortogonal ao plano da base – está contido numa recta vertical (projectante horizontal). A altura da pirâmide é a distância do seu vértice ao plano da base, medida perpendicularmente a este. Como o eixo é ortogonal ao plano da base, a altura da pirâmide pode medir-se sobre a recta suporte do eixo. A altura da pirâmide é **OV** e projecta-se em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projecção, pois o segmento **OV** é paralelo ao Plano Frontal de Projecção. **V** tem, assim, 6 cm de cota (a base tem cota nula). A partir das projecções de **todos** os vértices do sólido desenharam-se os seus contornos aparentes – o **contorno aparente horizontal** é $[A_1B_1C_1D_1]$ e o **contorno aparente frontal** é $[A_2V_2C_2D_2]$. Em **projecção horizontal**, o único vértice que não integra o contorno aparente é **V**, que é visível (por ser o vértice de maior cota), bem como todas as arestas que nele convergem. Desenhou-se a **projecção horizontal** da pirâmide, na qual não há invisibilidades a registar. Note que, em projecção horizontal, a base é invisível e as faces laterais são todas visíveis. Em **projecção frontal**, o único vértice que não integra o contorno aparente é **B**, que é invisível (é o vértice de menor afastamento), bem como todas as arestas que nele convergem. As arestas **[AB]** e **[BC]**, da base, são invisíveis, mas estão ocultas pelas arestas **[AD]** e **[DC]**. A aresta lateral **[BV]** é invisível. A aresta lateral **[DV]** é visível, pois **D** é o vértice de maior afastamento. Note que, em projecção frontal, a base é invisível (é projectante frontal), bem como as faces laterais **[ABV]** e **[BCV]**. As faces laterais **[ADV]** e **[DCV]** são visíveis.



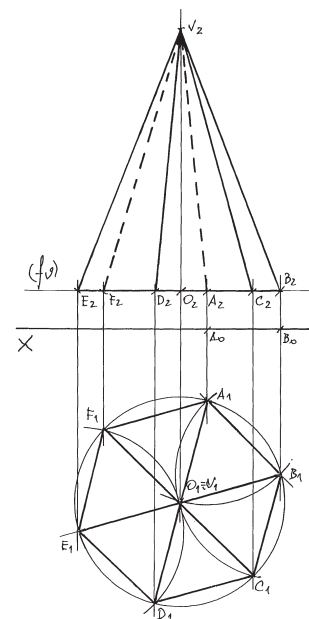
544.



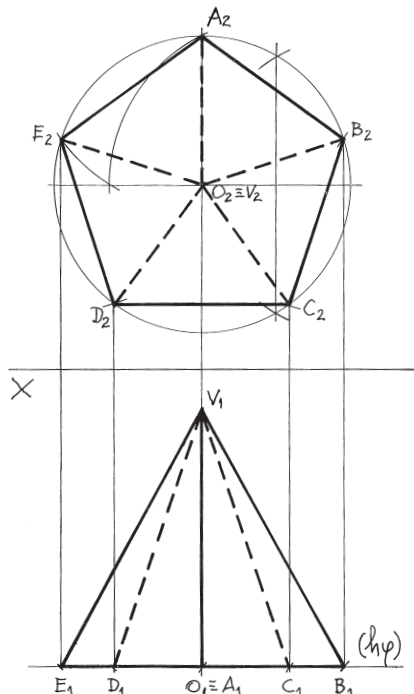
Ver relatório do exercício anterior. A altura da pirâmide é a distância do seu vértice ao plano da base, medida perpendicularmente a este. **V** está, assim, 7 cm acima do plano ν (o plano horizontal que contém a base), pelo que tem 9 cm de cota – note que se **V** estivesse abaixo de **O**, a pirâmide não estaria no 1^a Diedro. O **contorno aparente horizontal** é $[A_1B_1C_1]$ e o **contorno aparente frontal** é $[A_2V_2B_2C_2]$. Em **projecção horizontal**, o único vértice que não integra o contorno aparente é **V**, que é visível (por ser o vértice de maior cota), bem como todas as arestas que nele convergem. Desenhou-se a **projecção horizontal** da pirâmide, na qual não há invisibilidades a registar. Em **projecção frontal**, todos os vértices do sólido integram o contorno aparente. No entanto, existem duas arestas que não integram o contorno aparente – a aresta lateral **[CV]**, que é visível (**C** é o vértice de maior afastamento do sólido) e a aresta **[AB]**, da base, que está oculta pelas arestas **[AC]** e **[BC]** da base, pelo que também não há quaisquer invisibilidades a registar.

545.

Ver relatório do exercício 543. Construiu-se o hexágono em V.G., em projecção horizontal. A pirâmide é regular, pelo que o seu eixo é ortogonal ao plano da base – é vertical. A altura da pirâmide é 7 e o plano da base tem 1 cm de cota, pelo que o vértice da pirâmide tem 8 cm de cota. O **contorno aparente frontal** é $[B_2V_2E_2D_2C_2]$. Os vértices que não integram o contorno aparente frontal são **A** e **F**, que são invisíveis, por serem os vértices de menor afastamento. Assim, em **projecção frontal** as arestas laterais $[AV]$ e $[FV]$ são invisíveis, bem como as arestas $[AB]$, $[AF]$ e $[EF]$, da base (estas, no entanto, estão ocultas pelas arestas da base que são visíveis). As arestas laterais $[CV]$ e $[DV]$ são visíveis, pois os vértices **C** e **D** são os vértices de maior afastamento. Note que, em projecção frontal, a base é invisível (é projectante frontal) bem como as faces laterais $[ABV]$, $[AFV]$ e $[EFV]$. As faces laterais $[BCV]$, $[CDV]$ e $[DEV]$ são visíveis em projecção frontal. O **contorno aparente horizontal** é $[A_1B_1C_1D_1E_1F_1]$. Em **projecção horizontal**, o único vértice que não integra o contorno aparente é **V**, que é visível (é o vértice de maior cota), bem como todas as arestas que nele convergem. Note que, em projecção horizontal, a base é invisível e as faces laterais são todas visíveis.



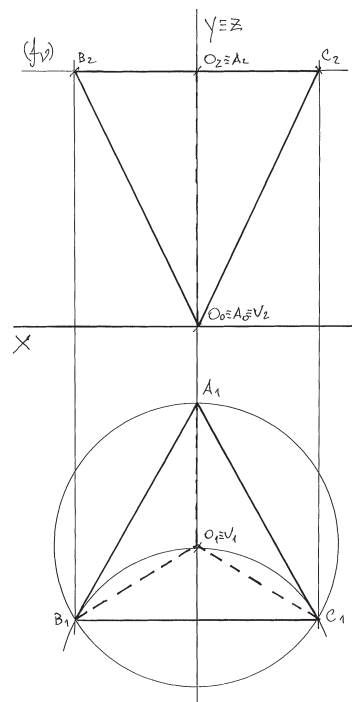
546.



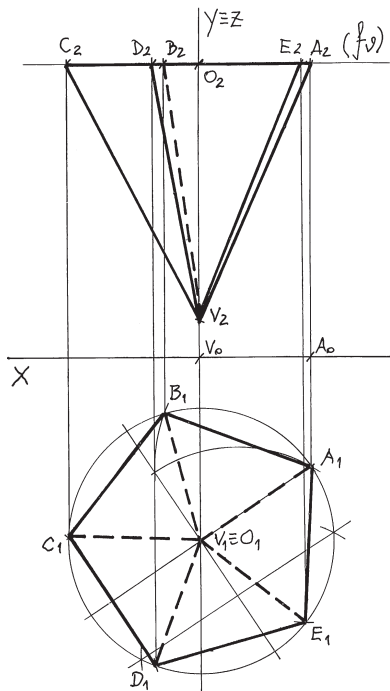
Desenharam-se as projecções do pentágono da base, de acordo com os dados (o lado inferior é fronto-horizontal) e atribuíram-se arbitrariamente letras aos vértices do polígono (o enunciado é omissivo). A pirâmide é **regular**, pelo que o seu eixo é ortogonal ao plano da base – está contido numa recta de topo (projectante frontal). A altura da pirâmide é a distância do seu vértice ao plano da base, medida perpendicularmente a este. Como o eixo é ortogonal ao plano da base, a altura da pirâmide pode medir-se sobre a recta suporte do eixo. A altura da pirâmide é **OV** e projecta-se em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projecção, pois o segmento $[OV]$ é paralelo ao Plano Horizontal de Projecção. A altura da pirâmide é 7 cm e o plano da base tem 8 cm de afastamento – atendendo a que o vértice da pirâmide é invisível em projecção frontal, o afastamento de **V** tem de ser inferior ao do plano da base, pelo que **V** tem 1 cm de afastamento ($8 - 7 = 1$). A partir das projecções de **todos** os vértices do sólido desenharam-se os seus contornos aparentes – o **contorno aparente horizontal** é $[B_1V_1E_1A_1]$ e o **contorno aparente frontal** é $[A_2B_2C_2D_2E_2]$. Em **projecção frontal**, o único vértice que não integra o contorno aparente é **V**, que é invisível (por ser o vértice de menor afastamento), bem como todas as arestas que nele convergem. Note que, em projecção frontal, a base é visível e as faces laterais são todas invisíveis. Desenhou-se a **projecção frontal** da pirâmide, observando-se que todas as arestas laterais são invisíveis. Em **projecção frontal**, os vértices que não integram o contorno aparente são **C** e **D**, que são invisíveis (bem como todas as arestas que neles convergem), por serem os vértices de menor cota. Assim, em **projecção horizontal** as arestas laterais $[CV]$ e $[DV]$ são invisíveis, bem como as arestas $[BC]$, $[CD]$ e $[DE]$, da base (estas, no entanto, estão ocultas pelas arestas da base que são visíveis – as arestas $[AB]$ e $[AE]$). A aresta lateral $[AV]$ é visível, pois **A** é o vértice de maior cota. Em projecção horizontal, a base é invisível (é projectante horizontal), bem como as faces laterais $[BCV]$, $[CDV]$ e $[DEV]$. As faces laterais $[ABV]$ e $[AEV]$ são visíveis em projecção horizontal.

547.

O ponto **A** tem a mesma cota de **O**, pois **O** é o centro da base e **A** é um ponto da base, que está contida num plano horizontal (de nível). O raio da circunferência circunscrita à base é \overline{OA} . Construiu-se o triângulo em V.G., em projecção horizontal, e determinou-se a posição do vértice da pirâmide – o eixo da pirâmide é ortogonal ao plano da base (é vertical) e **V** tem cota nula. A partir das projecções de **todos** os vértices do sólido desenharam-se os seus contornos aparentes – o **contorno aparente horizontal** é $[A_1B_1C_1]$ e o **contorno aparente frontal** é $[B_2V_2C_2]$. Em **projecção horizontal**, o único vértice que não integra o contorno aparente é **V**, que é invisível (por ser o vértice de menor cota), bem como todas as arestas que nele convergem. Desenhou-se a **projecção horizontal** da pirâmide, observando-se que todas as arestas laterais são invisíveis. Note que, em projecção horizontal, apenas a base é visível, pois todas as faces laterais são invisíveis. Em **projecção frontal**, o único vértice que não integra o contorno aparente é **A**, que é invisível (bem como todas as arestas que nele convergem), por ser o vértice de menor afastamento. Assim, em **projecção frontal** a aresta lateral $[AV]$ é invisível, bem como as arestas $[AB]$ e $[AC]$, da base (estas, no entanto, estão ocultas pela aresta da base que é visível – a aresta $[BC]$). Em projecção frontal, a base é invisível (é projectante frontal), bem como as faces laterais $[ABV]$ e $[ACV]$. A face lateral $[BCV]$ é visível em projecção frontal.



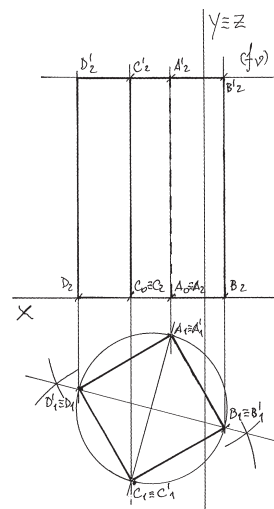
548.



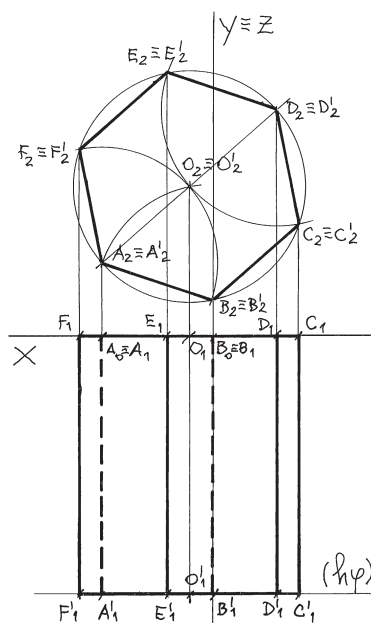
Desenharam-se as projecções do segmento $[AV]$, em função dos dados. A base está contida num plano horizontal (de nível) e **A** é um ponto da base, pelo que de seguida se representou o plano ν , da base, passando por **A**. O centro da circunferência circunscrita à base, o ponto **O**, pertence ao plano ν e situa-se na mesma projectante horizontal de **V** (a pirâmide é regular, pelo que o seu eixo, que tem extremos em **V** e **O**, está contido numa recta vertical), o que nos permitiu determinar imediatamente as projecções de **O**. Construiu-se o pentágono em V.G., em projecção horizontal – o raio da circunferência circunscrita ao pentágono é \overline{OA} . A partir das projecções de **todos** os vértices do sólido desenharam-se os seus contornos aparentes – o **contorno aparente horizontal** é $[A_1B_1C_1D_1E_1]$ e o **contorno aparente frontal** é $[A_2V_2C_2D_2E_2]$. Em **projecção horizontal**, o único vértice que não integra o contorno aparente é **V**, que é invisível (por ser o vértice de menor cota), bem como todas as arestas que nele convergem. Desenhou-se a **projecção horizontal** da pirâmide, observando-se que todas as arestas laterais são invisíveis – a base é visível e as faces laterais são todas invisíveis. Em **projecção frontal**, o único vértice que não integra o contorno aparente é **B**, que é invisível (bem como todas as arestas que nele convergem), por ser o vértice de menor afastamento. Assim, em **projecção frontal** a aresta lateral $[BV]$ é invisível, bem como as arestas $[AB]$ e $[BC]$, da base (estas, no entanto, estão ocultas pelas arestas da base que são visíveis – as arestas $[CD]$, $[DE]$ e $[EA]$). As arestas laterais $[DV]$ e $[EV]$ são visíveis, pois os vértices **D** e **E** são os vértices de maior afastamento. Em projecção frontal, a base é invisível (é projectante frontal), bem como as faces laterais $[ABV]$ e $[BCV]$. As restantes faces laterais são visíveis (em projecção frontal).

549.

Construiu-se o quadrado $[ABCD]$ em V.G., em projecção horizontal, no Plano Horizontal de Projecção. O prisma é **regular**, pelo que as suas arestas laterais são ortogonais ao Plano Horizontal de Projecção – são verticais (projectantes horizontais). A base superior está contida num plano horizontal (de nível) v . A altura de um prisma é a distância entre os planos das bases, medida perpendicularmente a estes – a altura do prisma é 6 cm, pelo que v , o plano da base superior do prisma, tem 6 cm de cota (a base inferior tem cota nula). O quadrado $[A'B'C'D']$ é a base superior. A partir das projecções de **todos** os vértices do sólido desenharam-se os seus contornos aparentes – o **contorno aparente horizontal** é $[A'_1B'_1C'_1D'_1]$ (corresponde à projecção horizontal da base superior) e o **contorno aparente frontal** é $[B_2B'_2C'_2D'_2D_2C_2]$. A **projecção horizontal** do prisma corresponde à projecção horizontal da sua base superior – as arestas laterais são verticais (projectam-se segundo um ponto, cada uma) e as arestas da base inferior estão ocultas pelas arestas correspondentes da base superior, pelo que não há lugar à representação de invisibilidades. Note que, em projecção horizontal, a base superior é visível e a base inferior é invisível. As faces laterais são igualmente invisíveis, pois são projectantes horizontais. Em **projecção frontal**, os vértices que não integram o contorno aparente são A e A' , que são invisíveis (bem como todas as arestas que neles convergem), por serem os vértices de menor afastamento. Assim, em **projecção frontal** a aresta lateral $[AA']$ é invisível. São igualmente invisíveis as arestas $[AB]$ e $[AD]$ da base inferior (estas, no entanto, estão ocultas pelas arestas da base que são visíveis – as arestas $[BC]$ e $[CD]$) e as arestas $[A'B']$ e $[A'D']$ da base superior (estas, no entanto, estão ocultas pelas arestas da base que são visíveis – as arestas $[B'C']$ e $[C'D']$). Em projecção frontal, as bases são invisíveis, pois são projectantes frontais. Em projecção frontal, as faces laterais $[BB'C'C]$ e $[CC'D'D]$ são visíveis e as faces laterais $[AA'B'B]$ e $[AA'D'D]$ são invisíveis.



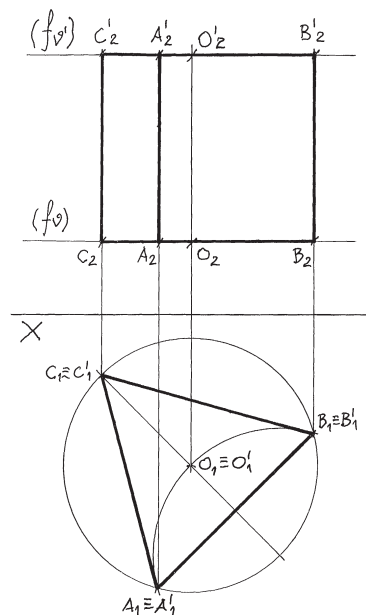
550.



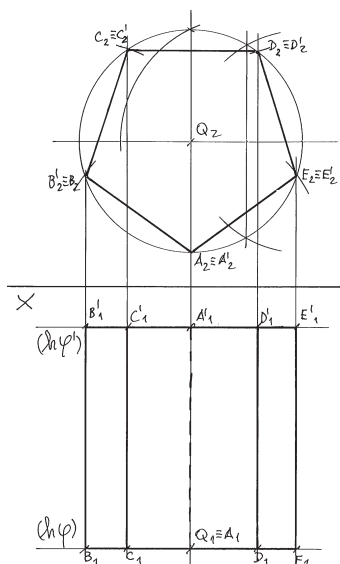
Construiu-se o hexágono $[ABCDEF]$ em V.G., em projecção frontal, no Plano Frontal de Projecção. O prisma é **regular**, pelo que as suas arestas laterais são ortogonais ao Plano Frontal de Projecção – são de topo (projectantes frontais). A base de maior afastamento está contida num plano frontal (de frente) φ . A altura do prisma é a distância entre os planos das bases, medida perpendicularmente a estes – o plano φ , o plano da base de maior afastamento do prisma, tem 7 cm de afastamento (a base de menor afastamento tem afastamento nulo). O hexágono $[A'B'C'D'E'F']$ é a base de maior afastamento do sólido. A partir das projecções de **todos** os vértices do sólido desenharam-se os seus contornos aparentes – o **contorno aparente frontal** é $[A'_2B'_2C'_2D'_2E'_2F'_2]$ (corresponde à projecção frontal da base de maior afastamento) e o **contorno aparente horizontal** é $[C_2C'_2D'_2E'_2F'_2F_2E_2D_2]$. A **projecção frontal** do prisma corresponde à projecção frontal da sua base de maior afastamento – as arestas laterais são de topo (projectam-se segundo um ponto, cada uma) e as arestas da base de menor afastamento estão ocultas pelas arestas correspondentes da base de maior afastamento, pelo que não há lugar à representação de invisibilidades. Note que, em projecção frontal, a base de maior afastamento é visível e a base de menor afastamento é invisível. As faces laterais são igualmente invisíveis, pois são projectantes frontais. Em **projecção horizontal**, os vértices que não integram o contorno aparente são A , A' , B e B' , que são invisíveis (bem como todas as arestas que neles convergem), por serem os vértices de menor cota. Assim, em **projecção horizontal** as arestas laterais $[AA']$ e $[BB']$ são invisíveis. São igualmente invisíveis as arestas $[BC]$, $[AB]$ e $[AF]$ da base de menor afastamento (estas, no entanto, estão ocultas pelas arestas da base que são visíveis – as arestas $[CD]$, $[DE]$ e $[EF]$) e as arestas $[B'C']$, $[A'B']$ e $[A'F']$ da base de maior afastamento (estas, no entanto, estão ocultas pelas arestas da base que são visíveis – as arestas $[C'D']$, $[D'E']$ e $[E'F']$). Em projecção horizontal, as faces laterais $[CC'D'D]$, $[DD'E'E]$ e $[EE'F'F]$ são visíveis e as faces laterais $[AA'B'B]$, $[BB'C'C]$ e $[AA'F'F]$ são invisíveis.

551.

Construiu-se o triângulo $[ABC]$ em V.G., em projecção horizontal. Note que para que o lado $[AB]$ faça um ângulo de 45° (a.e.) com o Plano Frontal de Projecção, é necessário que o **diâmetro inicial** (que originou a construção da figura) faça um ângulo de 45° (a.d.) com o Plano Frontal de Projecção. Das duas hipóteses que existem, escolheu-se aquela que garante que A seja o vértice de maior afastamento. A distância entre os planos das duas bases (a altura do prisma) é 5 cm, pelo que o plano horizontal (de nível) da base superior tem 7 cm de cota ($2+5=7$) – ver exercício 549. O triângulo $[A'B'C']$ é a base superior. O **contorno aparente horizontal** é $[A'_1B'_1C'_1]$ (corresponde à projecção horizontal da base superior) e o **contorno aparente frontal** é $[B_2B'_2A'_2C'_2A_2]$. A **projecção horizontal** do prisma corresponde à projecção horizontal da sua base superior (ver exercício 549) – não há lugar à representação de invisibilidades. Em **projecção frontal**, os vértices que não integram o contorno aparente são A e A' , que são visíveis (bem como todas as arestas que neles convergem), por serem os vértices de maior afastamento. Assim, em **projecção frontal** a aresta lateral $[AA']$ é visível. São invisíveis a aresta $[BC]$ da base inferior (que, no entanto, está oculta pelas arestas da base que são visíveis – as arestas $[AB]$ e $[AC]$) e a aresta $[B'C']$ da base superior (que, por sua vez, está oculta pelas arestas da base que são visíveis – as arestas $[A'B']$ e $[A'C']$).



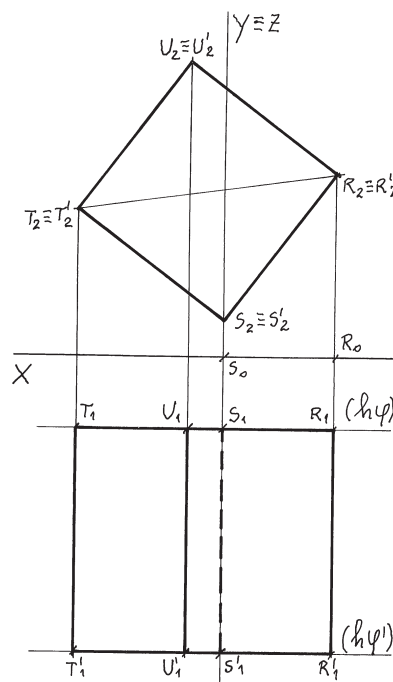
552.



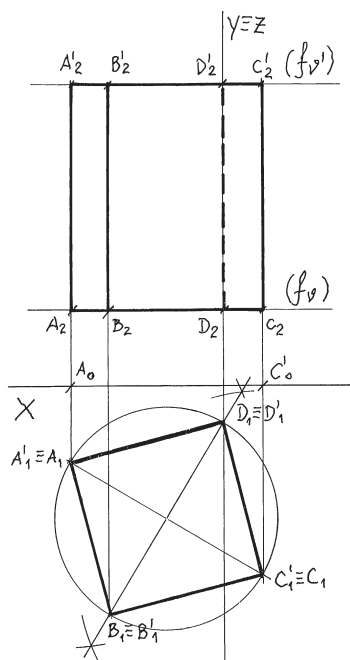
Ver exercício 550. Construiu-se o pentágono em V.G., em projecção frontal, de acordo com os dados. Nomearam-se os seus vértices arbitrariamente, pois o enunciado é omissivo. O prisma tem 6 cm de altura e o pentágono dado é a base de maior afastamento, pelo que o pentágono da base de menor afastamento está contido num plano frontal (de frente) com 1 cm de afastamento ($7-6=1$). O pentágono $[A'B'C'D'E']$ é a base de menor afastamento do sólido. A partir das projecções de **todos** os vértices do sólido desenharam-se os seus contornos aparentes – o **contorno aparente frontal** é $[A_2B_2C_2D_2E_2]$ (corresponde à projecção frontal da base de maior afastamento) e o **contorno aparente horizontal** é $[B_2B'_2C'_2D'_2E'_2D_2C_2]$. A **projecção frontal** do prisma corresponde à projecção frontal da sua base de maior afastamento – não há lugar à representação de invisibilidades. Em **projecção horizontal**, os vértices que não integram o contorno aparente são A e A' , que são invisíveis (bem como todas as arestas que neles convergem), por serem os vértices de menor cota. Assim, em **projecção horizontal** a aresta lateral $[AA']$ é invisível. São igualmente invisíveis as arestas $[AB]$ e $[AE]$ da base de maior afastamento (estas, no entanto, estão ocultas pelas arestas da base que são visíveis – as arestas $[BC]$, $[CD]$ e $[DE]$) e as arestas $[A'B']$ e $[A'E']$ da base de menor afastamento (estas, no entanto, estão ocultas pelas arestas da base que são visíveis – as arestas $[B'C']$, $[C'D']$ e $[D'E']$). Em projecção horizontal, as faces laterais $[BB'C'C]$, $[CC'D'D]$ e $[DD'E'E]$ são visíveis e as faces laterais $[AA'B'B]$ e $[AA'E'E]$ são invisíveis.

553.

Ver relatório do exercício anterior. Para que o prisma se situe no espaço do 1^o Diedro, o quadrado $[RSTU]$ tem de ser a base de menor afastamento – a base de maior afastamento é o quadrado $[R'S'T'U']$, que está contido num plano frontal (de frente) com 8 cm de afastamento. O **contorno aparente frontal** é $[R'_2S'_2T'_2U'_2]$ (corresponde à projecção frontal da base de maior afastamento) e o **contorno aparente horizontal** é $[R_2R'_2U'_2T'_2T_2U_2]$. A **projecção frontal** do prisma corresponde à projecção frontal da sua base de maior afastamento – não há lugar à representação de invisibilidades. Em **projecção horizontal**, os vértices que não integram o contorno aparente são S e S' , que são invisíveis (bem como todas as arestas que neles convergem), por serem os vértices de menor cota. Assim, em **projecção horizontal** a aresta lateral $[SS']$ é invisível. São igualmente invisíveis as arestas $[RS]$ e $[ST]$ da base de menor afastamento (que, no entanto, estão ocultas pelas arestas da base que são visíveis – as arestas $[RU]$ e $[TU]$) e as arestas $[R'S']$ e $[S'T']$ da base de maior afastamento (que, por sua vez, estão ocultas pelas arestas da base que são visíveis – as arestas $[R'U']$ e $[T'U']$).



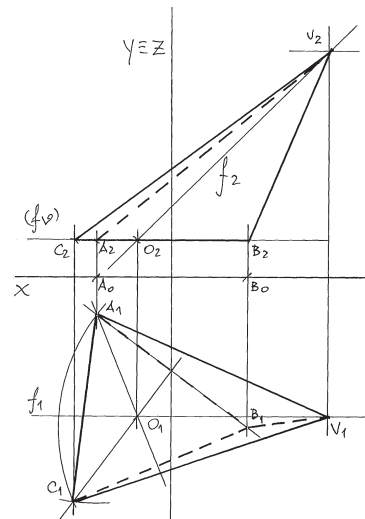
554.



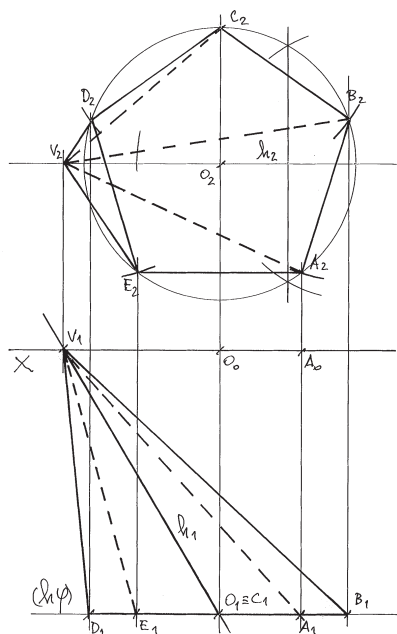
Desenharam-se as projecções dos pontos A e C' , em função das suas coordenadas, e representaram-se os planos horizontais (de nível) que contêm as duas bases – v e v' . O prisma é regular, pelo que as arestas laterais estão contidas em rectas verticais (projectantes horizontais) – este raciocínio permite-nos determinar imediatamente o vértice C , da base inferior do sólido, que pertence ao plano v e se situa na mesma projectante horizontal de C' . A partir de A e C , dois vértices opostos da base inferior do sólido, construiu-se o quadrado da base inferior (o quadrado $[ABCD]$) em V.G., em projecção horizontal. Sobre a construção das projecções do sólido, ver exercício 551. O **contorno aparente horizontal** é $[A'_1B'_1C'_1D'_1]$ (corresponde à projecção horizontal da base superior) e o **contorno aparente frontal** é $[A_2A'_2B'_2C'_2C_2B_2]$. A **projecção horizontal** do prisma corresponde à projecção horizontal da sua base superior – não há lugar à representação de invisibilidades. Em **projecção frontal**, os vértices que não integram o contorno aparente são D e D' , que são invisíveis (bem como todas as arestas que neles convergem), por serem os vértices de menor afastamento. Assim, em **projecção frontal** a aresta lateral $[DD']$ é invisível. São igualmente invisíveis as arestas $[AD]$ e $[CD]$ da base inferior (que, no entanto, estão ocultas pelas arestas da base que são visíveis – as arestas $[AB]$ e $[BC]$) e as arestas $[A'D']$ e $[C'D']$ da base superior (que, por sua vez, estão ocultas pelas arestas da base que são visíveis – as arestas $[A'B']$ e $[B'C']$).

555.

Construiu-se o triângulo em V.G., em projecção horizontal. Determinou-se o seu centro (ponto O) e desenharam-se as projecções da recta f , a recta suporte do eixo da pirâmide. A pirâmide tem 6 cm de altura, pelo que o seu vértice tem 7 cm de cota (a base tem 1 cm de cota e a altura da pirâmide é a distância do vértice ao plano da base, medida perpendicularmente a este). Determinaram-se as projecções de V . A partir das projecções de **todos** os vértices do sólido desenharam-se os seus contornos aparentes – o **contorno aparente horizontal** é $[A_1V_1C_1]$ e o **contorno aparente frontal** é $[B_2V_2C_2]$. Em **projecção horizontal**, o único vértice que não integra o contorno aparente é B , que é invisível (por ser um dos vértices de menor cota), bem como todas as arestas que nele convergem. Desenhou-se a **projecção horizontal** da pirâmide, observando-se que todas as arestas que convergem em B (as arestas $[AB]$ e $[BC]$, da base, e a aresta lateral $[BV]$) são invisíveis. Note que, em projecção horizontal, a base é invisível, bem como as faces laterais $[ABV]$ e $[BCV]$. A face lateral $[ACV]$ é a única face visível em projecção horizontal. Em **projecção frontal**, o único vértice que não integra o contorno aparente é A , que é invisível (bem como todas as arestas que nele convergem), por ser o vértice de menor afastamento. Assim, em **projecção frontal** a aresta lateral $[AV]$ é invisível, bem como as arestas $[AB]$ e $[AC]$, da base (estas, no entanto, estão ocultas pela aresta da base que é visível – a aresta $[BC]$). Em projecção frontal, a base é invisível bem como as faces laterais $[ACV]$ e $[ABV]$. A face lateral $[BCV]$ é a única face visível em projecção frontal.



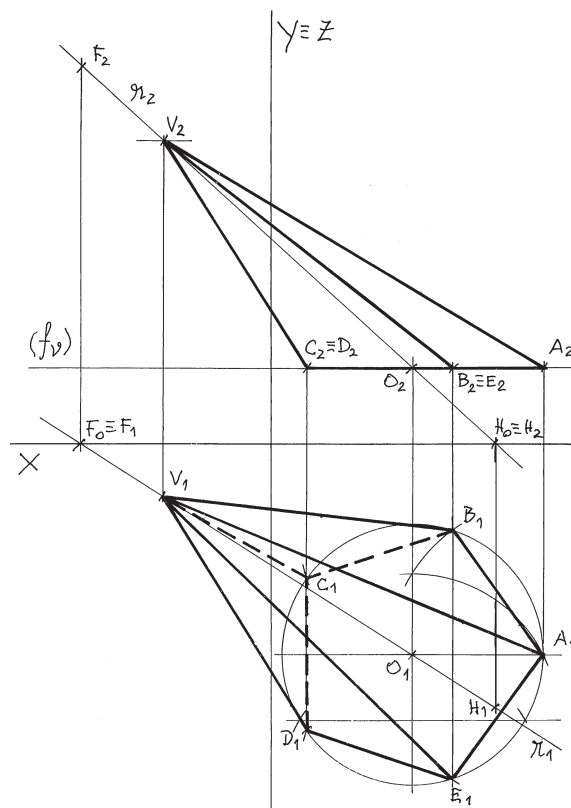
556.



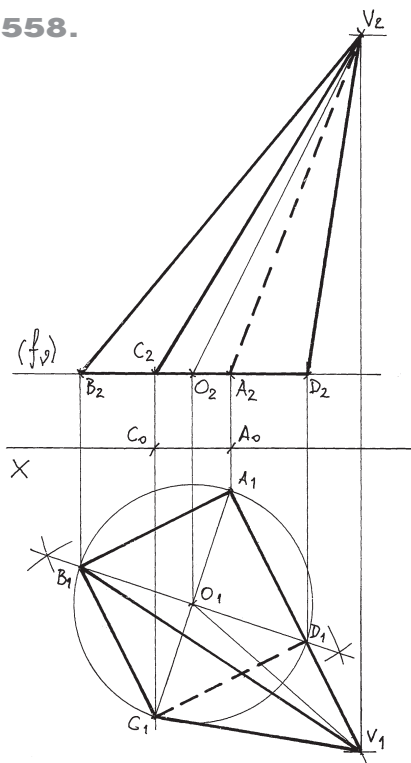
Construiu-se o pentágono da base em V.G., em projecção frontal, em função dos dados, e desenharam-se as projecções da recta h , a recta suporte do eixo do sólido. O vértice da pirâmide pertence ao Plano Frontal de Projecção, pelo que é o traço frontal de h (tem afastamento nulo). A partir das projecções de **todos** os vértices do sólido desenharam-se os seus contornos aparentes – o **contorno aparente horizontal** é $[B_1V_1D_1C_1]$ e o **contorno aparente frontal** é $[A_2B_2C_2D_2V_2E_2]$. Em **projecção horizontal**, os vértices que não integram o contorno aparente são A e F , que são invisíveis (por serem os vértices de menor cota), bem como todas as arestas que neles convergem. Em projecção horizontal, as arestas laterais $[AV]$ e $[FV]$ são invisíveis, bem como as arestas $[AB]$, $[AE]$ e $[DE]$ da base (estas, no entanto, estão ocultas pelas arestas $[BC]$ e $[CD]$, da base). Note que, em projecção horizontal, as faces visíveis são as faces laterais $[BCV]$ e $[CDV]$ (as restantes faces laterais e a base são invisíveis). Em **projecção frontal**, todos os vértices do sólido integram o contorno aparente. Observa-se, no entanto, que a base é visível (contém todos os vértices de maior afastamento), bem como a face lateral $[DEV]$. As restantes faces laterais são invisíveis, pelo que as arestas laterais $[AV]$, $[BV]$ e $[CV]$ são invisíveis, em projecção frontal.

557.

Desenharam-se as projecções da recta r e representou-se o plano v , o plano horizontal (de nível) que contém a base da pirâmide. A recta r contém o eixo da pirâmide, pelo que o ponto O , o centro da base, e o vértice do sólido, o ponto V , são dois pontos da recta r . O ponto O é o ponto de intersecção da recta r com o plano v (ver exercício 433). Em seguida, em projecção horizontal, em V.G., construiu-se o pentágono da base, em função dos dados. A altura da pirâmide é 6 cm, pelo que o vértice do sólido é o ponto de r que tem 8 cm de cota ($6+2=8$). A partir das projecções de **todos** os vértices do sólido desenharam-se os seus contornos aparentes – o **contorno aparente frontal** é $[A_2V_2D_2E_2]$ e o **contorno aparente horizontal** é $[A_1B_1V_1D_1E_1]$. Em **projectação frontal**, os vértices que não integram o contorno aparente são B e C , que são invisíveis (por serem os vértices de menor afastamento), bem como todas as arestas que neles convergem. Em projecção frontal, as arestas laterais $[BV]$ e $[CV]$ são invisíveis, mas estão ocultas pelas arestas laterais visíveis, $[EV]$ e $[DV]$ respectivamente. Note que, em projecção frontal, as únicas faces visíveis são as faces laterais $[AEV]$ e $[DEV]$. A face lateral $[CDV]$ e a base são invisíveis, por serem projectantes frontais. As faces laterais $[ABV]$ e $[BCV]$ são também invisíveis. Em projecção frontal, não há lugar à representação de quaisquer invisibilidades. Em **projectação horizontal**, o único vértice que não integra o contorno aparente é C , que é invisível (bem como todas as arestas que nele convergem), por ser um dos vértices de menor cota. As arestas $[BC]$ e $[CD]$, da base, e a aresta lateral $[CV]$ são invisíveis. As restantes arestas são visíveis. Note que, em projecção horizontal, a base é invisível, bem como as faces laterais $[BCV]$ e $[CDV]$. As faces laterais $[ABV]$, $[AEV]$ e $[DEV]$ são visíveis em projecção horizontal.



558.

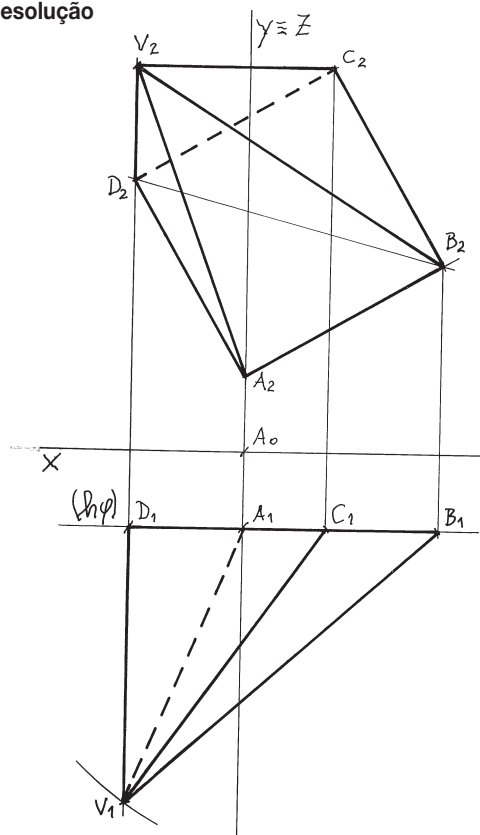


Desenharam-se as projecções do quadrado $[ABCD]$, em função dos dados. A face lateral da pirâmide situada à direita do vértice A (a face $[ADV]$) está contida num plano projectante horizontal, pelo que a sua projecção horizontal se reduz a um segmento de recta. Assim, em função do afastamento de V , é possível determinar V_1 , a sua projecção horizontal (situa-se na linha recta que passa por A_1 e D_1). A altura da pirâmide é 9 cm, pelo que V tem 11 cm de cota ($9+2=11$). A partir das projecções de **todos** os vértices do sólido desenharam-se os seus contornos aparentes – o **contorno aparente frontal** é $[B_2V_2D_2C_2]$ e o **contorno aparente horizontal** é $[A_1B_1C_1V_1]$. Em **projectação frontal**, a base é invisível (é projectante frontal), bem como as faces laterais $[ABV]$ e $[ADV]$ – a única aresta cuja invisibilidade se representa é a aresta lateral $[AV]$ (note que A é o vértice de menor afastamento). Em **projectação horizontal**, a face lateral $[ADV]$ é invisível (é projectante horizontal), bem como a base da pirâmide e a face lateral $[CDV]$. As faces laterais $[ABV]$ e $[BCV]$ são visíveis. A única aresta cuja invisibilidade se representa (em projecção horizontal) é a aresta $[CD]$.

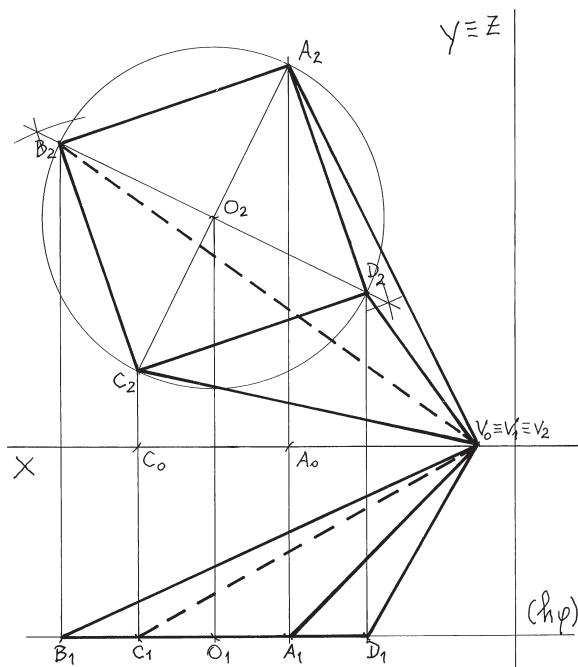
559. Relatório

Desenharam-se as projecções do quadrado $[ABCD]$, em função dos dados, e representou-se o plano que contém a base do sólido. A aresta lateral $[DV]$ é de perfil, o que nos permite concluir que D e V têm a mesma abscissa. A aresta lateral $[CV]$ é horizontal (de nível), o que nos permite concluir que C e V têm a mesma cota. A partir destes dois pressupostos, é possível determinar imediatamente V_2 , a projecção frontal do vértice da pirâmide. A aresta lateral $[CV]$ mede 9 cm – como se trata de um segmento de recta horizontal (de nível), que se projecta em V.G. do Plano Horizontal de Projectão, com o recurso ao compasso, fazendo centro em C_1 e com 9 cm de raio, determinou-se V_1 na linha de chamada de V_2 , tal que $C_1 V_1 = 9$ cm. A partir das projecções de **todos** os vértices do sólido desenharam-se os seus contornos aparentes – o **contorno aparente horizontal** é $[B_1 V_1 D_1 C_1]$ e o **contorno aparente frontal** é $[A_2 B_2 C_2 V_2 D_2]$. Em **projectação horizontal**, a base é invisível (é projectante horizontal), bem como as faces laterais $[ABV]$ e $[ADV]$ – a única aresta cuja invisibilidade se representa é a aresta lateral $[AV]$ (note que A é o vértice de menor cota). No que respeita à **projectação frontal**, note que todos os vértices do sólido integram o contorno aparente frontal. Observa-se, no entanto, que a base é invisível (contém todos os vértices de menor afastamento), bem como a face lateral $[CDV]$. As restantes faces laterais são visíveis, pelo que a única aresta invisível em projectação frontal é a aresta $[CD]$ da base – as restantes arestas são todas visíveis. Note que a aresta $[CD]$ separa duas faces invisíveis (em projectação frontal) do sólido.

Resolução



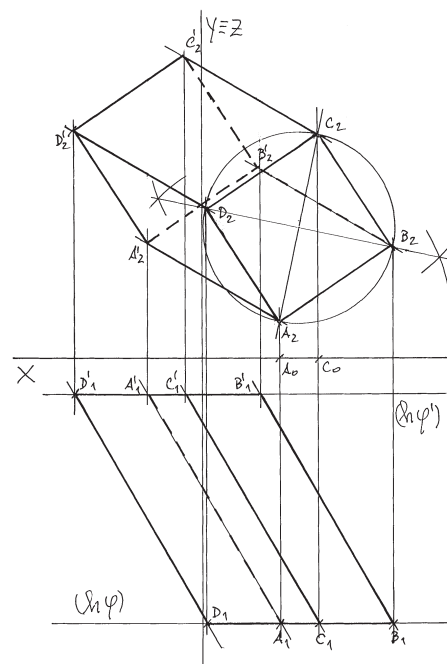
560.



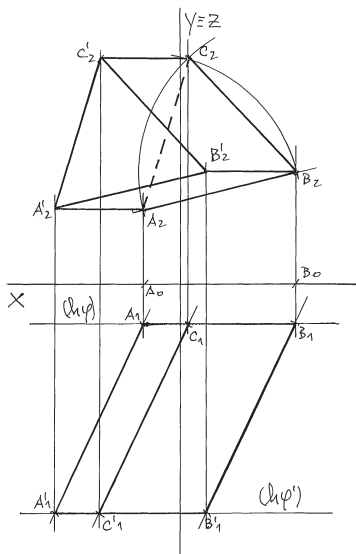
Desenharam-se as projecções do quadrado $[ABCD]$, em função dos dados, e representou-se o plano que contém a base do sólido. Determinaram-se as projecções do vértice da pirâmide e, a partir das projecções de **todos** os vértices do sólido, desenharam-se os seus contornos aparentes – o **contorno aparente horizontal** é $[B_1 A_1 V_1 D_1]$ e o **contorno aparente frontal** é $[A_2 B_2 C_2 V_2]$. Em **projectação frontal**, o único vértice que não integra o contorno aparente frontal é o vértice D , que é visível (bem como todas as arestas que nele convergem) por ser um dos vértices de maior afastamento do sólido. Note que a base é visível (em projectação frontal), bem como as faces laterais $[ADV]$ e $[CDV]$. As faces laterais $[ABV]$ e $[BCV]$ são invisíveis, pelo que a única aresta cuja invisibilidade se representa em projectação frontal é a aresta lateral $[BV]$ (que separa duas faces invisíveis). As restantes arestas são visíveis. Em **projectação horizontal**, as faces laterais visíveis são as faces $[ABV]$ e $[ADV]$, pois as faces laterais $[BCV]$ e $[CDV]$ são invisíveis, bem como a base (que é projectante horizontal). Assim, a única aresta lateral cuja invisibilidade se representa em projectação horizontal é a aresta $[CV]$ (note que C não integra o contorno aparente horizontal e é o vértice de menor cota da base do sólido). As restantes arestas são visíveis ou estão ocultas por arestas visíveis.

561.

Construiu-se o quadrado $[ABCD]$ (que é a base de maior afastamento do sólido) em V.G., em projecção frontal, e desenharam-se as projecções das rectas suportes das arestas laterais do sólido. O plano φ' é o plano da base de menor afastamento do prisma e tem 1 cm de afastamento ($7 - 6 = 1$) – recorde que a altura de um prisma é a distância entre os planos das duas bases, medida perpendicularmente àqueles. A base de menor afastamento do sólido é o quadrado $[A'B'C'D']$ – este fica definido pelos pontos de intersecção de φ' com as rectas que contêm as arestas laterais (A' é o ponto de intersecção da recta suporte da aresta lateral $[AA']$ com o plano φ' , e assim sucessivamente em relação aos restantes vértices do quadrado $[A'B'C'D']$). Note que os lados do quadrado $[A'B'C'D']$ têm **necessariamente** de ser paralelos aos lados correspondentes do quadrado $[ABCD]$. A partir das projecções de **todos** os vértices do sólido desenharam-se os seus contornos aparentes – o **contorno aparente horizontal** é $[B_1B'_1C'_1D'_1D_1C_1]$ e o **contorno aparente frontal** é $[A_2B_2C_2C'_2D'_2A'_2]$. Em **projecção frontal**, existem dois vértices que não integram o contorno aparente frontal – **D** e **B'**. O vértice **D** é **visível** (bem como todas as arestas que nele convergem), por ser um dos vértices de maior afastamento e o vértice **B**, por oposição, é **invisível** (bem como todas as arestas que nele convergem), por ser um dos vértices de menor afastamento. Assim, em projecção frontal, as arestas $[AD]$, $[CD]$ e $[DD']$ são visíveis e as arestas $[A'B']$, $[B'C']$ e $[BB']$ são invisíveis. Note que, em projecção frontal, a base $[ABCD]$ é visível (é a base de maior afastamento), bem como as faces laterais $[AA'D'D]$ e $[CC'D'D]$. A base $[A'B'C'D']$, por sua vez, é invisível (por ser a base de menor afastamento), bem como as faces laterais $[AA'B'B]$ e $[BB'C'C]$. Em **projecção horizontal**, existem dois vértices que não integram o contorno aparente horizontal – **A** e **A'**. Estes são **invisíveis** (bem como todas as arestas que neles convergem) por serem os vértices de menor cota. Assim, as arestas das bases que têm extremos em **A** e **A'** são invisíveis, em projecção horizontal, mas estão ocultas por arestas visíveis. O mesmo não acontece com a aresta lateral $[AA']$, cuja invisibilidade se representa. Note que, em projecção horizontal, são invisíveis as duas bases (que são projectantes horizontais) e as faces laterais $[AA'B'B]$ e $[AA'D'D]$. As faces laterais $[BB'C'C]$ e $[CC'D'D]$, por sua vez, são visíveis.



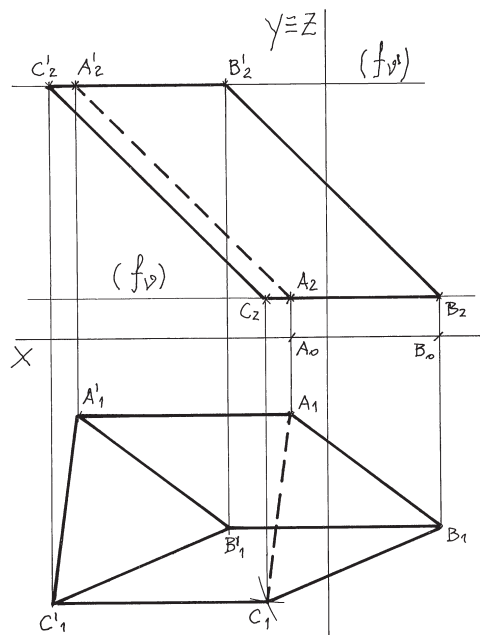
562.



Representaram-se os dois pontos, bem como o plano φ , frontal (de frente), que contém o triângulo. Construiu-se o triângulo em V.G., em projecção frontal, garantindo-se que o polígono se situa no 1^{a} Diedro (**C** tem de ter cota positiva). O prisma tem 5 cm de altura e situa-se no 1^{a} Diedro, pelo que o triângulo $[ABC]$ é a base de menor afastamento do sólido – o plano φ' , que contém a base de maior afastamento do prisma, tem 6 cm de afastamento ($1 + 5 = 6$). Por **A**, **B** e **C** conduziram-se as rectas suportes das arestas laterais do sólido e determinaram-se os respectivos pontos de intersecção com o plano φ' , o plano frontal (de frente) que contém a base de maior afastamento do prisma – esses pontos são **A'**, **B'** e **C'**, que são os vértices da base de maior afastamento do sólido. Note que o triângulo $[A'B'C']$ tem **necessariamente** os seus lados paralelos aos lados correspondentes do triângulo $[ABC]$. A partir das projecções de **todos** os vértices do sólido desenharam-se os seus contornos aparentes – o **contorno aparente horizontal** é $[A_1A'_1C'_1B'_1B_1C_1]$ e o **contorno aparente frontal** é $[A_2B_2C_2C'_2A'_2]$. Em **projecção frontal**, **B'** é o único vértice que não integra o contorno aparente frontal. **B'** é **invisível** (bem como todas as arestas que nele convergem), por ser um dos vértices de menor afastamento. Assim, em projecção frontal, as arestas $[A'B']$, $[B'C']$ e $[BB']$ são visíveis. Note que, em projecção frontal, a base $[ABC]$ é invisível (é a base de menor afastamento), bem como a face lateral $[AA'C'C]$. A base $[A'B'C']$, por sua vez, é visível (por ser a base de maior afastamento), bem como as faces laterais $[AA'B'B]$ e $[BB'C'C]$. A aresta $[AC]$ é, assim, a única aresta invisível em projecção frontal (é uma aresta que separa duas faces invisíveis do sólido). No que respeita à **projecção horizontal**, note que todos os vértices do sólido integram o contorno aparente horizontal. Observa-se, no entanto, que as bases são, ambas, invisíveis (são projectantes horizontais), bem como a face lateral $[AA'B'B]$. As duas outras faces laterais são visíveis, pelo que, em projecção horizontal, não há invisibilidades a registar – todas as arestas são visíveis e as que não são (as da base) estão ocultas por arestas visíveis.

563.

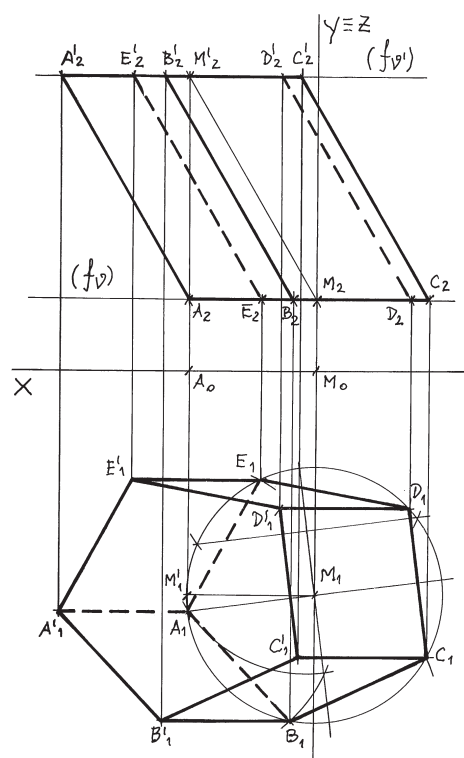
Representaram-se os pontos **A** e **B**, bem como o plano v , horizontal (de nível), que contém o triângulo. Construiu-se o triângulo **[ABC]** em V.G., em projecção horizontal, em função dos dados. Por **A**, **B** e **C** conduziram-se as rectas suportes das arestas laterais do sólido – as arestas medem 8 cm e estão contidas em rectas frontais (de frente), pelo que se projectam em V.G. no Plano Frontal de Projectação. A partir de **A₂**, sobre a projecção frontal da recta suporte de **[AA']**, mediram-se os 8 cm, obtendo-se **A'₂**, por onde se conduziu v' , o plano horizontal (de nível) da base superior do sólido. Os pontos **B'** e **C'** determinaram-se através da intersecção do plano v' com as rectas suportes das arestas **[BB']** e **[CC']**, respectivamente. O triângulo **[A'B'C']** é a base superior do prisma e tem os seus lados paralelos aos lados correspondentes do triângulo **[ABC]**. A partir das projecções de **todos** os vértices do sólido desenharam-se os seus contornos aparentes – o **contorno aparente horizontal** é **[A₁A'₁C₁C₁B₁]** e o **contorno aparente frontal** é **[B₂B'₂C₂C₂]**. Em **projectação horizontal**, **B'** é o único vértice que não integra o contorno aparente horizontal. **B'** é **visível** (bem como todas as arestas que nele convergem), por ser um dos vértices de maior cota. Assim, em projecção horizontal, as arestas **[A'B']**, **[B'C']** e **[BB']** são visíveis. Note que, em projecção horizontal, a base **[ABC]** é invisível (é a base de menor cota), bem como a face lateral **[AA'C'C]**. A base **[A'B'C']**, por sua vez, é visível (por ser a base de maior cota), bem como as faces laterais **[AA'B'B]** e **[BB'C'C]**. A aresta **[AC]** é, assim, a única aresta invisível em projecção horizontal (separa duas faces invisíveis do sólido). Em **projectação horizontal**, os vértices **A** e **A'** são os vértices que não integram o contorno aparente frontal e são invisíveis (por serem os vértices de menor afastamento), bem como todas as arestas que neles convergem. As arestas das bases que têm extremos em **A** (base inferior) ou **A'** (base superior) são invisíveis, mas estão ocultas por arestas visíveis (daquelas bases). Assim, a única invisibilidade a assinalar em projecção frontal é a da aresta lateral **[AA']**. Note que, em projecção frontal, as duas bases são invisíveis (são projectantes frontais), bem como as faces laterais **[AA'B'B]** e **[AA'C'C]**. A face lateral **[BB'C'C]** é a única face do sólido que é visível em projecção frontal.



564. Relatório

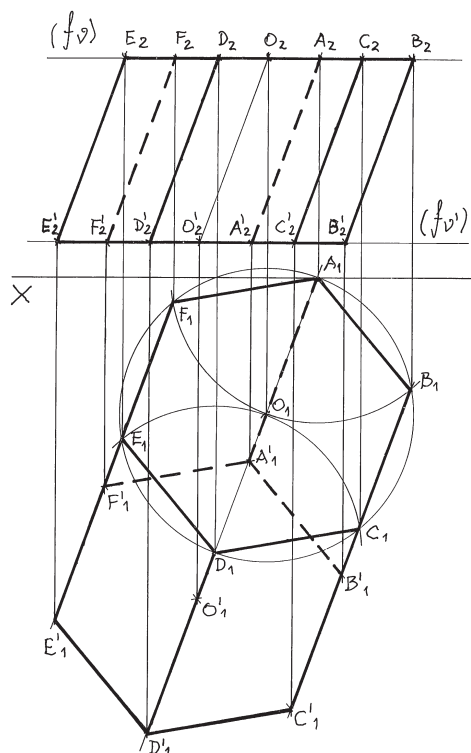
Ver relatório do exercício anterior. A circunferência circunscrita ao pentágono **[ABCDE]** tem raio **MA**, uma vez que tem centro em **M** e passa por **A** (que é um dos vértices do polígono). Os pentágonos **[ABCDE]** (da base inferior) e **[A'B'C'D'E']** (da base superior) têm **necessariamente** os seus lados correspondentes paralelos entre si. A partir das projecções de **todos** os vértices do sólido desenharam-se os seus contornos aparentes – o **contorno aparente horizontal** é **[B₁B'₁A'₁E'₁E₁D₁C₁]** e o **contorno aparente frontal** é **[A₂A'₂B'₂C'₂C₂B₂]**. Em **projectação horizontal**, existem três vértices que não integram o contorno aparente horizontal – **A**, **D'** e **C'**. Os vértices **C'** e **D'** são visíveis (por serem dois dos vértices de maior cota), pelo que são visíveis todas as arestas que neles convergem – as arestas **[B'C']**, **[C'D']**, **[D'E']**, **[CC']** e **[DD']** são visíveis. O vértice **A** é invisível (por ser um dos vértices de menor cota), pelo que são invisíveis todas as arestas que nele convergem – as arestas **[AB]**, **[AE]** e **[AA']** são invisíveis. Note que, em projecção horizontal, a base superior é visível, bem como as faces laterais **[BB'C'C]**, **[CC'D'D]** e **[DD'E'E]**. Por sua vez, a base inferior é invisível em projecção horizontal, bem como as faces laterais **[AA'B'B]** e **[AA'E'E]**. Em **projectação horizontal**, os vértices **E**, **E'**, **D** e **D'** são os vértices que não integram o contorno aparente frontal e são invisíveis (por serem os vértices de menor afastamento), bem como todas as arestas que neles convergem. As arestas das bases que têm extremos em **D** e **E** (na base inferior) ou **D'** e **E'** (na base superior) são invisíveis, mas estão ocultas por arestas visíveis (daquelas bases), o mesmo não acontecendo com as arestas laterais **[DD']** e **[EE']**, cuja invisibilidade, em projecção frontal, se deve assinalar. Note que, em projecção horizontal, as duas bases são invisíveis (são projectantes frontais), bem como as faces laterais **[CC'D'D]**, **[DD'E'E]** e **[AA'E'E]**. As faces laterais **[AA'B'B]** e **[BB'C'C]**, por seu lado, são visíveis em projecção frontal.

Resolução

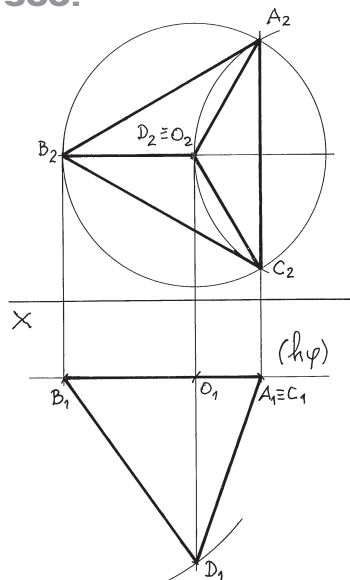


565.

Em primeiro lugar, representaram-se os planos horizontais (de nível) que contêm as bases do sólido – o plano v , que contém a base inferior, tem 1 cm de cota e o plano v' , que contém a base superior, tem 6 cm de cota ($1+5=6$). Em seguida, representou-se o único vértice conhecido do sólido – o vértice **A** (o vértice da base superior que tem afastamento nulo). Raciocinou-se sobre o facto de as arestas laterais do sólido terem projecções paralelas entre si e duas faces laterais do sólido estarem contidas em planos projectantes horizontais, fazendo diedros de 70° (a.e.) com o Plano Frontal de Projectação. A posição dos planos que contêm as faces laterais permite-nos saber a direcção das projecções horizontais das arestas laterais do sólido, que são paralelas às respectivas projecções frontais. Uma vez que duas das faces laterais estão contidas em planos projectantes frontais com a orientação dada, conclui-se que, para que tal aconteça, o hexágono tem de ter dois lados fazendo ângulos de 70° (a.e.) com o Plano Frontal de Projectação. Para efectuar a construção do hexágono, é necessário o recurso à circunferência em que se inscreve (que tem 4 cm de raio, que é o lado do hexágono) e ao **diâmetro inicial** (ver exercício 412), que é paralelo a dois lados do polígono. Assim, por **A** conduziu-se a recta suporte do **diâmetro inicial**, fazendo um ângulo de 70° (a.e.) com o Plano Frontal de Projectação. Em projecção horizontal determinou-se o centro da circunferência circunscrita ao hexágono, a 4 cm de **A**, desenhou-se a circunferência e construiu-se o hexágono em V.G., em projecção horizontal. O hexágono **[ABCDEF]** é a base superior do sólido. Pelos vértices do polígono conduziram-se as rectas suportes das arestas laterais do sólido e determinaram-se os vértices da base inferior pelos respectivos pontos de intersecção com o plano v (o plano da base inferior). O hexágono **[A'B'C'D'E'F']** é a base inferior do sólido e os seus lados são paralelos aos lados correspondentes do polígono da base superior. A partir das projecções de **todos** os vértices do sólido desenharam-se os seus contornos aparentes – o **contorno aparente horizontal** é **[A₁B₁C₁C'₁D'₁E'₁F₁]** e o **contorno aparente frontal** é **[B₂B'₂C'₂D'₂E'₂F₂]**. Em **projecção horizontal**, a base inferior é invisível, bem como as faces laterais **[AA'F'F]** e **[AA'B'B]**. As faces laterais **[BB'C'C]** e **[EE'F'F]** também são invisíveis, pois são projectantes horizontais. As únicas invisibilidades a assinalar em projecção horizontal são as das arestas **[A'F']**, **[A'B']** e **[AA']**, pois as restantes arestas ou são visíveis ou estão ocultas por arestas visíveis. Em **projecção frontal**, as duas bases são invisíveis, pois são projectantes frontais. As faces visíveis em projecção frontal são as faces **[BB'C'C]**, **[CC'D'D]** e **[DD'E'E]**, enquanto que as faces laterais **[AA'B'B]**, **[AA'F'F]** e **[EE'F'F]** são invisíveis. As invisibilidades a assinalar são as das arestas laterais **[AA']** e **[FF']** (note que **A**, **A'**, **F** e **F'** são os vértices de menor afastamento), pois as restantes arestas ou são visíveis ou estão ocultas por arestas visíveis.



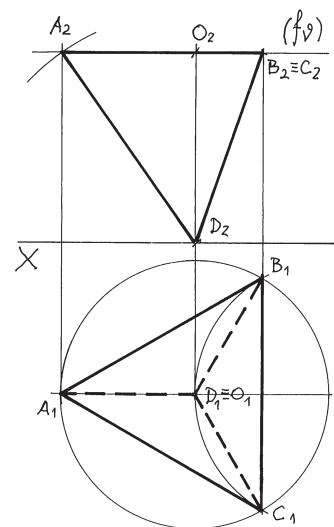
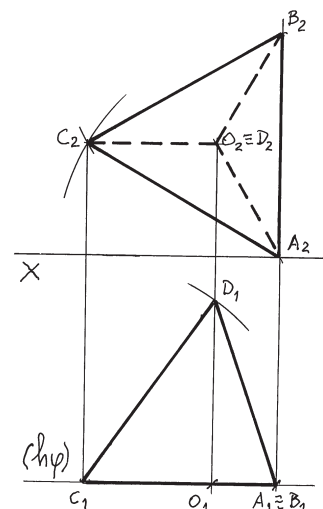
566.



Em primeiro lugar, desenharam-se as projecções do triângulo **[ABC]**, de acordo com os dados. Um tetraedro é um poliedro regular com quatro faces, que são triângulos equiláteros – as suas faces são geometricamente iguais e **as suas arestas têm todas o mesmo comprimento**. Qualquer que seja a face na qual o tetraedro assente, o sólido toma sempre a forma aparente de uma pirâmide triangular regular, **da qual desconhecemos a altura**. Assim, a partir das projecções do triângulo **[ABC]** é possível determinar a projecção frontal do sólido, em cuja construção não interfere o desconhecimento da altura. O eixo do sólido (relativo à face **[ABC]**) é de topo, pelo que se tem, imediatamente, **D₂ = O₂**. O plano frontal (de frente) φ que contém o triângulo tem 2 cm de afastamento, pelo que o afastamento do vértice **D** é **necessariamente** superior ao afastamento de φ , o que nos permite concluir que o vértice **D** é visível em projecção frontal – este raciocínio permitiu-nos concluir a construção da projecção frontal do sólido, na qual não há quaisquer arestas invisíveis. O ponto **D** é, assim, um ponto da recta projectante frontal de **O**, do qual desconhecemos o afastamento (não se sabe qual é a altura do sólido relativa à face **[ABC]**). Recorde que, como atrás se referiu, a construção de um tetraedro baseia-se no facto de todas as arestas do sólido terem o mesmo comprimento. Todas as arestas da face **[ABC]** projectam-se em V.G. no Plano Frontal de Projectação, pelo que já se sabe que o comprimento das arestas do sólido é **A₂B₂ = A₂C₂ = B₂C₂**. As arestas que convergem em **D** medem o mesmo que as restantes arestas. Analisando uma a uma as arestas que convergem em **D**, constata-se que as arestas **[AD]** e **[CD]** são oblíquas, enquanto que a aresta **[BD]** é horizontal (de nível). Destas três arestas, apenas a aresta **[BD]** se projecta em V.G. no Plano Horizontal de Projectação, uma vez que é paralela ao Plano Horizontal de Projectação. Assim, com o recurso ao compasso, fazendo centro em **B₁** e com raio igual a **A₂B₂ = A₂C₂ = B₂C₂**, determinou-se **D₁**, na linha de chamada de **D₂**. **D** é, assim, o ponto da recta projectante frontal de **O** que garante que as arestas do sólido têm todas o mesmo comprimento. A partir de **D₁**, concluiu-se a projecção horizontal do sólido.

567.

Em primeiro lugar, desenharam-se as projecções do triângulo $[ABC]$, de acordo com os dados. Sobre a construção das projecções do tetraedro, ver relatório do exercício anterior. É expressamente referido, no enunciado, que o vértice D é invisível em projecção frontal, pelo que o afastamento de D é **necessariamente** inferior ao de φ . As arestas laterais $[AD]$, $[BD]$ e $[CD]$ são invisíveis em projecção frontal. Destas três arestas, a única que se projecta em V.G. (no Plano Horizontal de Projecção, por ser horizontal) é a aresta $[CD]$.

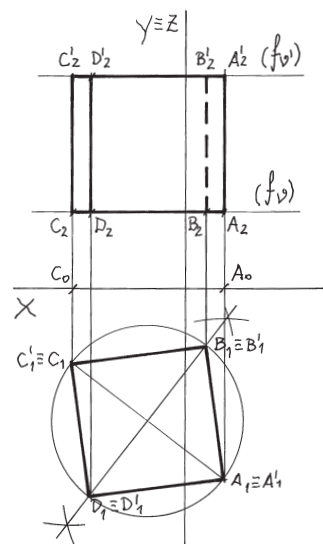


568.

Os dados do enunciado permitiram-nos construir a projecção horizontal do tetraedro – o centro do triângulo $[ABC]$, o ponto O , situa-se na recta projectante horizontal de D , pelo que se tem $O_1 \equiv D_1$. A projecção horizontal de O permite-nos, imediatamente, efectuar a construção da projecção horizontal do sólido, atendendo a que a aresta $[AD]$ é frontal (de frente) – A e D têm o mesmo afastamento. Note que, nesta situação, não é dada a cota do plano horizontal (de nível) v que contém a face $[ABC]$ do tetraedro que, no entanto, tem cota superior a D . Assim, em projecção horizontal, as arestas que convergem em D (as arestas $[AD]$, $[BD]$ e $[CD]$) são invisíveis. A partir da projecção horizontal do sólido, sabe-se o comprimento das arestas do sólido, que é $A_1 B_1 = A_1 C_1 = B_1 C_1$. A aresta $[AD]$ projecta-se em V.G. no Plano Frontal de Projecção, pois é paralela a este (é frontal). Com o compasso, fazendo centro em D_2 e com raio $A_1 B_1 = A_1 C_1 = B_1 C_1$, obteve-se A_2 na linha de chamada de A_1 . Por A_2 conduziu-se o traço frontal do plano v (o plano horizontal que contém a face $[ABC]$ do sólido) e concluiu-se a construção da projecção frontal do tetraedro.

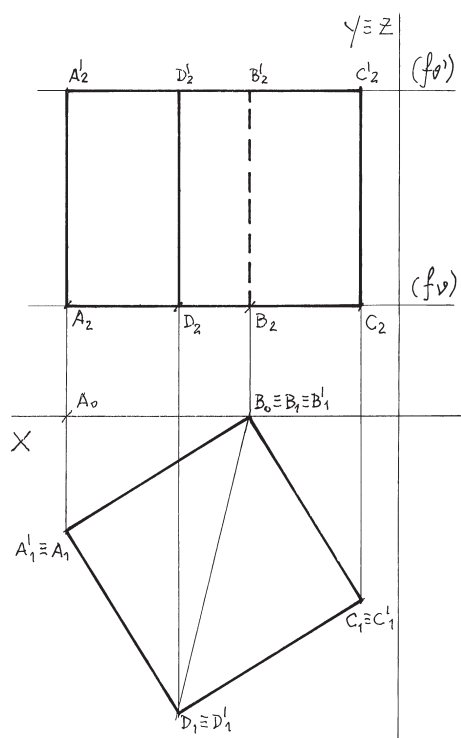
569.

Em primeiro lugar, desenharam-se as projecções do quadrado $[ABCD]$, de acordo com os dados. Um cubo (hexaedro) é um poliedro regular com seis faces, que são quadrados – as suas faces são geometricamente iguais e **as suas arestas têm todas o mesmo comprimento**. Qualquer que seja a face na qual o cubo assente, o sólido toma sempre a forma aparente de um prisma quadrangular regular, **cujas arestas são verticais (ortogonais ao plano da base)**, a partir das projecções do quadrado $[ABCD]$ é possível determinar imediatamente a projecção horizontal do sólido, em cuja construção não interfere a altura. O quadrado $[A'B'C'D']$ é a face superior do sólido. O plano horizontal (de nível) v' é o plano que contém o quadrado $[A'B'C'D']$. A distância entre os planos v e v' (os planos que contêm as duas faces horizontais do cubo), que corresponde à altura de um prisma, é igual à **medida do lado do quadrado $[ABCD]$** , que se projecta em V.G. no Plano Horizontal de Projecção. Note que o plano v' tem de se situar acima do plano v , caso contrário teria cota negativa, pelo que o sólido não se situaria no espaço do 1^o Diedro, como é expressamente referido no enunciado. A partir da representação do plano v' , concluiu-se a representação das projecções do quadrado $[A'B'C'D']$ e do cubo, atendendo às suas invisibilidades (ver exercício 549).

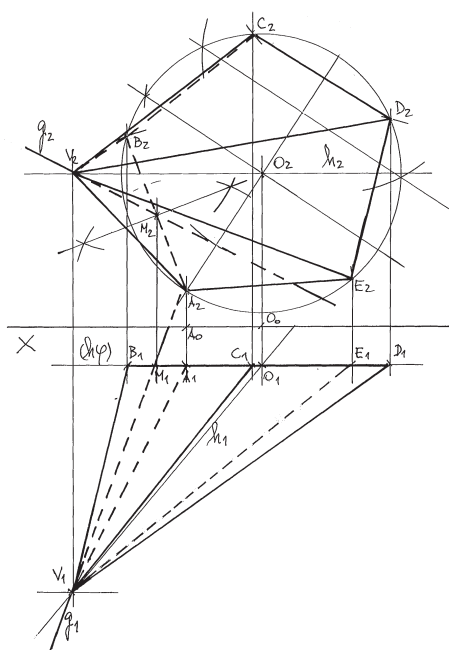
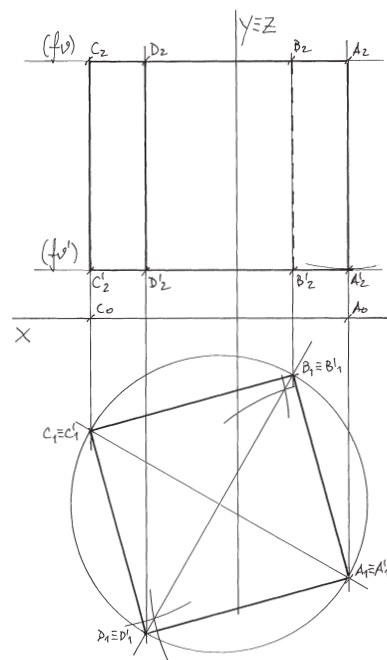


570.

Ver relatório do exercício anterior. O ponto **A** tem coordenadas iguais e projecções simétricas em relação ao eixo **X**, pois é um ponto do $\beta_{1/3}$. O quadrado **[ABCD]** é a face superior do cubo e o quadrado **[A'B'C'D']** a sua face inferior. A distância entre os dois planos (v e v') é igual à medida do lado do quadrado **[ABCD]**.

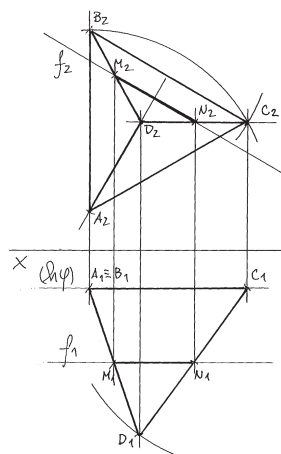
571. Ver relatório do exercício 569.**572.**

Desenharam-se as projecções da pirâmide, de acordo com os dados (ver relatórios do exercício 556). O vértice da pirâmide (o ponto **V**) é o ponto da recta **h** que tem 7 cm de afastamento – a distância de **V** ao plano da base (a altura do sólido) é 6 (6+1 = 7). A geratriz **g** é uma recta, e para definir uma recta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direcção. Qualquer geratriz de uma superfície piramidal contém o vértice **V**, da superfície, pelo que já temos um ponto para definir a recta – o ponto **V**. Falta-nos outro ponto. Determinou-se o ponto **M**, o ponto médio do lado **[AB]** – a geratriz **g** fica definida por **M** e por **V**. O segmento **[MV]** é o troço da geratriz que está contido na face lateral **[ABV]**. A face **[ABV]** é invisível em ambas as projecções, pelo que o segmento **[MV]** da geratriz é invisível em ambas as projecções.

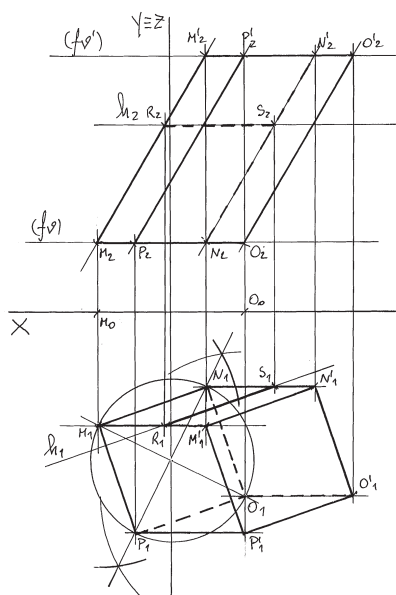


573.

- a) Desenharam-se as projecções do tetraedro, de acordo com os dados (ver relatório do exercício 567) – a aresta **[CD]** é horizontal (de nível), pelo que se projecta em V.G. em projecção horizontal e o afastamento de **D** tem de ser superior ao de φ , para que o sólido se situe no espaço do 1.^a Diedro.
- b) A recta **f**, frontal (de frente), com 3 cm de afastamento e contida no plano **[BCD]**, é a recta suporte do segmento **[MN]**. Desenhou-se **f₁**, a projecção horizontal da recta **f**. A recta **f** é concorrente com as rectas **BD** e **CD** (pois é coplanar com ambas e não paralela a nenhuma delas – ver alínea a) do exercício 272). Os pontos **M** e **N** são, respectivamente, os pontos de concorrência da recta **f** com as rectas **BD** e **CD**. Repare que a recta **BC** é frontal (de frente), pelo que **f** é paralela à recta **BC** (rectas frontais de um plano são paralelas entre si). O segmento **[MN]** é o troço da recta **f** que está contido na face **[BCD]** e é visível em ambas as projecções, pois está contido numa face visível em ambas as projecções.



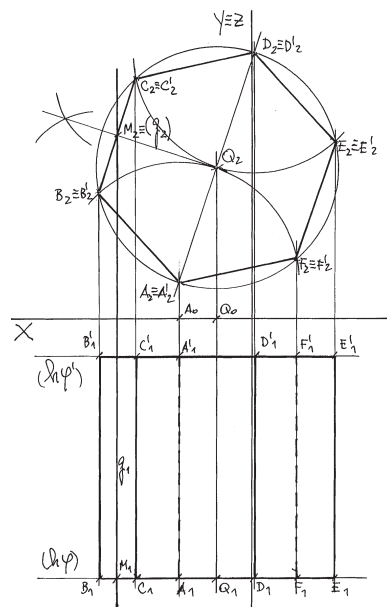
574.



Desenharam-se as projecções do prisma, de acordo com os dados (ver relatório do exercício 561). O plano **v** (o plano da base inferior) tem 2 cm de cota e o plano **v'** (o plano da base superior) tem 8 cm de cota, pois o prisma tem 6 cm de altura ($2+6=8$). Em projecção frontal, a aresta **[NN']** é invisível, por ser a aresta de menor afastamento. Em projecção horizontal, o único vértice invisível é o vértice **O** (por ser o vértice de menor cota que não integra o contorno aparente horizontal), pelo que são invisíveis todas as arestas que nele convergem (repare que a base inferior é invisível). A recta **h**, horizontal (de nível), com 5 cm de cota e contida no plano **[MM'N'N]**, é a recta suporte do segmento **[RS]**. Desenhou-se **h₂**, a projecção frontal da recta **h** – **R** e **S** são, respectivamente, os pontos de concorrência da recta **h** com as rectas **MM'** e **NN'**. Repare que a recta **MN** é horizontal (de nível), pelo que a recta **h** é paralela à recta **MN** (rectas horizontais de um plano são paralelas entre si). O segmento **[RS]** é o troço da recta **h** que está contido na face lateral **[MM'N'N]** do sólido. O segmento **[RS]** é visível em projecção horizontal e invisível em projecção frontal, pois a face lateral **[MM'N'N]**, na qual o segmento está contido, é visível em projecção horizontal e invisível em projecção frontal.

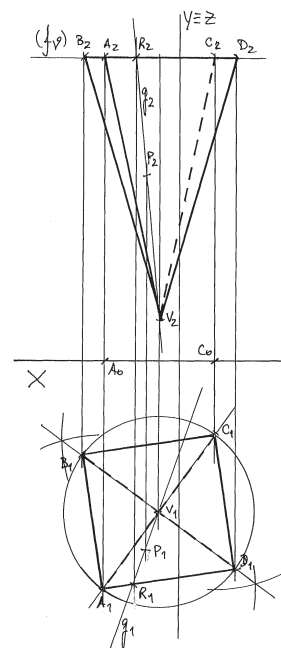
575.

- a) Desenharam-se as projecções do prisma, de acordo com os dados (ver relatório do exercício 552).
- b) A geratriz **g** é uma recta, e para definir uma recta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direcção. As geratrizes da superfície prismática que limita lateralmente o prisma são todas paralelas entre si e são de topo – já temos a direcção. Falta-nos um ponto. Determinou-se o ponto **M**, o ponto médio de **[BC]**. Pelo ponto **M** conduziu-se a recta **g**, de topo – a recta **g** é visível em projecção horizontal (pois está contida numa face visível em projecção horizontal – a face lateral **[BB'C'C]**) e em projecção frontal é um único ponto.

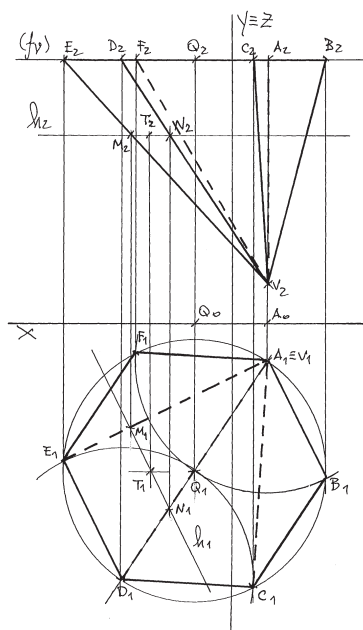


576.

Desenharam-se as projecções da pirâmide, de acordo com os dados (ver relatório do exercício 547). A base da pirâmide é visível em projecção horizontal, pelo que a cota do vértice é inferior à do plano da base. Para que um ponto pertença a um plano (a face [ADV] está contida num plano), tem de pertencer a uma recta desse plano. A geratriz g , da superfície lateral da pirâmide, é uma recta do plano, pois contém dois pontos do plano – V e R (R é um ponto da aresta [AD], pelo que pertence ao plano – ver exercício 572). A geratriz g está contida no plano que contém a face lateral [ADV] e o segmento [VR] é o troço da geratriz g que está contido na face lateral [ADV] da pirâmide. Assim, todos os pontos do segmento [VR] estão contidos na face lateral [ADV] da pirâmide. O ponto P pode ser um qualquer ponto do segmento [VR].



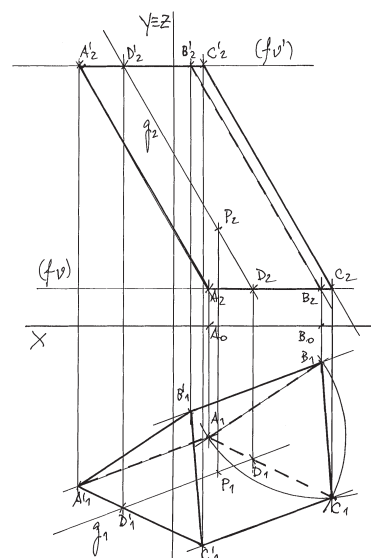
577.



Desenharam-se as projecções da pirâmide, de acordo com os dados. O vértice V , da pirâmide, situa-se na mesma projectante horizontal do vértice A , da base, pelo que se tem $A_1 \equiv V_1$. A cota de V é 1 cm, pois a base tem 7 cm de cota e a altura da pirâmide é 6 cm ($7 - 6 = 1$). Para que um ponto pertença a um plano (a face [EDV] está contida num plano), tem de pertencer a uma recta desse plano. Assim, determinaram-se as projecções de uma recta h , horizontal (de nível), com 5 cm de cota (a cota de T) e contida no plano que contém a face [EDV] – a recta h é o lugar geométrico dos pontos desse plano que têm 5 cm de cota (ver exercício 286). A recta h está definida por dois pontos – os pontos M e N que são, respectivamente, os seus pontos de concorrência com as rectas suportes das arestas [EV] e [DV] (ver exercício 573). O segmento [MN] é o troço da recta h que está contido na face lateral [EDV] da pirâmide. O ponto T é o ponto do segmento de recta [MN] que tem 4 cm de afastamento.

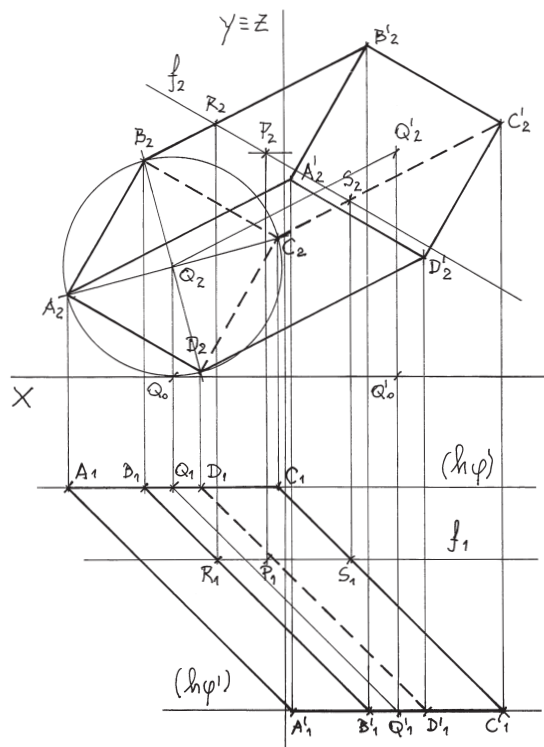
578.

Desenharam-se as projecções do prisma, de acordo com os dados (ver exercício 561). O plano v' , o plano horizontal (de nível) que contém a base superior do sólido (o triângulo [A'B'C']), tem 7 cm de cota, pois o prisma tem 6 cm de altura e o plano da base inferior tem 1 cm de cota ($1 + 6 = 7$). Note que, em projecção horizontal, a base superior é visível e a inferior é invisível. A face lateral que contém os vértices A e C , da base, é a face [AA'C'C]. Qualquer ponto das arestas que delimitam esta face (as arestas laterais [AA'] e [CC'] e as arestas [AC], da base inferior, e [A'C'], da base superior) pertence à face lateral, mas é expressamente pedido, no enunciado, que o ponto não pertença a nenhuma das arestas do sólido. Assim, recorreu-se a uma geratriz g , da superfície lateral do prisma e contida na face [AA'C'C] – a geratriz g está definida por dois pontos (D e D'). O ponto P pode, assim, ser um ponto qualquer de g .



579.

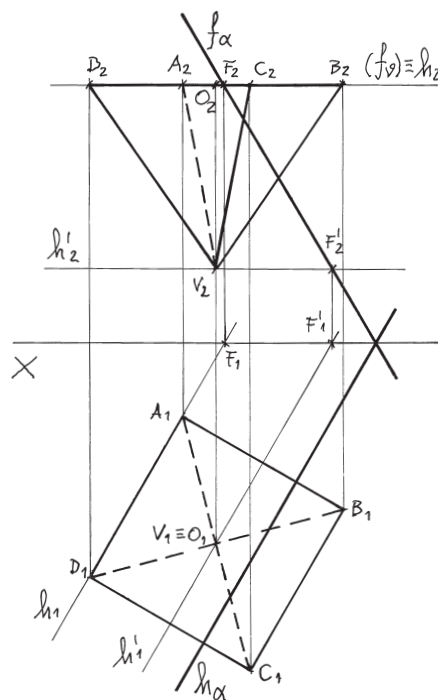
Desenharam-se as projecções do prisma, de acordo com os dados (ver exercício 561). Note que, dado que as abscissas dos pontos Q e Q' são, respectivamente, 3 e -3 , e uma vez que as circunferências circunscritas às bases têm 3 cm de raio, estas serão **necessariamente** tangentes ao plano de perfil YZ (π_1). Por outro lado, para a construção dos quadrados das bases (que se projectam em V.G. no Plano Frontal de Projectão), teve-se em consideração que as suas diagonais fazem ângulos de 45° com os lados dos polígonos. Assim, uma vez que se pretende que haja lados dos quadrados a fazerem ângulos de 30° (a.e.) com o Plano Horizontal de Projectão, cada um dos quadrados terá **necessariamente** uma diagonal a fazer um ângulo de 75° (a.e.) com o Plano Horizontal de Projectão ($30^\circ + 45^\circ = 75^\circ$). Pretende-se um ponto que seja invisível em projecção frontal e esteja contido na superfície lateral do sólido – o ponto P terá **necessariamente** de pertencer à face lateral $[BB'C'C]$ ou à face lateral $[CC'D'D]$, pois estas são as duas únicas faces laterais que são invisíveis em projecção frontal. Rapidamente se percebe que não há nenhum ponto da face lateral $[CC'D'D]$ que tenha 6 cm de cota, pelo que o ponto pertence **necessariamente** à face lateral $[BB'C'C]$. Para que um ponto pertença a um plano (a face $[BB'C'C]$ está contida num plano), tem de pertencer a uma recta desse plano. Assim, determinaram-se as projecções de uma recta f , frontal (de frente), contida no plano que contém a face $[BB'C'C]$ – a recta f é o lugar geométrico dos pontos desse plano que têm 5 cm de afastamento (ver exercício 286). A recta f está definida por dois pontos – os pontos R e S que são, respectivamente, os seus pontos de concorrência com as rectas suportes das arestas $[BB']$ e $[CC']$ (ver exercício 573). O segmento $[RS]$ é o troço da recta f que está contido na face lateral $[BB'C'C]$ do prisma. O ponto P é o ponto do segmento de recta $[RS]$ que tem 6 cm de cota.



580. Relatório

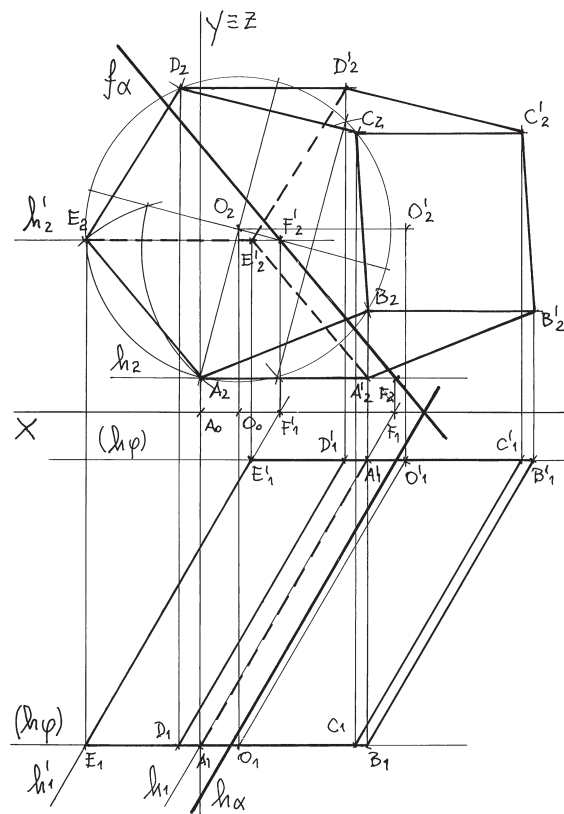
Desenharam-se as projecções da pirâmide, de acordo com os dados (ver exercício 547). O problema da determinação dos traços do plano que contém a face lateral $[ADV]$ da pirâmide reside na determinação dos traços de um plano definido por três pontos – os pontos A , D e V (ver exercício 309). Assim, há que conduzir, por esses três pontos, duas rectas para determinar os traços do plano. Das várias hipóteses possíveis, optou-se, pela rapidez de execução e pelo rigor que proporcionam, por conduzir, por A e D , uma recta horizontal (de nível) h , do plano e, por V , uma recta outra recta horizontal (de nível), h' , do plano. A recta h está definida por dois pontos – A e D . A recta h' está definida por um ponto (V) e por uma direcção – é paralela à recta h , pois rectas horizontais (de nível) de um plano são paralelas entre si. A partir das duas rectas, a determinação dos traços do plano processou-se conforme exposto no relatório do exercício 326, pelo que se aconselha a sua leitura. Note que se poderia, por exemplo, ter recorrido à recta que passa por D e por V , sendo de evitar, no entanto, a recta que passa por A e por V , pois seria, de todas as situações, a que menor rigor proporciona.

Resolução



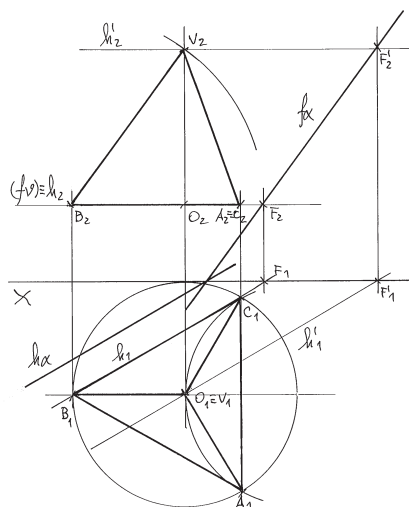
581.

Desenharam-se as projecções do prisma, de acordo com os dados (ver exercício 563). O problema da determinação dos traços do plano que contém a face lateral $[AA'E'E]$ do prisma reside na determinação dos traços de um plano definido por quatro pontos – os pontos A , A' , E e E' . Assim, há que conduzir, por esses quatro pontos, duas rectas para determinar os traços do plano. Das várias hipóteses possíveis, optou-se, pela rapidez de execução e pelo rigor que proporcionam, por conduzir, por A e A' , uma recta horizontal (de nível) h , do plano e, por E e E' , uma recta outra recta horizontal (de nível), h' , do plano. Qualquer das duas rectas está definida por dois pontos e as rectas são **necessariamente** paralelas (rectas horizontais de um plano são paralelas entre si, além de que as rectas h e h' são as rectas suportes de duas arestas laterais do sólido, que são paralelas obviamente). A partir das duas rectas, a determinação dos traços do plano processou-se conforme exposto no relatório do exercício 326. Note que o traço frontal do plano é **necessariamente** paralelo às arestas $[AE]$ (da base de maior afastamento) e $[A'E']$ (da base de menor afastamento), que são, ambas, frontais (de frente). Note que uma outra hipótese seria recorrer a uma recta que contivesse os pontos A e A' (uma recta horizontal) e uma recta que contivesse os pontos A e E (uma recta frontal) – o plano estaria, nesse caso, definido por uma recta horizontal e uma recta frontal. Uma outra hipótese, ainda, seria recorrer às rectas AE e $A'E'$ que são, ambas, rectas frontais (de frente) – o plano estaria, nesse caso, definido por duas rectas frontais (de frente) paralelas.



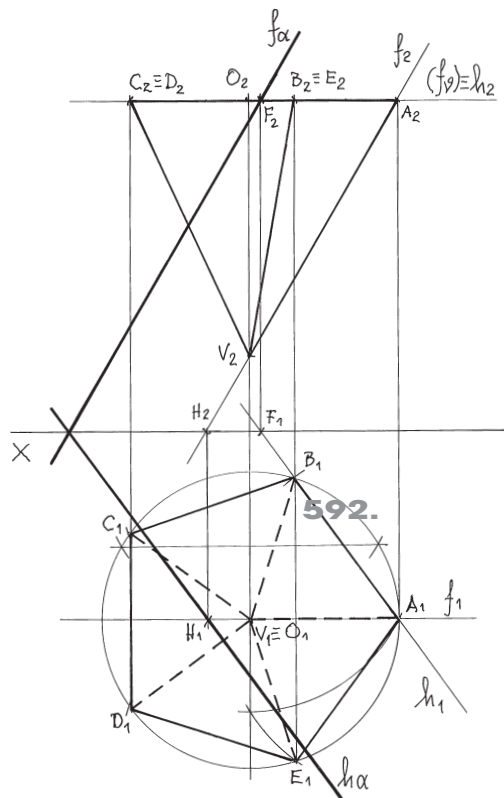
582.

- Desenharam-se as projecções do tetraedro, conforme explicitado no relatório do exercício 566, pelo que se aconselha a sua leitura. Note que, nesta situação, a face $[ABC]$ é horizontal (de nível, pelo que se projecta em V.G. no Plano Horizontal de Projecção e que a aresta $[BV]$ é frontal, pelo que se projecta em V.G. no Plano Frontal de Projecção.
- Para determinar os traços do plano (que está definido por três pontos não colineares), recorreu-se a duas rectas do plano – a recta h , horizontal (de nível), que é a recta suporte da aresta $[BC]$, e a recta h' , horizontal (de nível), paralela a h e que contém V . Sobre a determinação dos traços do plano, ver relatório do exercício 326. Note que o traço frontal do plano é **necessariamente** paralelo à aresta $[BV]$ do sólido, que está contida numa recta frontal (de frente) do plano.

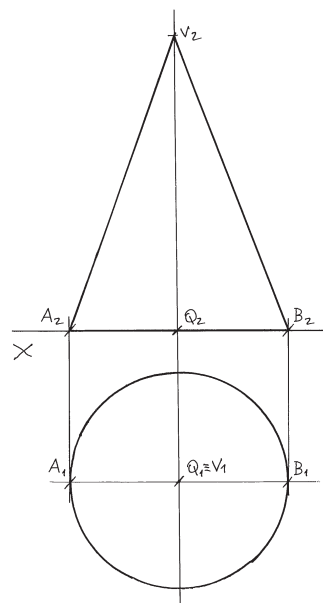


583.

Desenharam-se as projecções da recta f , a recta frontal (de frente) que é a recta suporte do segmento de recta $[AV]$. Em seguida, determinaram-se as projecções do segmento, em função da sua V.G. que se encontra na projecção frontal do segmento. Em seguida, desenharam-se as projecções da pirâmide, conforme exposto no relatório do exercício 548. Para determinar os traços do plano que contém a face lateral $[ABV]$ da pirâmide, recorreu-se à recta f (que contém os pontos A e V , da face referida) e à recta h , horizontal (de nível) que contém os pontos A e B daquela face. O plano está definido, agora, por uma recta frontal (de frente) e por uma recta horizontal (de nível), pelo que os seus traços se determinaram conforme exposto no relatório do exercício 324, pelo que se aconselha a sua leitura.

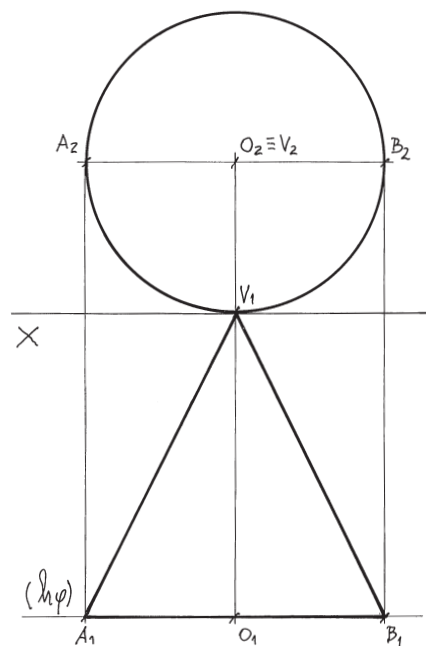
**584.**

Em primeiro lugar, representaram-se, pelas suas projecções, o ponto Q , o centro da base, e a circunferência que delimita a base do sólido. O cone é **recto** (é um cone de revolução), pelo que o seu eixo é ortogonal ao plano da base – está contido numa recta vertical (projectante horizontal), pelo que se tem imediatamente $V_1 = Q_1$. A altura do cone é a distância do seu vértice ao plano da base, medida perpendicularmente a este. Como o eixo é ortogonal ao plano da base, a altura do cone pode medir-se sobre a recta suporte do eixo. A altura do cone é QV e projecta-se em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projectação, pois o segmento $[QV]$ é paralelo ao Plano Frontal de Projectação. V tem, assim, 8 cm de cota (a base tem cota nula). A **projectão horizontal** do cone fica definida pela projecção horizontal da circunferência que delimita a base e pela projecção do vértice. Note que, em projecção horizontal, a base é invisível e a superfície lateral do sólido é visível na sua totalidade. Em **projectão frontal**, a base é invisível (está contida num plano projectante frontal) e parte da superfície lateral do sólido é invisível – as **geratrizes do contorno aparente frontal** são as geratrizes que separam a parte visível da superfície lateral do sólido, daquela que é invisível (são as geratrizes $[AV]$ e $[BV]$). Note que as **geratrizes do contorno aparente frontal** são as geratrizes do sólido que contêm o ponto mais à esquerda (A) e o ponto mais à direita (B) da base (não é necessária a identificação destes pontos). A projecção frontal do sólido resulta, assim, num triângulo isósceles, cuja base é a projecção frontal da base do cone e cujos lados são as projecções frontais das geratrizes do contorno aparente frontal. Sublinha-se que, nesta situação, as geratrizes do **contorno aparente frontal** estão contidas em **rectas frontais** (de frente).

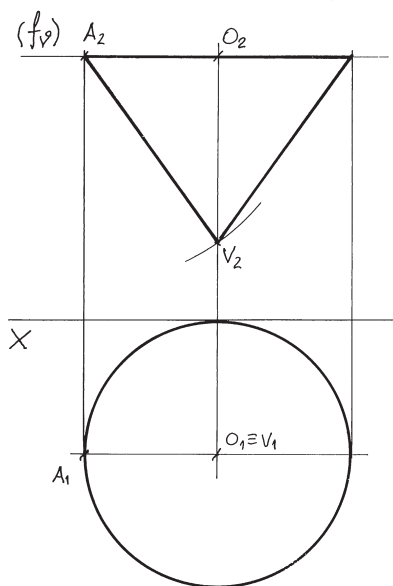


585.

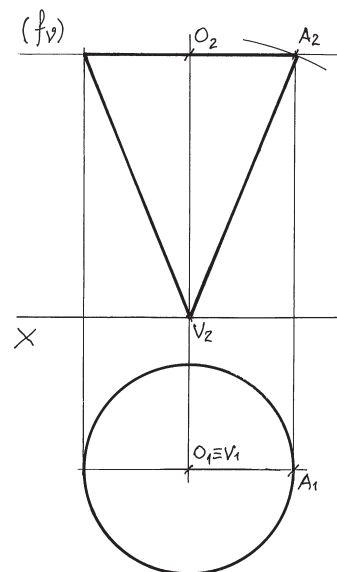
Em primeiro lugar, representaram-se o centro da base (Q), pelas suas projecções, e a circunferência que delimita a base do sólido (que tem 4 cm de raio, pois é tangente ao Plano Horizontal de Projecção). Representou-se, também, o plano φ , o plano frontal (de frente) que contém a base do sólido. O cone é **recto** (é um cone de revolução), pelo que o seu eixo é ortogonal ao plano da base – está contido numa recta de topo (projectante frontal), pelo que se tem imediatamente $V_2 \equiv Q_2$. As projecções de V determinaram-se imediatamente, pois V tem afastamento nulo (é um ponto do Plano Frontal de Projecção). A **projecção frontal** do cone fica definida pela projecção frontal da circunferência que delimita a base e pela projecção do vértice. Note que, em projecção frontal, a base é visível e a superfície lateral do sólido é invisível na sua totalidade. Em **projecção horizontal**, a base é invisível (está contida num plano projectante horizontal) e parte da superfície lateral do sólido é invisível – as **geratrizes do contorno aparente horizontal** são as geratrizes que separam a parte visível da superfície lateral do sólido, daquela que é invisível (são as geratrizes $[AV]$ e $[BV]$). Note que as **geratrizes do contorno aparente horizontal** são as geratrizes do sólido que contêm o ponto de maior abscissa (A) e o ponto de menor abscissa (B) da base (não é necessária a identificação destes pontos). A projecção horizontal do sólido resulta, assim, num triângulo isósceles, cuja base é a projecção horizontal da base do cone e cujos lados são as projecções horizontais das geratrizes do contorno aparente horizontal. Sublinha-se que, nesta situação, as geratrizes do **contorno aparente horizontal** estão contidas em **rectas horizontais** (de nível).



586.



Ver relatório do exercício 584. As **geratrizes do contorno aparente frontal** estão contidas em **rectas frontais** (de frente), pelo que se projectam em V.G. no Plano Frontal de Projecção – assim, são as geratrizes do **contorno aparente frontal** que nos permitem determinar V_2 , a projecção frontal do vértice do sólido. Considerou-se a geratriz mais à esquerda do contorno aparente frontal (a geratriz $[AV]$) – com o recurso ao compasso, fazendo centro em A_2 e com 6 cm de raio (a medida das geratrizes), obteve-se V_2 na mesma linha de chamada de V_1 . Note que, nesta situação, em projecção horizontal, a base é visível e a superfície lateral do sólido é invisível na sua totalidade.

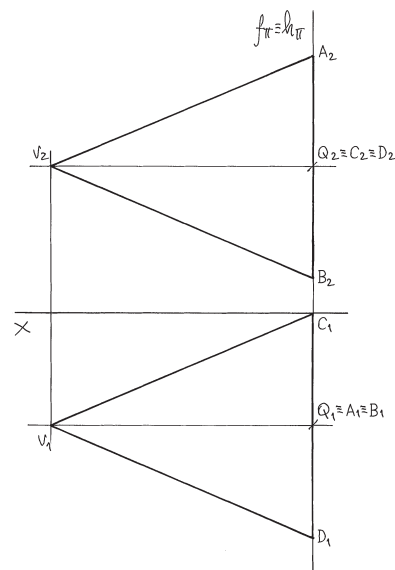


587.

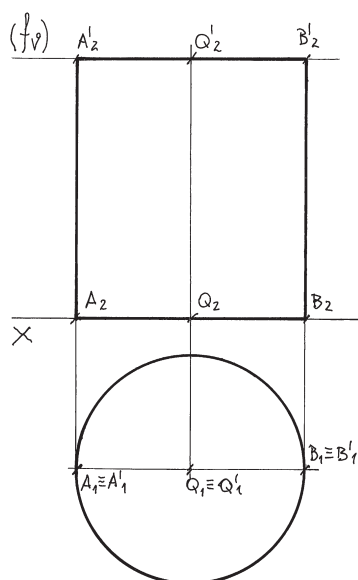
Os dados do enunciado permitiram-nos representar o centro da base, o vértice do sólido e o plano horizontal (de nível) que contém a base do cone (ver exercício 584). No entanto, o enunciado é omissivo no que respeita ao raio da base. O raio da base é determinável a partir do comprimento das geratrizes. De acordo com o exposto no relatório do exercício anterior, as geratrizes do contorno aparente frontal, que estão contidas em rectas frontais (de frente), projectam-se em V.G. no Plano Frontal de Projecção. Assim, com o recurso ao compasso, fazendo centro em V_2 e com 9 cm de raio (o comprimento das geratrizes) obteve-se A_2 sobre (f_v) , sendo $[AV]$ a geratriz mais à direita do contorno aparente frontal. O raio da base é, assim, QA , que se projecta em V.G. no Plano Horizontal de Projecção, pois está contido num plano horizontal (de nível). A partir da medida do raio da base, concluiu-se a construção das projecções do sólido.

588.

Em primeiro lugar, representaram-se o centro da base (o ponto Q), pelas suas projecções, e o plano de perfil π que contém a base do sólido, pelos seus traços (o plano π é duplamente projectante). Em seguida, desenharam-se as projecções da circunferência que delimita a base do cone (ver exercício 419) – a projecção frontal da circunferência corresponde à projecção frontal do seu diâmetro vertical (o diâmetro $[AB]$) e a projecção horizontal da circunferência corresponde à projecção horizontal do seu diâmetro de topo (o diâmetro $[CD]$). O cone é **recto** (de revolução, pelo que o seu eixo é ortogonal ao plano da base – está contido numa recta fronto-horizontal (ortogonal ao plano de perfil) e a altura do cone projecta-se em V.G. em ambas as projecções. Em **projectão frontal**, a base é invisível (está contida num plano projectante frontal) e parte da superfície lateral do sólido é invisível – as **geratrizes do contorno aparente frontal** são as geratrizes $[AV]$ e $[BV]$. Note que as **geratrizes do contorno aparente frontal** são as geratrizes do sólido que contêm o ponto de maior cota (A) e o ponto de menor cota (B) da base (não é necessária a identificação destes pontos). A projecção frontal do sólido resulta, assim, num triângulo isósceles, cuja base é a projecção frontal da base do cone e cujos lados são as projecções frontais das geratrizes do contorno aparente frontal. Sublinha-se que, nesta situação, as geratrizes do **contorno aparente frontal** estão contidas em **rectas frontais** (de frente). Em **projectão horizontal**, a base é invisível (está contida num plano projectante horizontal) e parte da superfície lateral do sólido é invisível – as **geratrizes do contorno aparente horizontal** são as geratrizes $[CV]$ e $[DV]$. Note que as **geratrizes do contorno aparente horizontal** são as geratrizes do sólido que contêm o ponto de menor afastamento (C) e o ponto de maior afastamento (D) da base (não é necessária a identificação destes pontos). A projecção horizontal do sólido resulta, assim, num triângulo isósceles, cuja base é a projecção horizontal da base do cone e cujos lados são as projecções horizontais das geratrizes do contorno aparente horizontal. Sublinha-se que, nesta situação, as geratrizes do **contorno aparente horizontal** estão contidas em **rectas horizontais** (de nível).

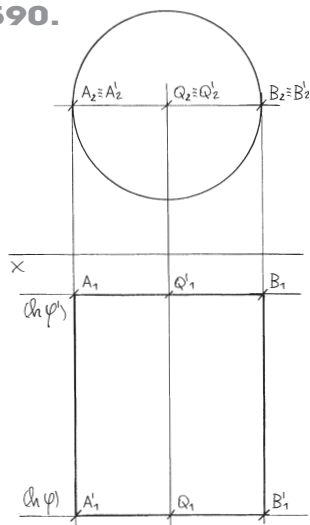


589.



Em primeiro lugar, representaram-se, pelas suas projecções, o ponto Q e a base inferior do sólido. A altura de um cilindro é a distância entre os planos das bases, medida perpendicularmente a estes – a altura do cilindro é 7 cm, pelo que v , o plano horizontal (de nível) que contém a base superior do sólido, tem 7 cm de cota (a base inferior tem cota nula). O cilindro é **recto** (de revolução), pelo que o seu eixo está contido numa recta vertical (projectante horizontal), pelo que se tem imediatamente $Q'_1 \equiv Q_1$ (Q' é o centro da base superior). O plano v é projectante frontal, o que nos permite determinar, imediatamente, Q'_2 . As geratrizes do sólido são paralelas ao seu eixo (são igualmente verticais). A **projectão horizontal** do cilindro fica definida pela projecção horizontal da base superior (que está coincidente com a projecção horizontal da base inferior). Note que, em projecção horizontal, a base superior é visível, a base inferior é necessariamente invisível e a superfície lateral do sólido é invisível na sua totalidade (as geratrizes são projectantes horizontais). Em **projectão frontal**, as bases são invisíveis (estão contidas em planos projectantes frontais) e parte da superfície lateral do sólido é invisível – as **geratrizes do contorno aparente frontal** são as geratrizes que separam a parte visível da superfície lateral do sólido, daquela que é invisível (são as geratrizes $[AA']$ e $[BB']$). Note que as **geratrizes do contorno aparente frontal** são a geratriz que contém os dois pontos de maior abscissa (A e A') das bases e a geratriz que contém os dois pontos de menor abscissa (B e B') das bases (não é necessária a identificação destes pontos). A projecção frontal do sólido resulta, assim, no rectângulo $[A_2A'_2B'_2B_2]$. Sublinha-se que, nesta situação, as geratrizes do **contorno aparente frontal** estão contidas em **rectas verticais** (projectantes horizontais).

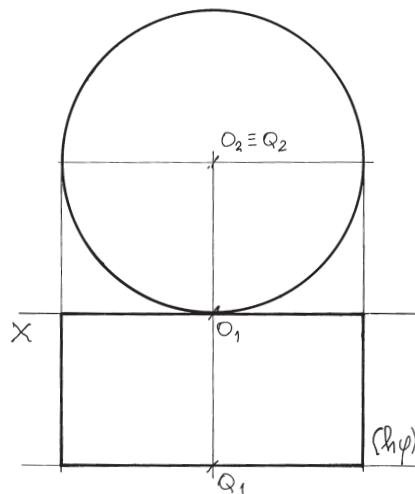
590.



Em primeiro lugar, representaram-se o ponto **Q** e a base de maior afastamento do sólido (pelas suas projecções), bem como o plano frontal (de frente) que a contém (pelo seu traço horizontal). A altura do cilindro é 6 cm, pelo que ϕ' , o plano frontal (de frente) que contém a base de menor afastamento do sólido, tem 1 cm de afastamento ($7 - 6 = 1$). O cilindro é **recto** (de revolução), pelo que o seu eixo está contido numa recta de topo (projectante frontal), pelo que se tem imediatamente $Q'_2 \equiv Q_2$ (Q' é o centro da base de menor afastamento). As geratrizes do sólido são paralelas ao seu eixo (são igualmente de topo). A **projectão frontal** do cilindro fica definida pela projecção frontal da base de maior afastamento (que está coincidente com a projecção frontal da outra base). Note que, em projecção frontal, a base de maior afastamento é visível, a outra base é necessariamente invisível e a superfície lateral do sólido é invisível na sua totalidade (as geratrizes são projectantes frontais). Em **projectão horizontal**, as bases são invisíveis (estão contidas em planos projectantes horizontais) e parte da superfície lateral do sólido é invisível – as **geratrizes do contorno aparente horizontal** são as geratrizes **[AA']** e **[BB']** (a geratriz que contém os dois pontos de maior abscissa das bases – **A** e **A'** – e a geratriz que contém os dois pontos de menor abscissa das bases – **B** e **B'**). Sublinha-se que não é necessária a identificação destes pontos. A projecção horizontal do sólido resulta, assim, no rectângulo **[A₁A'₁B'₁B₁]**. Sublinha-se que, nesta situação, as geratrizes do **contorno aparente horizontal** estão contidas em **rectas de topo** (projectantes horizontais).

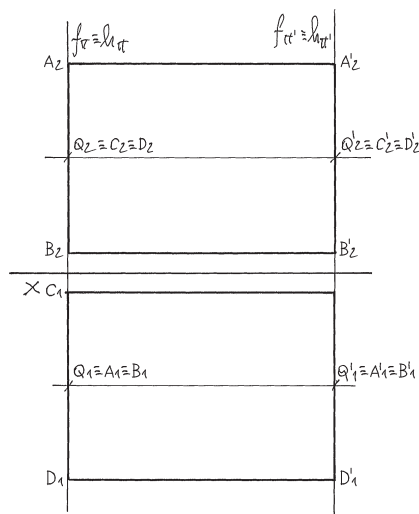
591. Relatório

Ver exercício 589. **Q** é o centro da base de maior afastamento do sólido e tem 4 cm de cota, pois o cilindro é tangente ao Plano Horizontal de Projectação (as suas bases são também tangentes ao Plano Horizontal de Projectação) – **Q** tem projecções simétricas em relação ao eixo **X**, pois pertence ao $\beta_{1/3}$. **O** é o centro da base de menor afastamento do cilindro, que tem afastamento nulo, pois esta base está contida no Plano Frontal de Projectação.



Resolução

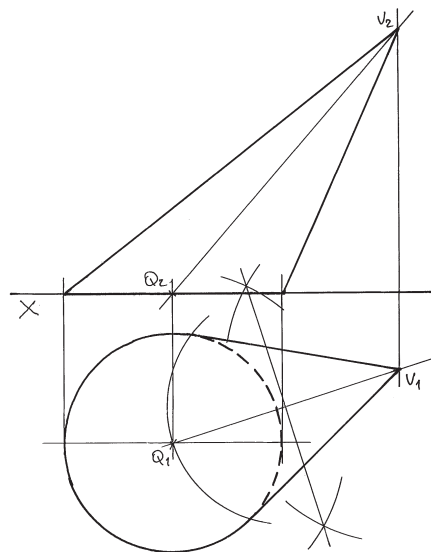
592.



Em primeiro lugar, representaram-se o centro da base mais à esquerda do sólido (o ponto **Q**), pelas suas projecções, e o plano de perfil π que a contém, pelos seus traços (o plano π é duplamente projectante). Em seguida, desenharam-se as projecções da circunferência que delimita a base do cone (ver exercício 588) – a projecção frontal da circunferência corresponde à projecção frontal do seu diâmetro vertical (o diâmetro **[AB]**) e a projecção horizontal da circunferência corresponde à projecção horizontal do seu diâmetro de topo (o diâmetro **[CD]**). O plano π' é o plano que contém a base mais à direita do cilindro, e dista 7 cm do plano π (a altura do cilindro é a distância entre os planos das bases). O cilindro é **recto** (de revolução, pelo que o seu eixo é ortogonal aos planos das bases – está contido numa recta fronto-horizontal). Em **projectão frontal**, as bases são invisíveis (estão contidas em planos projectantes frontais) e parte da superfície lateral do sólido é invisível – as **geratrizes do contorno aparente frontal** são as geratrizes **[AA']** e **[BB']**. A geratriz **[AA']** é a geratriz que contém os pontos de maior cota das bases e a geratriz **[BB']** é a geratriz que contém os pontos de menor cota das bases. A projecção frontal do cilindro reduz-se ao rectângulo **[A₂A'₂B'₂B₂]**. Em **projectão horizontal**, as bases são invisíveis (estão contidas em planos projectantes horizontais) e parte da superfície lateral do sólido é invisível – as **geratrizes do contorno aparente horizontal** são as geratrizes **[CC']** e **[DD']**. A geratriz **[CC']** é a geratriz que contém os pontos de menor afastamento das bases e a geratriz **[DD']** é a geratriz que contém os pontos de maior afastamento das bases. A projecção horizontal do cilindro reduz-se ao rectângulo **[C₁C'₁D'₁D₁]**.

593.

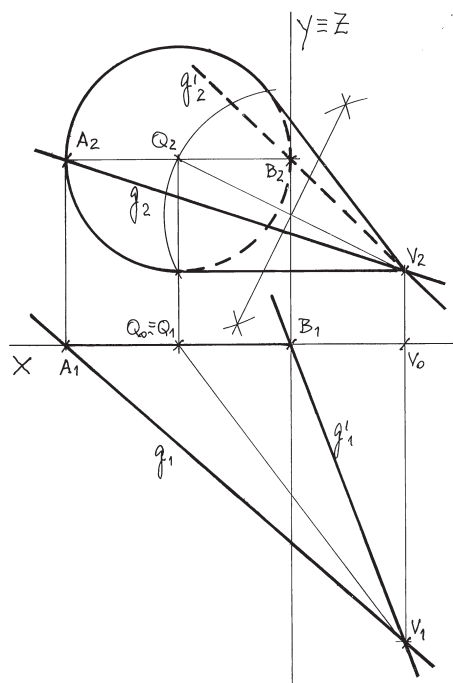
Em primeiro lugar, representaram-se, pelas suas projecções, o ponto **Q**, a base do cone e o seu vértice (**V**). Em **projectão frontal**, a base é invisível (está contida num plano projectante frontal) e parte da superfície lateral do sólido é invisível – as **geratrizes do contorno aparente frontal** são as geratrizes que contêm o ponto mais à esquerda e o ponto mais à direita da base (ver exercício 584). A projecção frontal do sólido resulta, nesta situação, num triângulo escaleno, cuja base é a projecção frontal da base do cone e cujos lados são as projecções frontais das geratrizes do contorno aparente frontal. Sublinha-se que, nesta situação (um cone oblíquo), as geratrizes do contorno aparente frontal **não estão contidas em rectas frontais** (de frente), ao contrário do que se observou nas situações anteriores (cones de revolução). Note que **não se representa a projecção horizontal das geratrizes do contorno aparente frontal**, por estas não se distinguem das restantes geratrizes, em projecção horizontal. Em **projectão horizontal**, a determinação das **geratrizes do contorno aparente horizontal** processa-se através do traçado das rectas tangentes a uma circunferência (a base do cone) que passam por um ponto exterior (**V₁**, a projecção horizontal do vértice). As **geratrizes do contorno aparente horizontal**, que são tangentes à base em projecção horizontal, separam a parte visível da superfície lateral do sólido, em projecção horizontal, daquela que é invisível. O **contorno aparente horizontal** do sólido é uma **linha mista**. A base do cone é invisível, pelo que o arco menor compreendido entre os dois pontos de tangência é invisível. Note que **não se representa a projecção frontal das geratrizes do contorno aparente horizontal**, por estas não se distinguem das restantes geratrizes, em projecção frontal.



594. Relatório

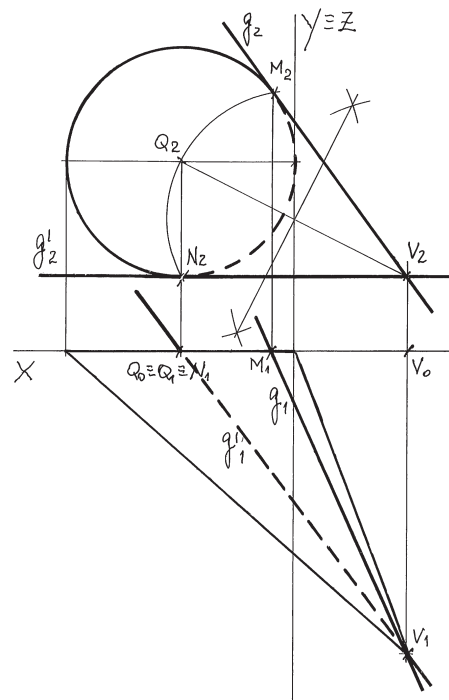
Em primeiro lugar, representaram-se, pelas suas projecções, o ponto **Q**, a base do cone e o seu vértice (**V**). Em **projectão frontal**, a determinação das **geratrizes do contorno aparente frontal** processa-se através do traçado das rectas tangentes a uma circunferência (a base do cone) que passam por um ponto exterior (**V₂**, a projecção frontal do vértice). As **geratrizes do contorno aparente frontal**, que são tangentes à base em projecção frontal, separam a parte visível da superfície lateral do sólido, em projecção frontal, daquela que é invisível. O **contorno aparente frontal** do sólido é uma **linha mista**. A base do cone é invisível, pelo que o arco menor compreendido entre os dois pontos de tangência é invisível. Note que **não se representa a projecção horizontal das geratrizes do contorno aparente horizontal**, por estas não se distinguem das restantes geratrizes, em projecção horizontal. Em **projectão horizontal**, a base é invisível (está contida num plano projectante horizontal) e parte da superfície lateral do sólido é invisível – as **geratrizes do contorno aparente horizontal** são as geratrizes **[AV]** (geratriz **g**) e **[BV]** (geratriz **g'**) – ver exercício 584. A projecção horizontal do sólido resulta, assim, num triângulo escaleno (ver exercício anterior). Sublinha-se que, nesta situação (um cone oblíquo), as geratrizes do contorno aparente frontal **não estão contidas em rectas horizontais** (de nível), ao contrário do que se observou em situações anteriores (cones de revolução). Apesar de, de forma corrente, **não se representarem as projecções frontais das geratrizes do contorno aparente horizontal** (por estas não se distinguem das restantes geratrizes, em projecção frontal), neste exercício **é expressamente pedida** a representação das duas projecções destas geratrizes, atendendo às respectivas invisibilidades relativas ao sólido. Assim, a partir das projecções de **A**, **B** e **V**, desenharam-se as projecções das geratrizes **g** e **g'**, atendendo-se a que a geratriz **g'** se situa na parte invisível do sólido, em projecção frontal.

(Resolução)



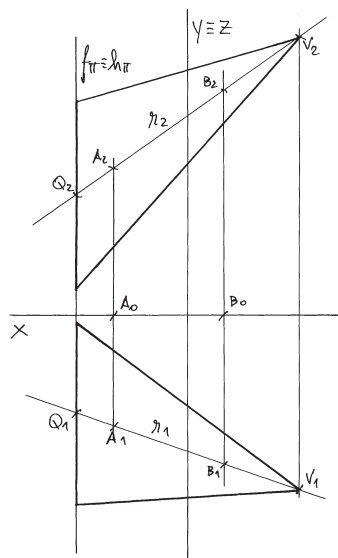
595.

Sobre a determinação das projecções do cone, ver relatório do exercício anterior. As geratrizes do contorno aparente frontal são as geratrizes $[MV]$ (geratriz g) e $[NV]$ (geratriz g'). M_2 e N_2 são os dois pontos de tangência das projecções frontais das geratrizes g e g' à projecção frontal da base do cone. Apesar de, de forma corrente, **não se representarem as projecções horizontais das geratrizes do contorno aparente frontal** (por estas não se distinguirem das restantes geratrizes, em projecção horizontal), neste exercício **é expressamente pedida** a representação das duas projecções destas geratrizes, atendendo às respectivas invisibilidades relativas ao sólido. Assim, a partir das projecções de M , N e V , desenharam-se as projecções das geratrizes g e g' , atendendo-se a que a geratriz g' se situa na parte invisível da superfície lateral do sólido, em projecção horizontal.



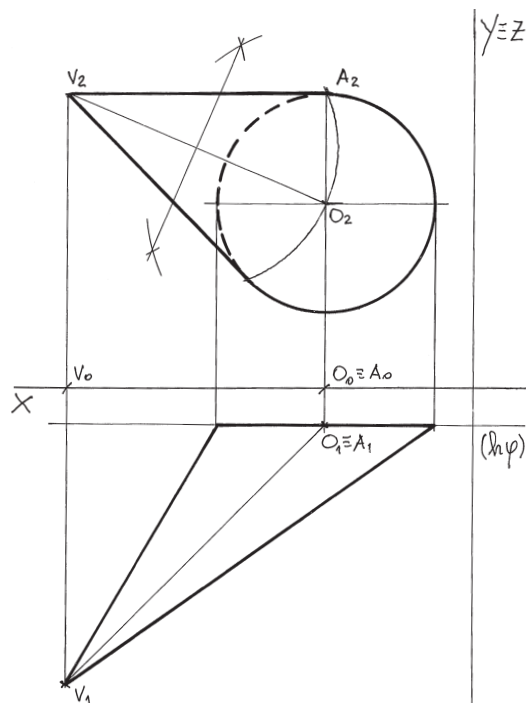
596.

Em primeiro lugar, desenharam-se as projecções da recta r e determinou-se o ponto Q , o ponto de intersecção da recta r com o plano π , o plano da base – Q é o centro da base. O cone tem 6 cm de altura, pelo que V é o ponto da recta r cuja distância a π (medida ortogonalmente a π) é 6 cm. V está para a direita de π , pois caso se situasse à esquerda, o cone não se situaria no 1^o Diedro. Em **projectão frontal**, a base é invisível (está contida num plano projectante frontal) e parte da superfície lateral do sólido é invisível – as **geratrizes do contorno aparente frontal** são as geratrizes que contêm o ponto de maior cota e o ponto de menor cota da base (ver exercício 588). A projecção frontal do sólido resulta, assim, num triângulo escaleno. Sublinha-se que, nesta situação, as geratrizes do contorno aparente frontal **não estão contidas em rectas frontais** (de frente), ao contrário da situação do exercício 588. Em **projectão horizontal**, a base é invisível (está contida num plano projectante horizontal) e parte da superfície lateral do sólido é invisível – as **geratrizes do contorno aparente horizontal** são as geratrizes que contêm o ponto de menor afastamento e o ponto de maior afastamento da base (ver exercício 588). A projecção horizontal do sólido resulta, assim, noutro triângulo escaleno. Sublinha-se que, nesta situação, as geratrizes do contorno aparente horizontal **não estão contidas em rectas horizontais** (de nível), ao contrário da situação do exercício 588.

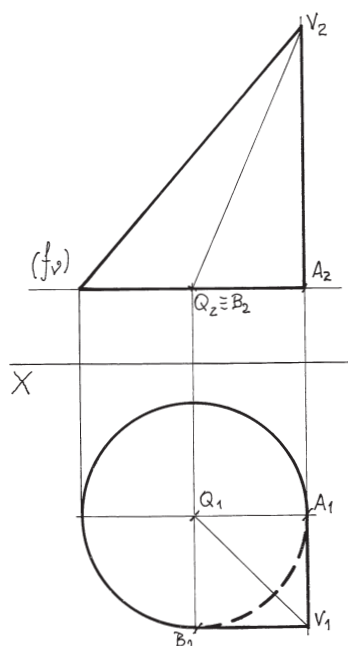


597.

Ver exercício 594. O raio da base é \overline{OA} , pois O é o centro da base e A é um ponto da circunferência que delimita a base. A geratriz $[AV]$ é horizontal (de nível), pelo que A e V têm a mesma cota. Note que, na execução do traçado das rectas tangentes à circunferência que passam por um ponto exterior (V_2), um dos pontos de tangência é, precisamente, A_2 .

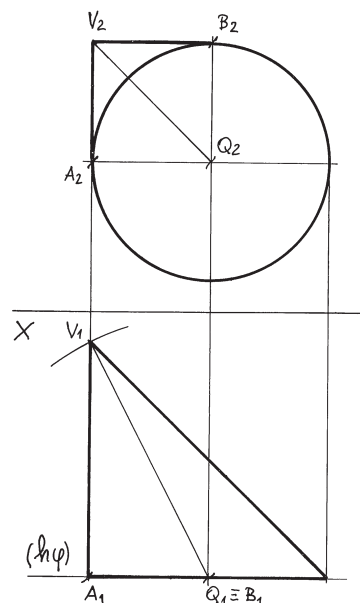
**598.**

Ver exercício 593. A geratriz mais à direita (geratriz $[AV]$) é de perfil, pelo que A e V têm a mesma abscissa. A geratriz de maior afastamento (a geratriz $[BV]$) é frontal (de frente), pelo que B e V têm o mesmo afastamento. Este raciocínio permitiu-nos determinar, imediatamente, V_1 , a projecção horizontal do vértice do cone. O cone tem 7 cm de altura e o plano da base tem 2 cm de cota, pelo que V tem 9 cm de cota ($2 + 7 = 9$).



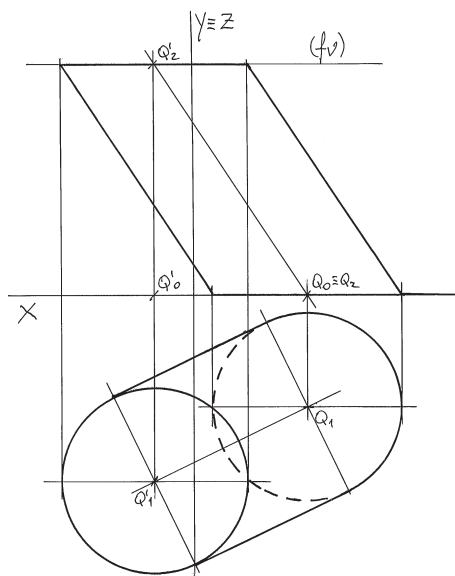
599.

Ver exercício 594. A geratriz mais à esquerda, (geratriz $[AV]$) é de perfil, pelo que A e V têm a mesma abscissa. A geratriz de maior cota (a geratriz $[BV]$) é horizontal (de nível), pelo que B e V têm a mesma cota. Este raciocínio permitiu-nos determinar, imediatamente, V_2 , a projecção frontal do vértice do cone. Note que não nos é dada a altura do cone. No entanto, uma vez que nos é dado o comprimento da geratriz horizontal (de nível) do sólido (a geratriz $[BV]$), que se projecta em V.G. no Plano Horizontal de Projectão, com o recurso ao compasso, fazendo centro em B_1 e com 7 cm de raio (o comprimento da geratriz) obteve-se V_1 na mesma linha de chamada de V_2 . Note que, nesta situação, **a base do cone é visível** (tem maior afastamento do que o vértice), enquanto que na situação do exercício 594 a base era invisível.



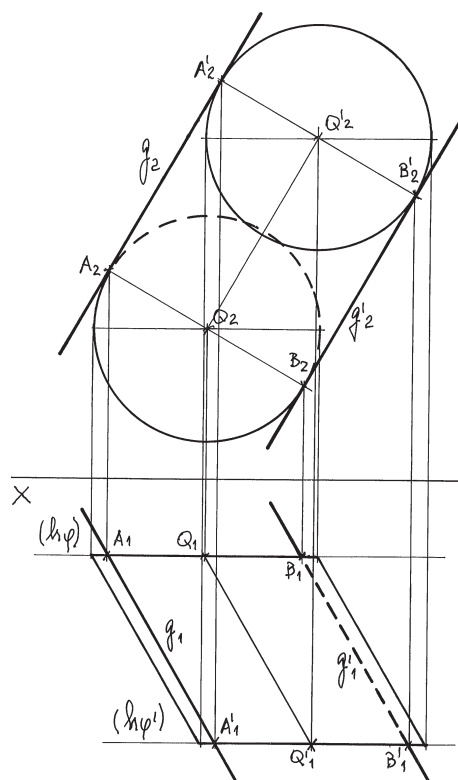
600.

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos Q e Q' , pelas suas projecções, bem como o plano horizontal (de nível) v , que contém a base superior, pelo seu traço frontal. Em seguida, desenharam-se as projecções do eixo do sólido, que tem extremos em Q e Q' , e das duas bases. As geratrizes são paralelas ao eixo, em ambas as projecções. Em **projectação frontal**, as bases são invisíveis (estão contidas em planos projectantes frontais) e parte da superfície lateral do sólido é invisível – as **geratrizes do contorno aparente frontal** são a geratriz que contém os pontos mais à esquerda das duas bases e a geratriz que contém os pontos mais à direita das duas bases (ver exercício 589). A projecção frontal do sólido resulta, nesta situação, num paralelogramo, cujas bases são as projecções frontais das duas bases do cilindro e cujos lados são as projecções frontais das geratrizes do contorno aparente frontal. Sublinha-se que, nesta situação (um cilindro oblíquo), as geratrizes do contorno aparente frontal **não estão contidas** em **rectas projectantes**, ao contrário do que se observou nas situações anteriores (cilindros de revolução). Note que **não se representa a projecção horizontal das geratrizes do contorno aparente frontal**, por estas não se distinguirem das restantes geratrizes, em projecção horizontal. Em **projectação horizontal**, a determinação das **geratrizes do contorno aparente horizontal** processa-se através do traçado das rectas tangentes a uma circunferência (as bases do cilindro) que são paralelas a uma recta dada (são paralelas à projecção horizontal do eixo do cilindro). As **geratrizes do contorno aparente horizontal** (que são tangentes às duas bases em projecção horizontal) separam a parte visível da superfície lateral do sólido, em projecção horizontal, daquela que é invisível. A base superior é visível e a base inferior é invisível – note a representação da invisibilidade da circunferência que delimita a base inferior. O **contorno aparente horizontal** do sólido é uma **linha mista**. Note que **não se representa a projecção frontal das geratrizes do contorno aparente horizontal**, por estas não se distinguirem das restantes geratrizes, em projecção frontal.



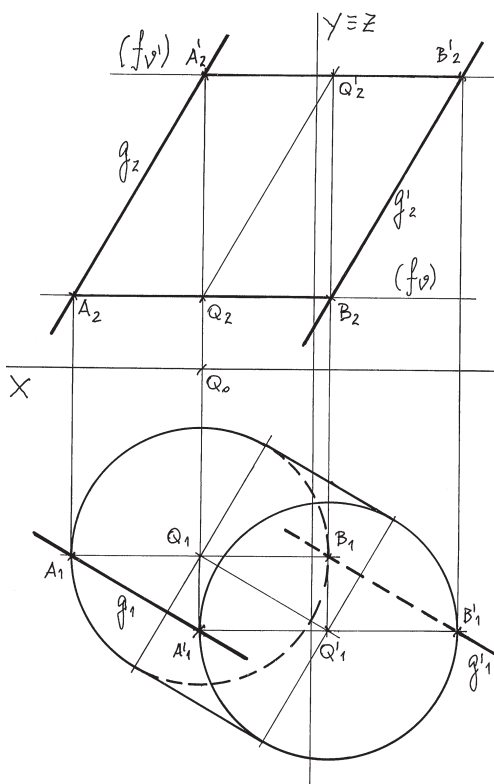
601.

Sobre a determinação das projecções do sólido, ver exercício anterior. Note que, apesar de **não se representarem as projecções horizontais das geratrizes do contorno aparente frontal** (por estas não se distinguirem das restantes geratrizes, em projecção horizontal), neste exercício **é expressamente pedida** a representação das **duas projecções** destas geratrizes, atendendo às respectivas invisibilidades relativas ao sólido. As geratrizes do contorno aparente frontal são as geratrizes ***g*** (definida pelos pontos **A** e **A'**, os pontos de maior abscissa da base) e ***g'*** (definida pelos pontos **B** e **B'**, os pontos de menor abscissa da base). A partir das projecções dos pontos **A**, **A'**, **B** e **B'**, desenharam-se as duas projecções das geratrizes ***g*** e ***g'***, atendendo-se a que a geratriz ***g'*** se situa na parte invisível, em projecção horizontal, da superfície lateral do cilindro.



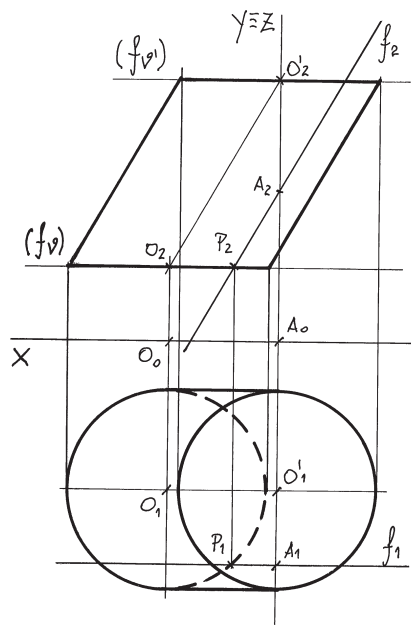
602.

Em primeiro lugar, representou-se o ponto **Q**, pelas suas projecções, bem como o plano frontal (de frente) φ , que contém a base de menor afastamento, pelo seu traço horizontal. Em seguida, desenharam-se as projecções do eixo do sólido, em função dos ângulos dados, e representou-se o plano φ' , o plano que contém a base de maior afastamento do sólido – o plano φ' tem 7 cm de afastamento, pois o plano φ (o plano da base de menor afastamento) tem 2 cm de afastamento e o sólido tem 5 cm de altura ($2+5=7$). O ponto **Q'** é o centro da base de maior afastamento do sólido e é o ponto de intersecção da recta suporte do eixo com o plano φ' . Em seguida, desenharam-se as projecções das duas bases. As geratrizes são paralelas ao eixo, em ambas as projecções. Em **projectão frontal**, as bases são invisíveis (estão contidas em planos projectantes frontais) e parte da superfície lateral do sólido é invisível – as **geratrizes do contorno aparente frontal** são a geratriz que contém os pontos mais à esquerda das duas bases e a geratriz que contém os pontos mais à direita das duas bases (ver exercício 590). A projecção frontal do sólido resulta num paralelogramo. Sublinha-se que, nesta situação (um cilindro oblíquo), as geratrizes do contorno aparente frontal **não estão contidas em rectas projectantes**, ao contrário dos cilindros de revolução. Note que **não se representa a projecção horizontal das geratrizes do contorno aparente frontal**, por estas não se distinguirem das restantes geratrizes, em projecção horizontal. Em **projectão horizontal**, a determinação das **geratrizes do contorno aparente horizontal** processa-se através do traçado das rectas tangentes a uma circunferência (as bases do cilindro) que são paralelas a uma recta dada (são paralelas à projecção horizontal do eixo do cilindro). As **geratrizes do contorno aparente horizontal** (que são tangentes às duas bases em projecção horizontal) separam a parte visível da superfície lateral do sólido, em projecção horizontal, daquela que é invisível. A base de maior cota é visível e a base de menor cota é invisível – note a representação da invisibilidade da circunferência que delimita a base de menor cota. O **contorno aparente horizontal** do sólido é uma **linha mista**. Note que, apesar de **não se representarem as projecções horizontais das geratrizes do contorno aparente frontal** (por estas não se distinguirem das restantes geratrizes, em projecção horizontal), neste exercício **é expressamente pedida** a representação das **duas projecções** destas geratrizes, atendendo às respectivas invisibilidades relativas ao sólido. As geratrizes do contorno aparente frontal são as geratrizes ***g*** (definida pelos pontos **A** e **A'**, os pontos de maior abscissa das duas bases) e ***g'*** (definida pelos pontos **B** e **B'**, os pontos de menor abscissa das duas bases). A partir das projecções dos pontos **A**, **A'**, **B** e **B'** desenharam-se as duas projecções das geratrizes ***g*** e ***g'***, atendendo-se a que a geratriz ***g'*** se situa na parte invisível, em projecção horizontal, da superfície lateral do cilindro.

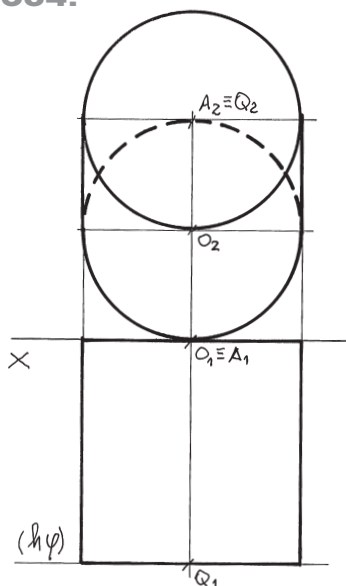


603.

Em primeiro lugar, representaram-se, pelas suas projecções, o ponto O e recta f , em função dos dados. Em seguida, representaram-se os planos horizontais (de nível) que contêm as duas bases – o plano v , que passa por O , e o plano v' , que tem 7 cm de cota ($2 + 5 = 7$, sendo 5 a altura do cilindro e 2 a cota do plano da base inferior). Por O conduziu-se a recta suporte do eixo do cilindro (que é paralela à recta f , que contém uma geratriz do sólido) e determinou-se o ponto O' , que é o ponto de intersecção do plano v' (o plano da base superior) com a recta suporte do eixo do sólido. Note que não é dado o raio das bases. Uma vez que a recta f contém uma geratriz do sólido, existe um ponto da recta f que pertence à base inferior – o ponto P , que é o ponto de intersecção da recta f com o plano v . Note que existe, também, um ponto da recta f que pertence à base superior, mas que não se determinou por não ser necessário. O raio das bases é, assim, OP – fazendo centro em O_1 e raio até P_1 desenhou-se a projecção horizontal da base inferior e, com o mesmo raio e centro em O'_1 , desenhou-se a projecção horizontal da base superior. A partir das projecções das duas bases do sólido e da direcção das geratrizes, desenharam-se as projecções do sólido, conforme exposto no relatório do exercício 600.



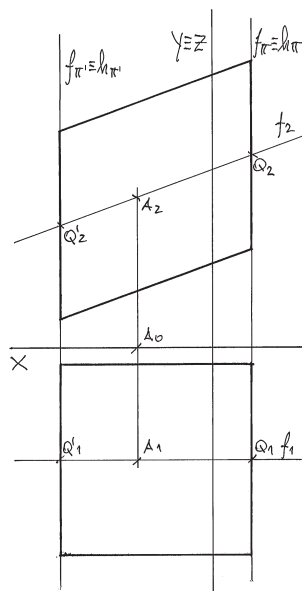
604.



O ponto O , o centro da base de menor afastamento, tem 3 cm de cota, pois a base é tangente ao Plano Horizontal de Projecção e tem 3 cm de raio – representaram-se as projecções de O e desenharam-se as projecções da base de menor afastamento do sólido. Em seguida representou-se o plano φ , o plano frontal (de frente) que contém a base de maior afastamento do sólido. O ponto A é o ponto de maior cota da base de menor afastamento do cilindro. O centro da base de maior afastamento é o ponto $Q - Q_2 \equiv A_2$, pois situam-se na mesma projectante frontal. Q_1 está necessariamente sobre (h_φ) , pois φ é projectante horizontal. O eixo do cilindro é de perfil, pois O e Q têm a mesma abcissa – as geratrizes do sólido são igualmente de perfil. A partir destes dados, desenharam-se as projecções do sólido, atendendo-se às invisibilidades observadas (a base de menor afastamento é invisível).

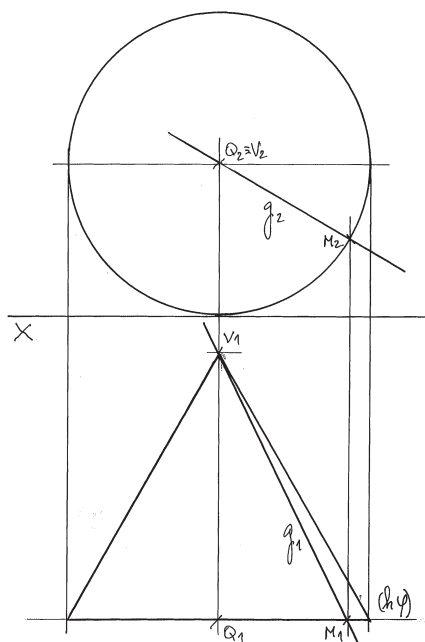
605.

Em primeiro lugar, desenharam-se as projecções da recta f , de acordo com os dados, e representou-se o plano π , o plano de perfil que contém a base mais à direita do cilindro. O plano π' é o plano de perfil que contém a base mais à esquerda do sólido e tem 4 cm de abcissa, pois a altura do sólido é 5. Em seguida, determinaram-se os pontos Q e Q' , os pontos de intersecção da recta f (a recta suporte do eixo do sólido) com os planos π e π' , respectivamente – Q e Q' são, respectivamente, o centro da base de menor abcissa e o centro da base de maior abcissa do cilindro. As projecções das duas bases determinaram-se imediatamente, a partir das quais se construíram as duas projecções do sólido (ver exercício 592). Em **projecção frontal**, as bases são invisíveis (estão contidas em planos projectantes frontais) e parte da superfície lateral do sólido é invisível – as **geratrizes do contorno aparente frontal** são a geratriz que contém os pontos de maior cota das bases e a geratriz que contém os pontos de menor cota das bases. A projecção frontal do cilindro reduz-se a um paralelogramo. Em **projecção horizontal**, as bases são invisíveis (estão contidas em planos projectantes horizontais) e parte da superfície lateral do sólido é invisível – as **geratrizes do contorno aparente horizontal** são a geratriz que contém os pontos de menor afastamento das bases e a geratriz que contém os pontos de maior afastamento das bases. Nesta situação, e em virtude de as geratrizes estarem contidas em rectas frontais (de frente), cujas projecções horizontais são perpendiculares aos traços horizontais dos planos de perfil, a projecção horizontal do cilindro é um rectângulo (que também é um paralelogramo).

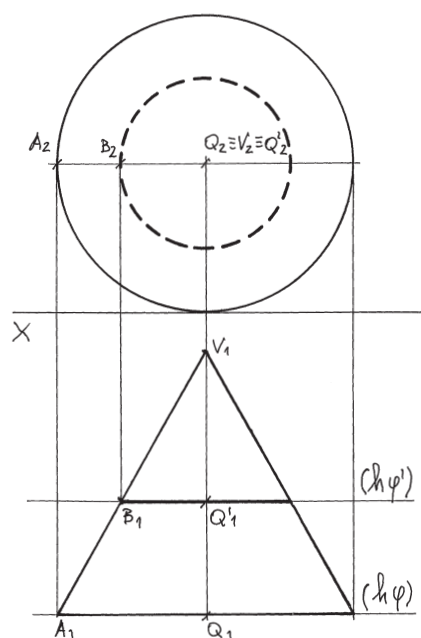


606.

Desenharam-se as projecções do cone em função dos dados (ver exercício 585). Um geratriz é uma recta e, para definir uma recta, são necessários dois pontos ou um ponto e uma direcção. Em primeiro lugar, desenhou-se g_2 , a projecção frontal da geratriz pretendida, em função do ângulo, passando por V_2 , e, ainda em projecção frontal, determinou-se o ponto M , o ponto da geratriz que pertence à base do cone. Note que o ponto M é invisível em projecção horizontal (que é expressamente pedido), pois situa-se na parte invisível, em projecção horizontal, da superfície lateral do sólido (a parte que se situa para baixo das geratrizes do contorno aparente horizontal). A partir de M_2 determinou-se M_1 , sobre a projecção horizontal da base do cone, e definiu-se a geratriz g , que está definida por dois pontos – V e M .



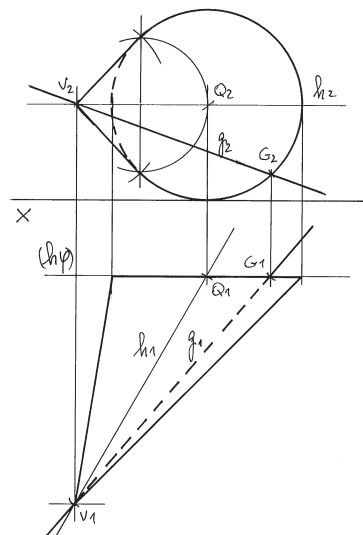
607.



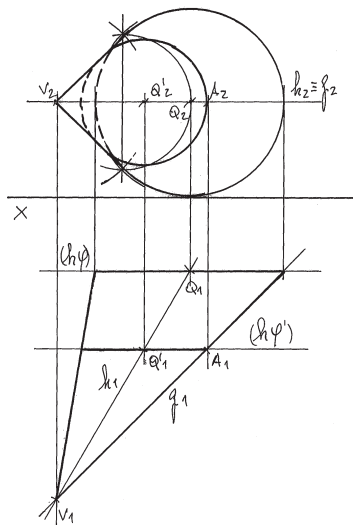
Desenharam-se as projecções do cone em função dos dados (ver exercício 585). O lugar geométrico dos pontos da superfície lateral do sólido que têm 4 cm de afastamento é a figura geométrica resultante da intersecção de um plano frontal (de frente) com 4 cm de afastamento com a superfície cônica que delimita o sólido – é uma **circunferência** que está contida na superfície lateral do sólido. Assim, em primeiro lugar, conduziu-se o plano φ' , o plano frontal (de frente) com 4 cm de afastamento e determinou-se o ponto Q' , o ponto de intersecção do plano φ' com o eixo do cone – Q' é o centro da circunferência (o lugar geométrico pedido). Para desenhar uma circunferência necessitamos do seu centro e do seu raio. Já temos o centro – falta-nos o raio. Este é dado pelo ponto de intersecção do plano φ' com uma qualquer geratriz do sólido. Optou-se por se recorrer à geratriz mais à esquerda do contorno aparente horizontal – a geratriz $[AV]$. O plano φ' corta a geratriz $[AV]$ no ponto B – o raio da circunferência pretendida é $Q'B$. A partir do centro e do raio, desenharam-se as projecções da circunferência pedida – a sua projecção horizontal reduz-se a um segmento de recta (o plano φ' é projectante horizontal) e a sua projecção frontal está em V.G. (é paralela ao Plano Frontal de Projecção). Note que a circunferência se situa na parte invisível (em projecção frontal) da superfície lateral do sólido pelo que, em projecção frontal, a circunferência é invisível na sua totalidade.

608.

Em primeiro lugar desenharam-se as projecções da recta h , em função dos dados, e representou-se o plano φ , o plano frontal (de frente) que contém a base do sólido. O ponto Q é o centro da base e é o ponto de intersecção da recta h (a recta suporte do eixo) com o plano φ . V , o vértice do cone, é o ponto da recta h que tem 8 cm de afastamento ($2+6=8$, sendo 2 o afastamento do plano φ e 6 a altura do cone). A base tem 3 cm de raio, pois é tangente ao Plano Horizontal de Projectão. A partir das projecções do cone, determinaram-se as projecções da geratriz g , conforme exposto no relatório do exercício 606. O ponto G é o ponto da geratriz que pertence à base. A partir da projecção frontal da geratriz, deparamo-nos com duas hipóteses de localização do ponto G – a hipótese escolhida é aquela que torna a geratriz visível em projecção frontal. O segmento $[GV]$ da geratriz é invisível em projecção horizontal, pois a geratriz situa-se na parte da superfície lateral do cone que é invisível em projecção horizontal (situa-se abaixo das geratrizes do contorno aparente horizontal).



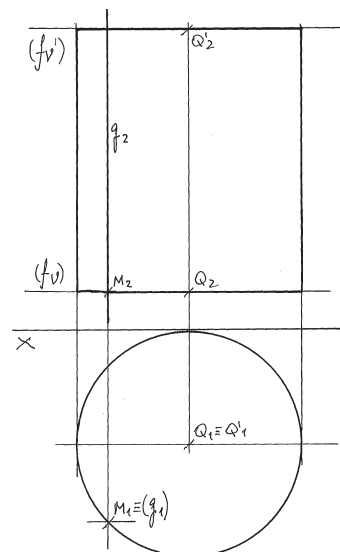
609.



Sobre a construção das projecções do cone, ver relatório do exercício anterior. O lugar geométrico dos pontos da superfície lateral do cone que têm 4 cm de afastamento é **uma circunferência contida na superfície lateral do sólido** – é a figura geométrica resultante da intersecção da superfície lateral do cone com um plano frontal (de frente) com 4 cm de afastamento (ver exercício 607). O plano φ' é o plano frontal (de frente) com 4 cm de afastamento. Q' é o centro da circunferência pedida – é o ponto de intersecção do plano φ' com o eixo do cone. O raio da circunferência pedida é $Q'A$, sendo A o ponto de intersecção do plano φ' com a geratriz mais à direita do contorno aparente horizontal (a geratriz g). Note que a circunferência pedida (o lugar geométrico pretendido) é **necessariamente** tangente às geratrizes do contorno aparente frontal – os pontos de tangência definem, precisamente, as invisibilidades **em projecção frontal** da circunferência pedida. Note que é visível a parte da circunferência que se situa na parte visível da superfície lateral do cone e que é invisível a parte da circunferência que se situa na parte invisível da superfície lateral do cone.

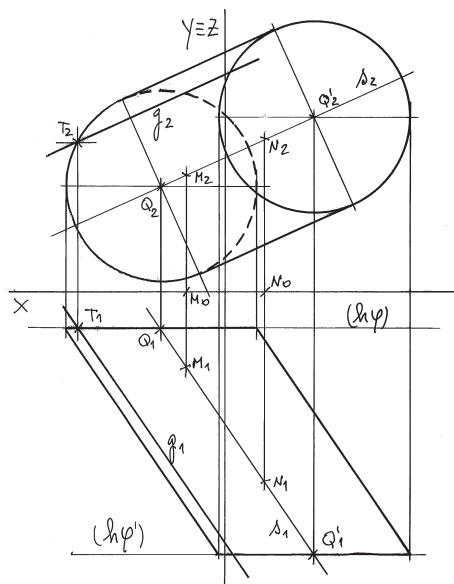
610.

Desenharam-se as projecções do cilindro, de acordo com os dados (ver exercício 589), e determinaram-se as projecções do ponto M . As geratrizes do cilindro são verticais, pelo que a geratriz g é uma recta vertical que passa por M .



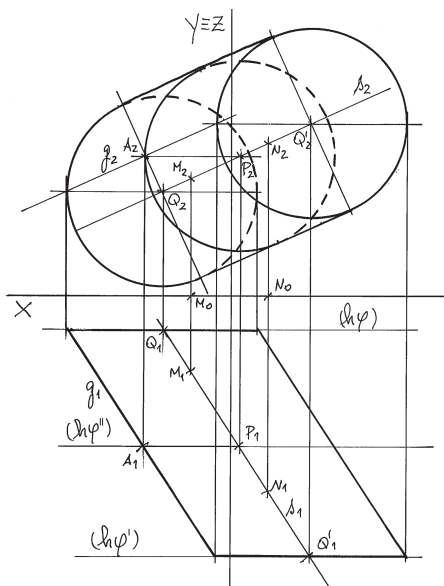
611.

Desenharam-se as projecções da recta s , em função dos dados, e representaram-se os planos φ e φ' , os planos frontais (de frente) que contêm a base de menor afastamento e a base de maior afastamento, respectivamente. O plano φ' tem 7 cm de afastamento ($1+6=7$, sendo 1 o afastamento do plano da outra base e 6 a altura do sólido). Em seguida, determinaram-se os pontos de intersecção da recta s com os planos φ e φ' – Q e Q' , respectivamente. Q e Q' são, respectivamente, o centro da base de menor afastamento e o centro da base de maior afastamento do cilindro. A partir das projecções de Q e Q' e do raio das bases, desenharam-se as projecções do sólido, de acordo com o exposto no relatório do exercício 602. Em seguida, determinaram-se as projecções do ponto T , com 4 cm de cota. Repare que existem duas hipóteses para a localização do ponto T – uma com maior abcissa e outra com menor abcissa. Das duas hipóteses, a de menor abcissa implicaria que a geratriz g fosse invisível em projecção frontal, pelo que a única hipótese que responde ao pretendido é a de maior abcissa. Pelas projecções de T conduziram-se as projecções homónimas da geratriz g , paralela ao eixo do sólido (e às restantes geratrizes da superfície lateral do cilindro). Note que g (que é uma recta) está definida por um ponto e uma direcção.



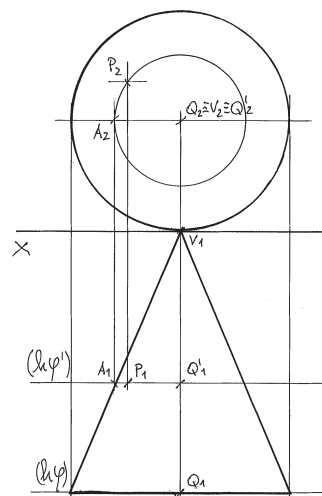
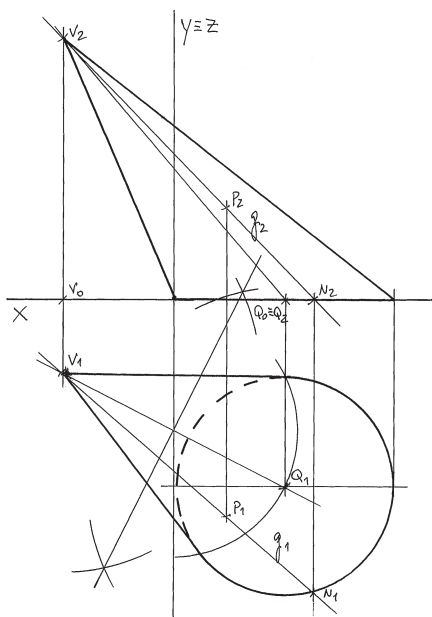
612.

Em primeiro lugar, desenharam-se as projecções do cilindro, conforme exposto no relatório do exercício anterior. O lugar geométrico dos pontos da superfície lateral do cilindro com 4 cm de afastamento é **uma circunferência contida na superfície lateral do sólido** – é a figura geométrica resultante da intersecção de um plano frontal (de frente) com a superfície lateral do cilindro. Assim, em primeiro lugar, conduziu-se o plano φ'' , o plano frontal (de frente) com 4 cm de afastamento e determinou-se o ponto P , o ponto de intersecção do plano φ'' com o eixo do cilindro – P é o centro da circunferência pedida (o lugar geométrico pedido). Para desenhar uma circunferência necessitamos do seu centro e do seu raio. Já temos o centro – falta-nos o raio. Este é dado pelo ponto de intersecção do plano φ'' com uma qualquer geratriz do sólido. Optou-se por se recorrer à geratriz mais à esquerda do contorno aparente horizontal – a geratriz g . O plano φ'' corta a geratriz g no ponto A – o raio da circunferência pretendida é PA . Note que PA é igual ao raio das circunferências das duas bases. A partir do centro e do raio, desenharam-se as projecções da circunferência pedida – a sua projecção horizontal reduz-se a um segmento de recta (o plano φ'' é projectante horizontal) e a sua projecção frontal está em V.G. (é paralela ao Plano Frontal de Projecção). Note que a circunferência pedida (o lugar geométrico pretendido) é **necessariamente** tangente às geratrizes do contorno aparente frontal – os pontos de tangência definem, precisamente, as invisibilidades **em projecção frontal** da circunferência pedida. Note que é visível a parte da circunferência que se situa na parte visível da superfície lateral do cilindro e que é invisível a parte da circunferência que se situa na parte invisível da superfície lateral do cilindro.



613. Relatório

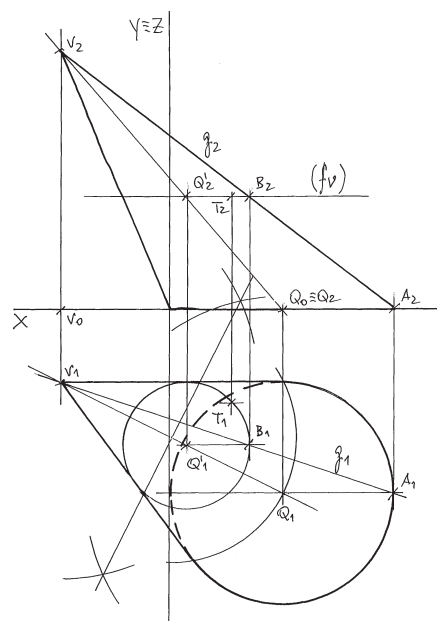
Desenharam-se as projecções do cone, em função dos dados (ver exercício 585). Em seguida, atendendo a que as coordenadas de **P** são (4; 4) e que a base do sólido **está contida num plano frontal** (de frente), determinou-se o lugar geométrico dos pontos da superfície do cone que têm 4 cm de afastamento (o afastamento de **P**) – ver exercício 607. Esse lugar geométrico é uma circunferência contida na superfície lateral do cone. O ponto **P** é o ponto dessa circunferência que tiver 4 cm de cota. Existem duas hipóteses, sendo que o enunciado refere expressamente a situação pretendida – **P** é o ponto que tiver maior abscissa, ou seja, o ponto que se situa mais à esquerda.

Resolução**614.**

Em primeiro lugar, desenharam-se as projecções do cone, em função dos dados (ver exercício 593). Em seguida, e uma vez que se pede **um ponto qualquer** da superfície (desde que não integre os contornos aparentes do sólido), para tal é suficiente representar uma geratriz qualquer da superfície lateral do cone, na qual se possa situar o ponto **P**. A geratriz **g**, definida por **N** (um ponto qualquer da base) e por **V**, é uma geratriz da superfície lateral do cone e não integra nenhum dos contornos aparentes. Todos os pontos da geratriz **g** que se situem entre **N** e **V** pertencem à superfície lateral do sólido, pelo que **P** pode ser um ponto qualquer do segmento **[NV]** da geratriz (**P** não poderia ser **N** nem **V**, pois estes dois pontos integram os contornos aparentes do sólido).

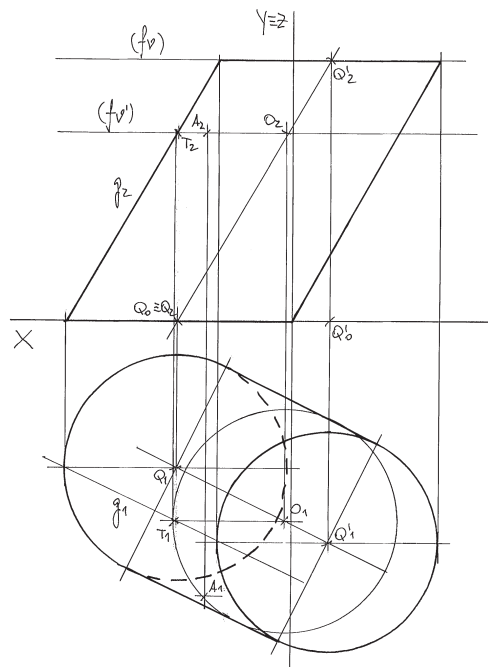
615.

Desenharam-se as projecções do cone, em função dos dados (ver exercício 593). Em seguida, uma vez que a base do cone **está contida num plano horizontal** (de nível) e que as coordenadas do ponto **T** são (2,5; 3), determinou-se o lugar geométrico dos pontos da superfície do cone que têm 3 cm de cota (a cota de **P**) – ver exercício 607. Esse lugar geométrico é uma circunferência contida na superfície lateral do cone – tem centro no ponto **Q'** e raio **Q'B**. **Q'** e **B** são os pontos de intersecção do plano v (o plano horizontal que tem 3 cm de cota) com, respectivamente, o eixo do cone e a geratriz **g**, a geratriz mais à direita do contorno aparente frontal do cone. O ponto **T** é o ponto dessa circunferência que tiver 2,5 cm de afastamento e, das duas hipóteses, é a hipótese mais à direita. Note que, caso **T** fosse a hipótese mais à esquerda, seria invisível em projecção horizontal, e é expressamente pedido no enunciado que o ponto **T** seja **visível** em projecção horizontal.

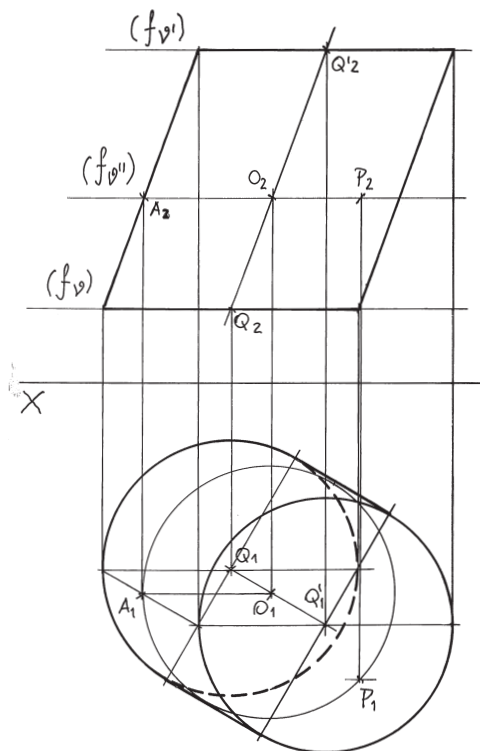


616.

Desenharam-se as projecções do cilindro, de acordo com os dados (ver relatório do exercício 600). Em seguida, uma vez que as bases do cilindro **estão contidas em planos horizontais** (de nível) e que as coordenadas do ponto **A** são (7,5; 5), determinou-se o lugar geométrico dos pontos da superfície do cilindro que têm 5 cm de cota (a cota de **A**) – ver exercício 612. Esse lugar geométrico é uma circunferência contida na superfície lateral do cilindro – tem centro no ponto **O** e raio **OT**. **O** e **T** são os pontos de intersecção do plano v (o plano horizontal que tem 5 cm de cota) com, respectivamente, o eixo do cilindro e a geratriz **g**, a geratriz mais à esquerda do contorno aparente frontal do cilindro. O ponto **A** é o ponto dessa circunferência que tiver 7,5 cm de afastamento e, das duas hipóteses, é a hipótese mais à esquerda. Note que, caso o ponto **A** fosse a hipótese mais à direita, seria invisível em projecção horizontal, e é expressamente pedido no enunciado que o ponto **A** seja **visível** em ambas as projecções.

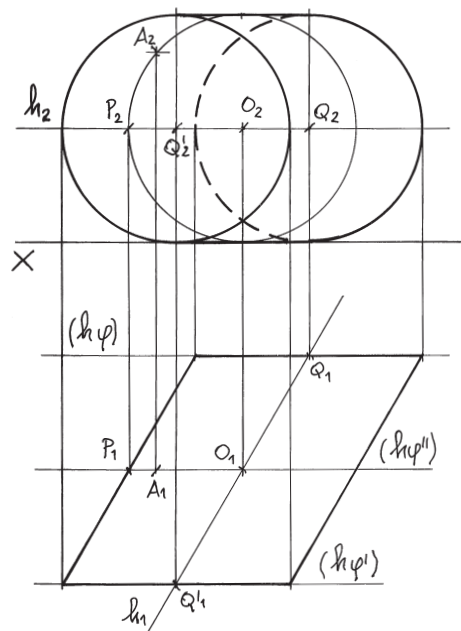
**617.**

Desenharam-se as projecções do cilindro, de acordo com os dados (ver exercício 601). Sobre a determinação das projecções do ponto **P**, ver exercício anterior. A circunferência com centro em **O** e raio **OA** é o lugar geométrico dos pontos da superfície lateral do sólido que têm 5 cm de cota. **O** e **A** são os pontos de intersecção do plano v'' (o plano horizontal que tem 5 cm de cota) com, respectivamente, o eixo do cilindro e a geratriz mais à esquerda do contorno aparente frontal do sólido. O ponto **P** é o ponto dessa circunferência que tem 8 cm de afastamento e é invisível em projecção horizontal.

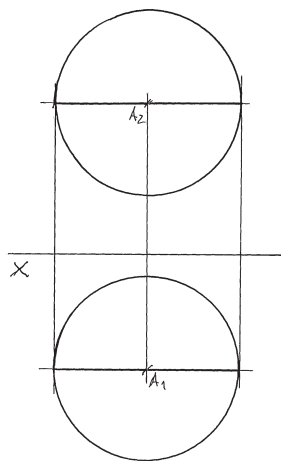


618.

Em primeiro lugar, desenharam-se as projecções da recta h , em função dos dados, e representou-se o plano φ , o plano frontal (de frente) que contém a base de menor afastamento do sólido. O ponto Q é o centro dessa base e é o ponto de intersecção da recta h (a recta suporte do eixo) com o plano φ . O eixo do cilindro mede 7 cm e projecta-se em V.G. no Plano Horizontal de Projecção, pelo que, a partir de Q_1 , sobre h_1 , mediram-se os 7 cm, obtendo-se Q'_1 (note que Q' tem de ter afastamento superior a Q). A partir das projecções de Q' , conduziu-se o plano φ' , o plano frontal (de frente) que contém a base de maior afastamento do sólido, e desenharam-se as projecções do cilindro, que tem 3 cm de raio (é tangente ao Plano Horizontal de Projecção). Em seguida, uma vez que as bases do cilindro **estão contidas em planos frontais** (de frente) e que as coordenadas do ponto A são (6; 5), determinou-se o lugar geométrico dos pontos da superfície do cilindro que têm 6 cm de afastamento (o afastamento de A) – ver exercício 612. Esse lugar geométrico é uma circunferência contida na superfície lateral do cilindro – tem centro no ponto O e raio OP . O e P são os pontos de intersecção do plano φ'' (o plano frontal que tem 6 cm de afastamento) com, respectivamente, o eixo do cilindro e a geratriz mais à esquerda do contorno aparente horizontal do sólido. O ponto A é o ponto dessa circunferência que tiver 5 cm de cota e que é invisível em projecção frontal.



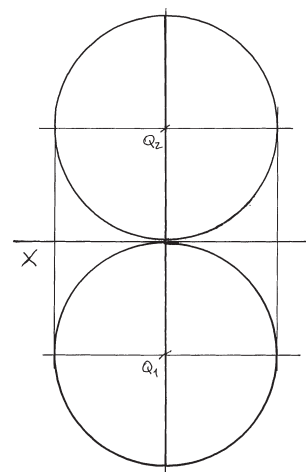
619.



Em primeiro lugar, representou-se o ponto A , o centro da esfera, pelas suas projecções. As duas projecções da esfera são circunferências com 2,5 cm de raio e centros nas projecções homónimas do centro da esfera. A projecção horizontal da esfera é a projecção horizontal do seu **círculo máximo horizontal**, cuja projecção frontal se reduz a um segmento de recta (coincide com a projecção frontal do diâmetro fronto-horizontal da esfera). A projecção frontal da esfera é a projecção frontal do seu **círculo máximo frontal**, cuja projecção horizontal se reduz a um segmento de recta (coincide com a projecção horizontal do diâmetro fronto-horizontal da esfera). Note que o **círculo máximo horizontal** da esfera é o próprio **contorno aparente horizontal** da esfera e que o **círculo máximo frontal** da esfera é o próprio **contorno aparente frontal** da esfera.

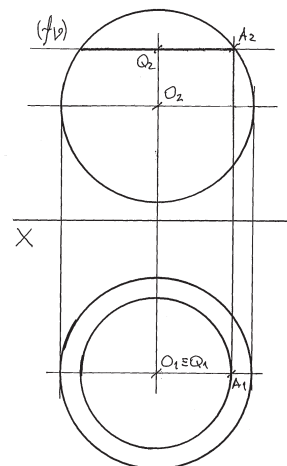
620.

A esfera é tangente aos dois planos de projecção, pelo que o seu centro tem cota e afastamento iguais ao raio da esfera – o centro da esfera é o ponto Q , cujas coordenadas são (3; 3). Desenharam-se as projecções da esfera (ver exercício anterior). A **projecção horizontal** do seu **círculo máximo de perfil** reduz-se a um segmento de recta (coincide com a projecção horizontal do diâmetro de topo da esfera). A **projecção frontal** do **círculo máximo de perfil** da esfera reduz-se a outro segmento de recta (coincide com a projecção frontal do diâmetro vertical da esfera).



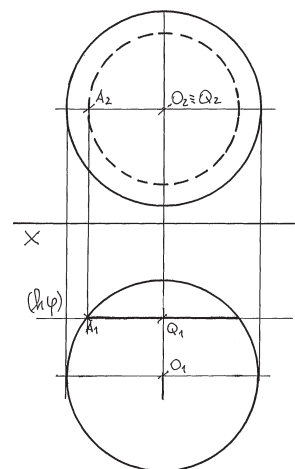
621.

Desenharam-se as projecções da esfera, em função dos dados (ver exercício 619). O lugar geométrico dos pontos da superfície esférica com 4,5 cm de cota é **uma circunferência contida na superfície esférica** – é a figura geométrica resultante da intersecção da superfície esférica com um plano horizontal (de nível) com 4,5 cm de cota. Essa circunferência tem centro no ponto **Q** e raio **QA**. **Q** e **A** são os pontos de intersecção do plano ν (o plano horizontal com 4,5 cm de cota) com, respectivamente, o diâmetro vertical da esfera e o círculo máximo frontal da esfera (que é o seu contorno aparente frontal). A circunferência pedida projecta-se em V.G. no Plano Horizontal de Projecção e a sua projecção frontal reduz-se a um segmento de recta (o plano ν é projectante frontal).

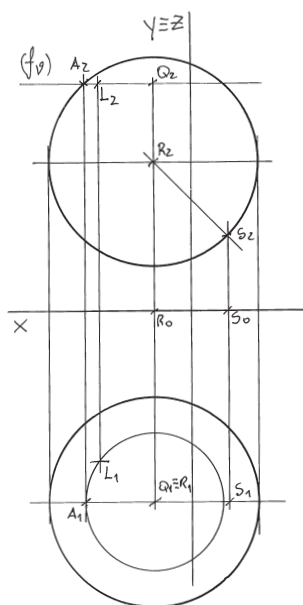


622.

Desenharam-se as projecções da esfera, em função dos dados (ver exercício 619). O lugar geométrico dos pontos da superfície esférica com 2,5 cm de afastamento é **uma circunferência contida na superfície esférica** – é a figura geométrica resultante da intersecção da superfície esférica com um plano frontal (de frente) com 2,5 cm de afastamento. Essa circunferência tem centro no ponto **Q** e raio **QA**. **Q** e **A** são os pontos de intersecção do plano ϕ (o plano frontal com 2,5 cm de afastamento) com, respectivamente, o diâmetro de topo da esfera e o círculo máximo horizontal da esfera (que é o seu contorno aparente horizontal). A circunferência pedida projecta-se em V.G. no Plano Frontal de Projecção e a sua projecção horizontal reduz-se a um segmento de recta (o plano ϕ é projectante horizontal). Note que a circunferência situa-se na parte da superfície que é invisível em projecção frontal, pelo que, em **projecção frontal**, a circunferência pedida é invisível na sua totalidade.



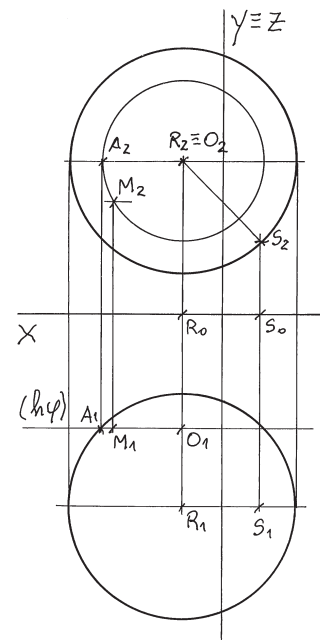
623.



Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **R** e **S**, pelas suas projecções. O segmento **[RS]** é frontal (de frente), pelo que se projecta em V.G. no Plano Frontal de Projecção – uma vez que **R** é o centro da esfera e que **S** é um ponto da superfície esférica, o raio da esfera é **RS**. Assim, com centro em **R2** e raio até **S2**, desenhou-se a projecção frontal da esfera e, em seguida, com o mesmo raio e centro em **R1**, desenhou-se a projecção horizontal da esfera. Para determinar as projecções do ponto **L**, é necessário determinar, previamente, o lugar geométrico dos pontos da superfície esférica que têm 4 cm de afastamento ou o lugar geométrico dos pontos da superfície esférica que têm 6 cm de cota. Optou-se pela segunda hipótese. O plano ν , horizontal (de nível) com 6 cm de cota, permitiu-nos determinar o lugar geométrico dos pontos da superfície esférica que têm 6 cm de cota – o ponto **L** é, desses pontos, aquele que tem 4 cm de afastamento e se situa mais à esquerda (o de maior abscissa). O ponto **L** é **visível** em projecção horizontal (situa-se na semi-esfera de maior cota) e **invisível** em projecção frontal (situa-se na semi-esfera de menor afastamento).

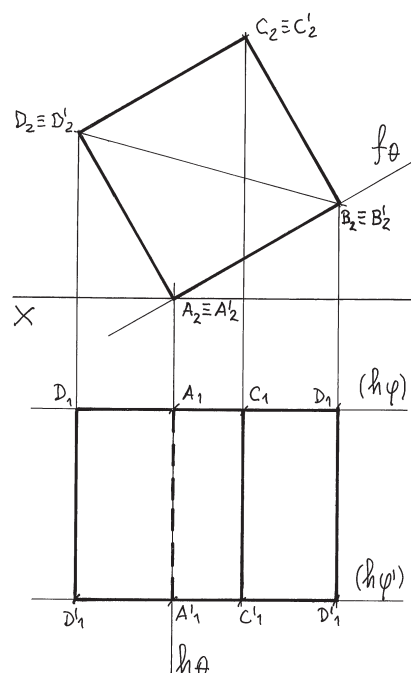
624.

Ver relatório do exercício anterior. Para obter as projecções do ponto **M** optou-se, neste caso, por determinar previamente o lugar geométrico dos pontos da superfície esférica que têm 3 cm de afastamento. O ponto **M** é **invisível** em ambas as projecções (situa-se na semi-esfera de menor cota e, simultaneamente, na semi-esfera de menor afastamento).



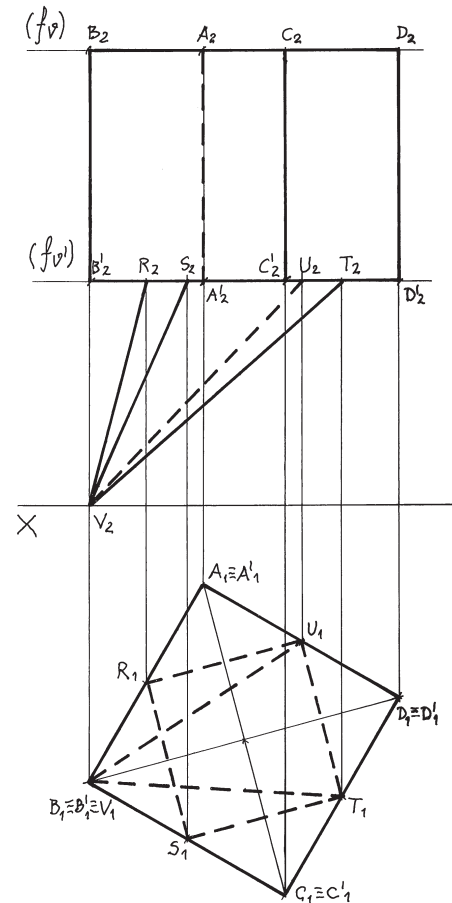
625.

Em primeiro lugar, representou-se, pelos seus traços, o plano θ , o plano projectante frontal (de topo) que contém uma das faces do cubo. Uma das arestas dessa face situa-se no Plano Horizontal de Projecção, pelo que tem **necessariamente** de pertencer ao traço horizontal de θ . Em seguida, representou-se o plano φ , o plano frontal (de frente) com 3 cm de afastamento que contém uma das faces do cubo – uma vez que as faces de um cubo são paralelas entre si duas a duas, existe uma outra face contida noutro plano frontal (de frente). O plano φ' é o plano frontal (de frente) que contém outra face do cubo e situa-se a 5 cm do plano φ (a medida da aresta do cubo, pois a aresta do sólido que está contida em h_θ é de topo e está em V.G. em projecção horizontal). As faces que estão contidas nos planos frontais projectam-se em V.G. no Plano Frontal de Projecção, o que nos permitiu construir o quadrado que é a projecção frontal do sólido. A partir desta, construiu-se a projecção horizontal do cubo, respeitando as invisibilidades observadas.

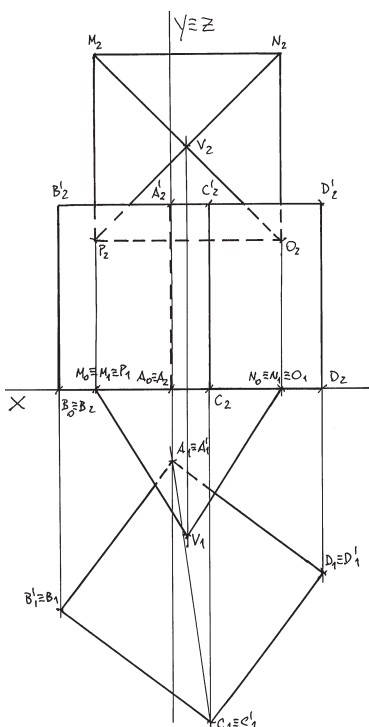


626.

Em primeiro lugar, representaram-se os planos v e v' , os planos horizontais (de nível) que contêm duas faces do cubo – o plano v contém a face superior do sólido e o plano v' a sua face inferior. As arestas do sólido que não estão contidas nos planos horizontais (de nível) são **necessariamente** verticais – uma delas, a de menor afastamento (a aresta $[AA']$), tem 2 cm de afastamento (dado no enunciado). A partir da projecção horizontal da aresta $[AA']$ construiu-se a projecção horizontal do cubo (que é um quadrado), em função dos dados. Note que as faces horizontais do cubo se projectam em V.G. no Plano Horizontal de Projecção, o que nos permitiu concluir a construção da projecção horizontal do sólido, a partir da qual se obteve a sua projecção frontal. O quadrado $[ABCD]$ é a face superior do cubo e o quadrado $[A'B'C'D']$ a sua face inferior. Em seguida, processou-se à determinação dos pontos médios das arestas da face inferior do cubo – determinou-se o ponto de intersecção das diagonais do quadrado e, por este, conduziram-se paralelas aos lados do quadrado, que nos permitiram determinar os vértices do quadrado $[RSTU]$ (a base da pirâmide) e as suas projecções. O vértice da pirâmide situa-se na mesma projectante horizontal da aresta de maior abscissa do cubo, ou seja, da aresta $[BB']$ – tem-se $V_1 \equiv B_1 \equiv B'_1$. V_2 situa-se no eixo X , pois V tem cota nula. A partir das projecções de todos os vértices da pirâmide desenharam-se as projecções do sólido. Note que, em projecção horizontal, a pirâmide é totalmente invisível, pois está oculta (“tapada”) pelo cubo, que tem maior cota.



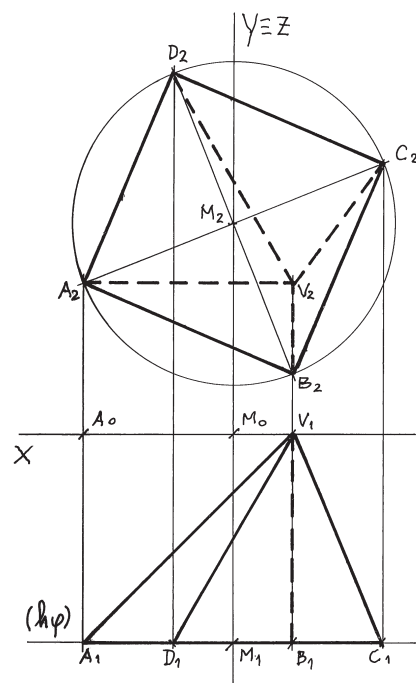
627.



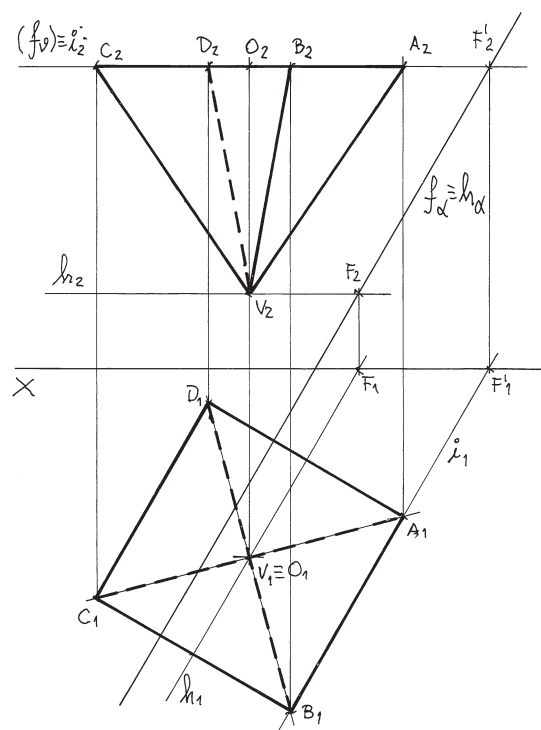
Desenharam-se as projecções do cubo (ver exercício 571) e da pirâmide, em função dos dados. Ao nível das ocultações, observa-se que, **em projecção frontal**, o cubo oculta parcialmente a pirâmide (a pirâmide está atrás do cubo – tem menor afastamento) e que, **em projecção horizontal**, é a pirâmide quem oculta parcialmente o cubo (o cubo está por baixo da pirâmide – tem menor cota).

630.

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **M** e **A**, pelas suas projecções, bem como o plano frontal (de frente) com 5,5 cm de afastamento que os contém – o plano φ , que foi representado pelo seu traço horizontal. A circunferência circunscrita ao quadrado da base projecta-se em V.G. no Plano Frontal de Projecção e tem raio **MA**. Desenhou-se a projecção frontal da circunferência e construiu-se o quadrado em V.G., em projecção frontal. Atribuíram-se letras aos vértices da base, atendendo à ordem pretendida – **B** é o vértice de menor cota do sólido. A aresta lateral **[BV]** é de perfil, pelo que **B** e **V** têm a mesma abcissa. A aresta lateral **[AV]** é horizontal (de nível), pelo que **A** e **V** têm a mesma cota. Estes dois raciocínios permitiram-nos determinar a projecção frontal do vértice da pirâmide, bem como a sua projecção horizontal em seguida (**V** tem afastamento nulo). A partir das projecções de todos os vértices do sólido, desenharam-se as projecções do sólido, atendendo às invisibilidades (a base é visível em projecção frontal, por ter maior afastamento).



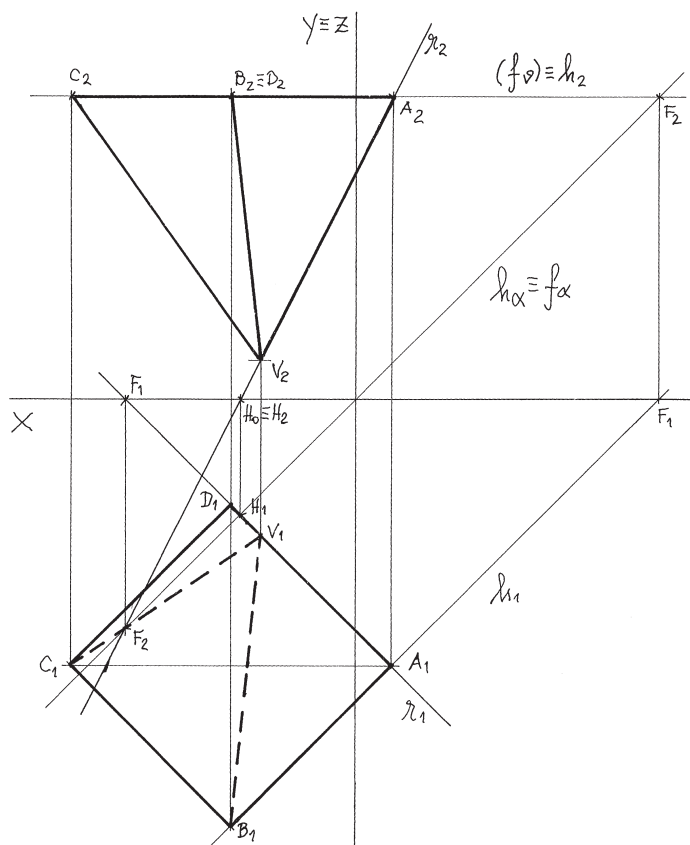
631.



Em primeiro lugar, representou-se o plano α pelos seus traços. A face **[ABV]** está contida no plano α , pelo que os pontos **A**, **B** e **V** pertencem ao plano α . Assim, determinaram-se as projecções do ponto **V**, pertencente ao plano – a recta **h** foi a recta a que recorreu para determinar as projecções do ponto **V**, pertencente a α (condição para que um ponto pertença a um plano). Em seguida, representou-se o plano v , o plano horizontal (de nível) com 8 cm de cota que contém a base da pirâmide. A pirâmide é regular, pelo que **O** e **V** se situam na mesma projectante horizontal (sendo **O** o centro da base) – as projecções de **O** determinam-se imediatamente (**O₁ = V₁** e **O₂** tem de estar sobre o traço frontal de v , pois v é projectante frontal). Os pontos **A** e **B** pertencem a α , pois pertencem à face **[ABV]** (que está contida em α) e pertencem a v , pois pertencem à base (que está contida em v) – os pontos **A** e **B** pertencem, assim, à recta de intersecção dos dois planos. A recta **i** é a recta de intersecção dos dois planos (é uma recta horizontal do plano α) e os pontos **A** e **B** têm de pertencer à recta **i**. O segmento **[AB]**, que é um lado do quadrado da base, é, assim, um segmento da recta **i**. Por **O₁** conduziram-se as projecções horizontais das diagonais do quadrado, que são concorrentes com a recta **i** em **A** e **B**. A partir das projecções de **A** e **B** construiu-se a projecção horizontal do quadrado **[ABCD]**, em V.G., e determinaram-se as projecções de todos os vértices da pirâmide, obtendo-se, dessa forma, as projecções do sólido.

632.

Em primeiro lugar, desenharam-se as projecções da recta r , de acordo com os dados. Em seguida, determinaram-se os traços do plano α , atendendo a que r é uma recta de maior declive do plano α – h_α passa por H_1 e é perpendicular a r_1 e f_α , por sua vez, é concorrente com h_α no eixo X e passa por F_2 . Tome nota que os traços do plano ficam **necessariamente** coincidentes. Em seguida, representou-se o plano v , o plano horizontal (de nível) com 8 cm de cota que contém a base da pirâmide. Uma vez que a aresta lateral $[AV]$ está contida na recta r , o ponto A é o ponto de intersecção do plano v com a recta r . O vértice V , da pirâmide, é o ponto da recta r que tem 1 cm de cota, pois a pirâmide tem 7 cm de altura e a base tem 8 cm de cota, sendo que o vértice tem cota inferior à base, para ser invisível em projecção horizontal ($8 - 7 = 1$). Os pontos A e B pertencem a α , pois pertencem à face $[ABV]$ (que está contida em α) e pertencem a v , pois pertencem à base (que está contida em v) – os pontos A e B pertencem, assim, à recta de intersecção dos dois planos. A recta h é a recta de intersecção dos dois planos (é uma recta horizontal do plano α) e passa pelo ponto A . O segmento $[AB]$, que é um lado do quadrado da base, é um segmento da recta h – o lado $[AB]$ projecta-se em V.G. no Plano Horizontal de Projecção, pelo que a partir de A_1 , sobre h_1 , mediram-se os 6 cm (o lado do quadrado), obtendo-se B_1 , com afastamento superior a A (B é o vértice de maior afastamento da pirâmide). A partir de A e B construiu-se o quadrado $[ABCD]$ da base, em V.G. em projecção horizontal, obtendo-se as projecções dos restantes vértices do sólido e as projecções da pirâmide.



9

PROCESSOS GEOMÉTRICOS AUXILIARES I

633.

A finalidade dos processos geométricos auxiliares é a obtenção de projecções mais favoráveis de um dado objecto, no decurso de um estudo sobre esse objecto. Esse estudo pode passar, por exemplo, pela resolução de problemas que envolvam verdadeiras grandezas em situações onde elas não existam.

634.

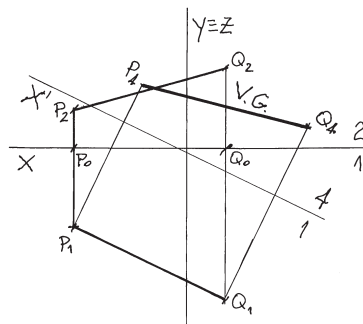
Os processos geométricos auxiliares são **três**: o processo da **mudança do diedro de projecção**, o processo da **rotação** e o processo do **rebatimento**.

635.

O processo da mudança do diedro de projecção consiste em, mantendo fixo o objecto, introduzir novos planos de projecção, substituindo os planos de projecção iniciais e criando, assim, novos diedros de projecção, nos quais o objecto fique numa posição mais favorável para o estudo em curso.

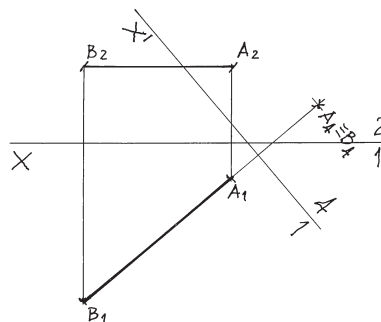
636.

Em primeiro lugar, desenharam-se as projecções do segmento, de acordo com os dados. Para transformar o segmento $[PQ]$ num segmento de recta frontal (de frente) com 3 cm de afastamento, é necessário substituir o Plano Frontal de Projecção (**plano 2**) por um outro plano de projecção (**plano 4**), paralelo ao segmento. Dessa forma, será criado um novo diedro de projecção que tem, em comum com o diedro de projecção anterior, o Plano Horizontal de Projecção (**plano 1**). Para determinar as projecções do segmento $[PQ]$ no novo diedro de projecção, há que analisar as alterações, relativas às **projecções** e às **coordenadas** dos pontos, que se verificarão no novo diedro de projecção, por comparação com a situação no diedro de projecção inicial (note que de um diedro para o outro se **mantém** o Plano Horizontal de Projecção). No que respeita às **projecções**, **mantêm-se as projecções horizontais** dos pontos e do segmento de recta (que existem no plano de projecção que se mantém) e **alteram-se as projecções frontais** (que passarão a ser as projecções no novo plano de projecção – o **plano 4**). No que respeita às **coordenadas**, **mantêm-se as cotas** dos seus pontos (que estão referenciadas ao plano de projecção que se mantém) e **alteram-se os afastamentos** (que passam a ser 3 cm, pois os afastamentos anteriores estavam referenciados ao plano substituído). O novo eixo X (o eixo X') é a recta de intersecção do **plano 1** (o plano de projecção que se mantém) com o **plano 4** (o novo plano de projecção), o que se assinalou convenientemente com $1/4$ (note que se assinalou com $1/2$ que o eixo X inicial é a recta de intersecção do **plano 1** com o **plano 2**). Como o **plano 4** é paralelo ao segmento, o eixo X' é paralelo a $[P_1Q_1]$ e está a 3 cm deste (o novo afastamento do segmento). As linhas de chamada dos pontos P e Q , no novo diedro de projecção, são perpendiculares ao eixo X' . P_4 é a projecção de P no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de P_4 ao eixo X' é igual à distância de P_2 ao eixo X (que é a cota de P). Q_4 é a projecção de Q no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota (como se expôs para o ponto P) – a distância de Q_4 ao eixo X' é igual à distância de Q_2 ao eixo X . No novo diedro de projecção, o segmento está paralelo ao **plano 4** (está transformado num segmento de recta frontal) e a sua verdadeira grandeza na sua projecção no **plano 4** – a verdadeira grandeza de PQ é P_4Q_4 .



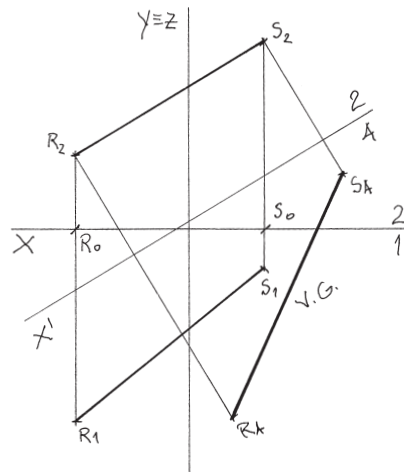
637.

Em primeiro lugar, desenharam-se as projecções do segmento, de acordo com os dados. Para transformar o segmento $[AB]$ num segmento de recta de topo, é necessário substituir o Plano Frontal de Projecção (**plano 2**) por um outro plano de projecção (**plano 4**), ortogonal ao segmento de recta. Dessa forma, será criado um novo diedro de projecção que tem, em comum com o diedro de projecção anterior, o Plano Horizontal de Projecção (**plano 1**). Para determinar as projecções do segmento $[PQ]$ no novo diedro de projecção, há que analisar detalhadamente as alterações, relativas às **projecções** e às **coordenadas** dos pontos, que se verificarão no novo diedro de projecção, por comparação com a situação no diedro de projecção inicial (note que de um diedro para o outro se **mantém** o Plano Horizontal de Projecção). No que respeita às **projecções**, **mantêm-se as projecções horizontais** dos pontos e do segmento de recta (que existem no plano de projecção que se mantém) e **alteram-se as projecções frontais** (que passarão a ser as projecções no novo plano de projecção – o **plano 4**). No que respeita às **coordenadas**, **mantêm-se as cotas** dos seus pontos (que estão referenciadas ao plano de projecção que se mantém) e **alteram-se os afastamentos** (que estavam referenciados ao plano substituído). O novo eixo X (o eixo X') é a recta de intersecção do **plano 1** (o plano de projecção que se mantém) com o **plano 4** (o novo plano de projecção), o que se assinalou convenientemente com $1/4$ (note que se assinalou com $1/2$ que o eixo X inicial é a recta de intersecção do **plano 1** com o **plano 2**). Como o **plano 4** é ortogonal ao segmento, o eixo X' é perpendicular a $[A_1B_1]$ e está a 1 cm de A_1 (é pretendido que se mantenha o afastamento do ponto A). As linhas de chamada dos pontos A e B , no novo diedro de projecção, são perpendiculares ao eixo X' . A_4 é a projecção de A no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota (que se manteve) – a distância de A_4 ao eixo X' é igual à distância de A_2 ao eixo X (que é a cota de A). B_4 é a projecção de B no **plano 4** e determinou-se em função da sua cota (como se expôs para o ponto A) – a distância de B_4 ao eixo X' é igual à distância de B_2 ao eixo X . Note que as projecções de A e B no **plano 4** ficam **necessariamente** coincidentes. No novo diedro de projecção, o segmento $[AB]$ é de topo.



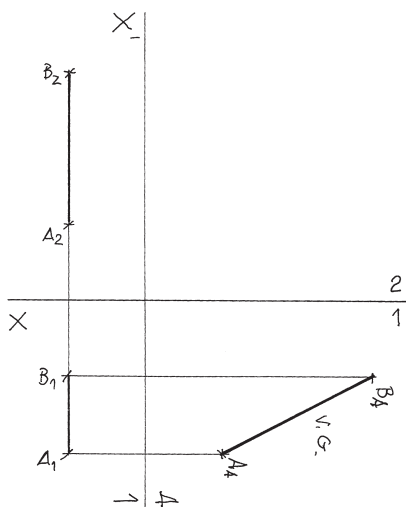
638.

Em primeiro lugar, desenharam-se as projecções do segmento, de acordo com os dados. Para transformar o segmento **[RS]** num segmento de recta horizontal (de nível) com 3 cm de cota, é necessário substituir o Plano Horizontal de Projecção (**plano 1**) por um outro plano de projecção (**plano 4**), paralelo ao segmento. Dessa forma, será criado um novo diedro de projecção que tem, em comum com o diedro de projecção anterior, o Plano Frontal de Projecção (**plano 2**). Para determinar as projecções do segmento **[RS]** no novo diedro de projecção, há que analisar as alterações, relativas às **projectões e às coordenadas** dos pontos, que se verificarão no novo diedro de projecção, por comparação com a situação no diedro de projecção inicial (note que de um diedro para o outro se **mantém** o Plano Frontal de Projecção). No que respeita às **projectões**, **mantêm-se as projecções frontais** dos pontos e do segmento de recta (que existem no plano de projecção que se mantém) e **alteram-se as projecções horizontais** (que passarão a ser as projecções no novo plano de projecção – o **plano 4**). No que respeita às **coordenadas**, **mantêm-se os afastamentos** dos seus pontos (que estão referenciados ao plano de projecção que se mantém) e **alteram-se as cotas** (que passam a ser 3 cm, pois as cotas anteriores estavam referenciadas ao plano substituído). O novo eixo **X** (o eixo **X'**) é a recta de intersecção do **plano 2** (o plano de projecção que se mantém) com o **plano 4** (o novo plano de projecção), o que se assinalou convenientemente com **4/2** (note que se assinalou com **1/2** que o eixo **X** inicial é a recta de intersecção do **plano 1** com o **plano 2**). Como o **plano 4** é paralelo ao segmento, o eixo **X'** é paralelo a **[R₂S₂]** e está a 3 cm deste (a nova cota do segmento). As linhas de chamada dos pontos **R** e **S**, no novo diedro de projecção, são perpendiculares ao eixo **X'**. **R₄** é a projecção de **R** no **plano 4** e determinou-se em função do seu afastamento (que se manteve) – a distância de **R₄** ao eixo **X'** é igual à distância de **R₁** ao eixo **X** (que é o afastamento de **R**). **S₄** é a projecção de **S** no **plano 4** e determinou-se em função do seu afastamento (como se expôs para o ponto **R**) – a distância de **S₄** ao eixo **X'** é igual à distância de **S₁** ao eixo **X**. No novo diedro de projecção, o segmento está paralelo ao **plano 4** (está transformado num segmento de recta horizontal) e a sua verdadeira grandeza está na sua projecção no **plano 4** – a verdadeira grandeza de **RS** é **R₄S₄**.



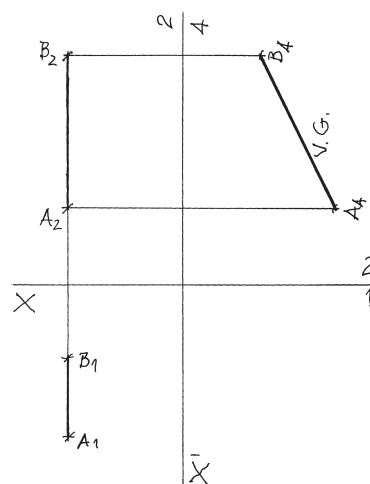
639.

Ver relatório do exercício 636.



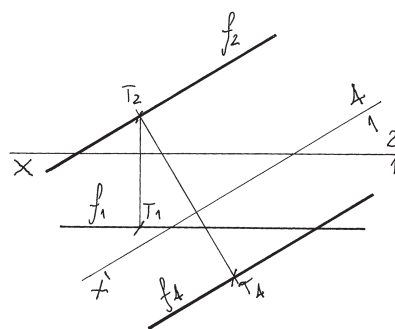
640.

Ver relatório do exercício 638.



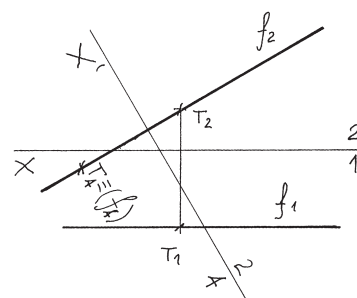
641.

Em primeiro lugar, desenharam-se as projecções da recta f , em função dos dados. Em seguida, para transformar a recta f numa recta fronto-horizontal, é necessário substituir o Plano Horizontal de Projecção (**plano 1**) por um novo plano de projecção (**plano 4**), paralelo a f e a 3 cm desta. Para determinar as projecções da recta f no novo diedro de projecção (o diedro formado pelo **plano 2** e pelo **plano 4**), há que analisar as alterações que se verificarão no novo diedro de projecção, por comparação com a situação no diedro de projecção inicial. Note que, de um diedro para o outro, se **mantém** o Plano Frontal de Projecção (**plano 2**). No que respeita às **projeções**, **mantêm-se as projecções frontais** e **alteram-se as projecções horizontais** (que serão substituídas por novas projecções). No que respeita às **coordenadas**, **mantêm-se os afastamentos** e **alteram-se as cotas**. O novo eixo X (o eixo X') é, agora, a recta de intersecção do Plano Frontal de Projecção (**plano 2**) com o **plano 4** (o que se assinalou convenientemente com 2/4) e é **paralelo** a f_2 . Em seguida, determinou-se a projecção do ponto T no **plano 4** – T_4 (ver relatório do exercício 638). No novo diedro de projecção, a recta f é uma recta fronto-horizontal, pelo que a sua projecção no **plano 4** passa por T_4 e é paralela ao eixo X' .



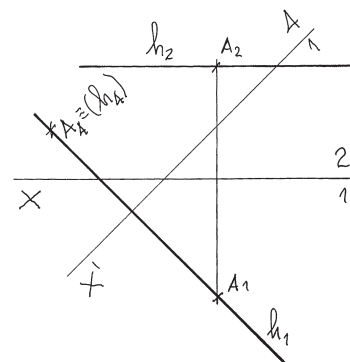
642.

Em primeiro lugar, desenharam-se as projecções da recta f , em função dos dados. Em seguida, para transformar a recta f numa recta vertical é necessário substituir o Plano Horizontal de Projecção (**plano 1**) por um novo plano de projecção (**plano 4**), que tem de ser ortogonal a f . Para determinar as projecções da recta f no novo diedro de projecção (o diedro formado pelo **plano 2** e pelo **plano 4**), há que analisar as alterações que se verificarão no novo diedro de projecção, por comparação com a situação no diedro de projecção inicial (ver relatório do exercício anterior). No que respeita às **projeções**, **mantêm-se as projecções frontais** e **alteram-se as projecções horizontais** e no que respeita às **coordenadas**, **mantêm-se os afastamentos** e **alteram-se as cotas**. O novo eixo X (o eixo X') é a recta de intersecção do Plano Frontal de Projecção (**plano 2**) com o **plano 4** (o que se assinalou convenientemente com 2/4) e é **perpendicular** a f_2 . Note que a distância do eixo X' a T_2 é igual à distância de T_2 ao eixo X inicial, pois é pretendido que se mantenha a cota de T . Em seguida, determinou-se a projecção do ponto T no **plano 4** – T_4 (ver relatório do exercício 638). No novo diedro de projecção, a recta f é uma recta projectante horizontal (recta vertical), pelo que a sua projecção no **plano 4** é um **único ponto** que está **necessariamente** coincidente com T_4 , pelo que se tem $(f_4) \equiv T_4$ – note que se assinalou, com o recurso a parêntesis, que a projecção da recta f no **plano 4** é um ponto.



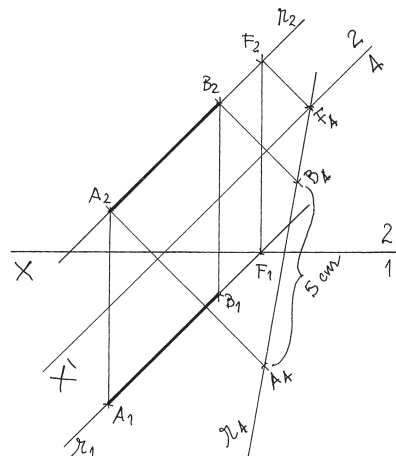
643.

Em primeiro lugar, desenharam-se as projecções da recta h , em função dos dados. Em seguida, para transformar a recta h numa recta de topo é necessário substituir o Plano Frontal de Projecção (**plano 2**) por um novo plano de projecção (**plano 4**), que tem de ser ortogonal a h . Para determinar as projecções da recta h no novo diedro de projecção (o diedro formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**), há que analisar as alterações que se verificarão no novo diedro de projecção, por comparação com a situação no diedro de projecção inicial (ver relatório do exercício 636). No que respeita às **projeções**, **mantêm-se as projecções horizontais** e **alteram-se as projecções frontais** e no que respeita às **coordenadas**, **mantêm-se as cotas** e **alteram-se os afastamentos**. O novo eixo X (o eixo X') é a recta de intersecção do Plano Horizontal de Projecção (**plano 1**) com o **plano 4** (o que se assinalou convenientemente com 1/4) e é **perpendicular** a h_1 . Para obter as projecções da recta h no novo diedro de projecção há que recorrer a um ponto da recta – determinou-se um ponto qualquer da recta (o ponto A). Em seguida, determinou-se A_4 a projecção do ponto A no **plano 4** (ver relatório do exercício 636). No novo diedro de projecção, a recta h é uma recta projectante frontal (recta de topo), pelo que a sua projecção no **plano 4** é um **único ponto** que está **necessariamente** coincidente com A_4 , pelo que se tem $(h_4) \equiv A_4$ – note que se assinalou, com o recurso a parêntesis, que a projecção da recta h no **plano 4** é um ponto.



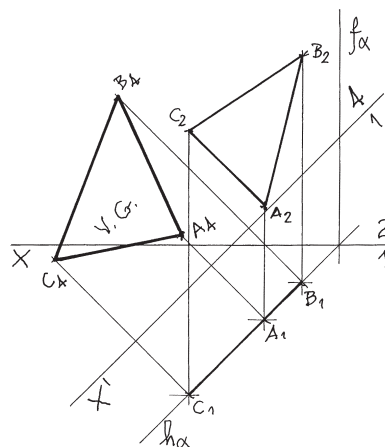
644.

Em primeiro lugar, desenharam-se as projecções da recta r , em função dos dados. Não é possível, de forma imediata, determinar as projecções do segmento, pois como a recta suporte do segmento é uma recta **obliqua** (é obliqua a ambos os planos de projecção), **o segmento não se projecta em V.G.** em nenhum dos planos de projecção. Assim, para determinar as projecções do segmento há que, em primeiro lugar, conseguir que a recta suporte do segmento fique paralela a um dos planos de projecção. Recorrendo a uma **mudança do diedro de projecção**, é possível transformar a recta r numa **recta frontal** (de frente) ou numa **recta horizontal** (de nível), sendo que, em qualquer das duas situações, é possível obter a V.G. do segmento numa das projecções (o que não é possível numa recta obliqua). Optou-se pela segunda hipótese – transformou-se a recta r numa recta horizontal (de nível). Para tal substituiu-se o Plano Horizontal de Projecção (**plano 1**) por um outro plano de projecção (**plano 4**), paralelo à recta (ver relatório do exercício 638). Para definir uma recta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direcção, pelo que, para determinar a projecção de r no **plano 4**, se recorreu a um outro ponto qualquer da recta (o ponto F , o traço frontal de r) – r_4 está definida por A_4 e F_4 . Note que a escolha do traço frontal da recta para segundo ponto não foi aleatória – de facto, atendendo a que B tem de se situar para a direita de A , pressupõe-se que B terá de se situar entre A e o traço frontal da recta, o que nos permite o raciocínio que se segue. No novo diedro de projecção (formado pelo **plano 2** e pelo **plano 4**), a recta r é uma recta horizontal (de nível), pelo que a V.G. do segmento está na sua projecção horizontal. Assim, sobre r_4 e a partir de A_4 , no sentido de F_4 (uma vez que B se situa à direita de A), mediram-se os 5 cm, obtendo-se B_4 . B_2 a projecção frontal de B , tem determinação imediata sobre r_2 . Por fim, a partir de B_2 , é possível determinar B_1 sobre r_1 , pois B_1 e B_2 situam-se na mesma linha de chamada relativa ao eixo X inicial. A partir das projecções de A e B , desenharam-se as projecções do segmento $[AB]$ pretendido.



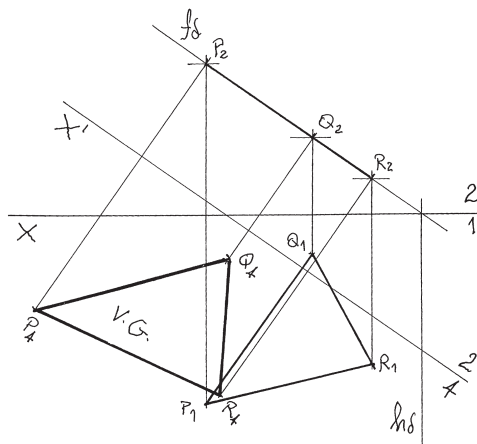
645.

Em primeiro lugar, representou-se o plano α , pelos seus traços, determinaram-se as projecções dos pontos A , B e C , pertencentes ao plano, e desenharam-se as projecções do triângulo. Em seguida, para determinar a verdadeira grandeza do triângulo $[ABC]$, é necessário transformar o plano α num plano paralelo a um dos planos de projecção – num plano frontal (de frente), pois um plano frontal (de frente) é um plano projectante horizontal, tal como o plano α (que é um plano vertical). Para tal, é necessário substituir o Plano Frontal de Projecção por um novo plano de projecção (**plano 4**), paralelo ao plano α . No que respeita às **projeções**, **manter-se-ão as projecções horizontais** e **alterar-se-ão as projecções frontais** (que serão substituídas por novas projecções). No que respeita às **coordenadas**, **manter-se-ão as cotas** e **alterar-se-ão os afastamentos**. O novo eixo X (o eixo X') é a recta de intersecção do Plano Horizontal de Projecção (**plano 1**) com o **plano 4** (o que se assinalou convenientemente com $1/4$) e é **paralelo a h_α** . Note que o eixo X' está a 2 cm de h_α , pois é esse o afastamento pretendido para o plano α , enquanto plano frontal (de frente). Determinaram-se as projecções dos pontos A , B e C no **plano 4** (ver relatório do exercício 636), obtendo-se as projecções do triângulo no novo diedro de projecção – a verdadeira grandeza do triângulo está na sua projecção no **plano 4**, pois o plano α está paralelo ao **plano 4**. No novo diedro de projecção, o plano α é um plano frontal (de frente), pelo que a verdadeira grandeza do triângulo está no triângulo $[A_4B_4C_4]$.

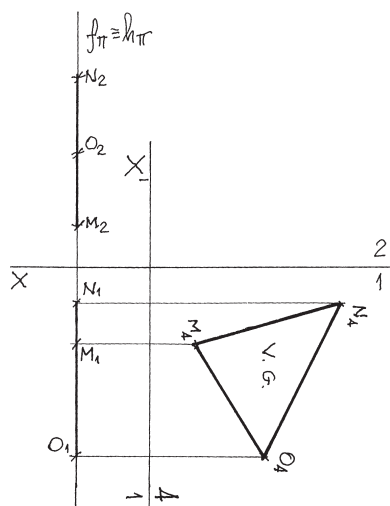


646.

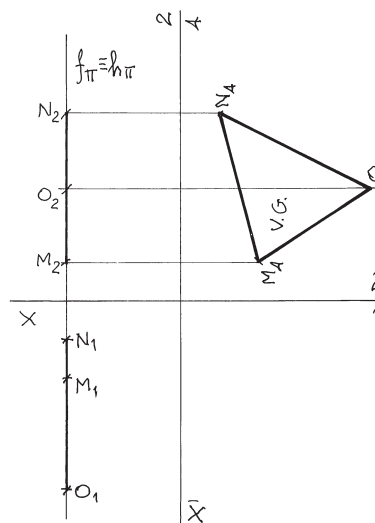
Em primeiro lugar, representou-se o plano δ , pelos seus traços, determinaram-se as projecções dos pontos **P**, **Q** e **R**, pertencentes ao plano, e desenharam-se as projecções do triângulo. Em seguida, para determinar a verdadeira grandeza do triângulo **[PQR]**, é necessário transformar o plano δ num plano paralelo a um dos planos de projecção – num plano horizontal (de nível), pois um plano horizontal (de nível) é um plano projectante frontal, tal como o plano δ (que é um plano de topo). Para tal, é necessário substituir o Plano Horizontal de Projecção por um novo plano de projecção (**plano 4**), paralelo ao plano δ . No que respeita às **projecções**, **manter-se-ão as projecções frontais e alterar-se-ão as projecções horizontais** (que serão substituídas por novas projecções). No que respeita às **coordenadas**, **manter-se-ão os afastamentos e alterar-se-ão as cotas**. O novo eixo **X** (o eixo **X'**) é a recta de intersecção do Plano Frontal de Projecção (**plano 2**) com o **plano 4** (o que se assinalou convenientemente com **2/4**) e é **paralelo** a f_δ . Note que o eixo **X'** está a 3 cm de f_δ , pois é essa a cota pretendida para o plano δ , enquanto plano horizontal (de nível). Determinaram-se as projecções dos pontos **P**, **Q** e **R** no **plano 4** (ver relatório do exercício **638**), obtendo-se as projecções do triângulo no novo diedro de projecção – a verdadeira grandeza do triângulo está na sua projecção no **plano 4**, pois o plano δ está paralelo ao **plano 4**. No novo diedro de projecção, o plano δ é um plano horizontal (de nível), pelo que a verdadeira grandeza do triângulo está no triângulo **[P₄Q₄R₄]**.

**647.**

Ver relatório do exercício **645**.

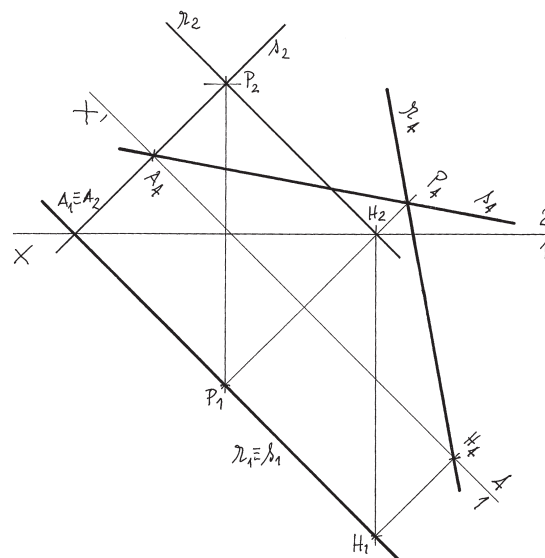
**648.**

Ver relatório do exercício **646**.

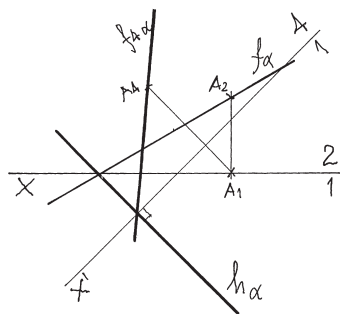


649.

- a) Em primeiro lugar, desenharam-se as projecções das duas rectas, em função dos dados. Note que se desenhou, em primeiro lugar, a recta que é a projecção horizontal simultânea das duas rectas (as suas projecções horizontais estão coincidentes). A recta s é uma recta do $\beta_{1/3}$, pelo que as suas projecções são simétricas em relação ao eixo X – este raciocínio permitiu-nos desenhar imediatamente s_2 . Atendendo a que as duas rectas são concorrentes num ponto com 4 cm de cota, determinaram-se as projecções do ponto P (o ponto de concorrência) e, em seguida, desenharam-se as projecções da recta r . O plano definido pelas duas rectas é **necessariamente** um **plano projectante horizontal** (plano **vertical**), pois as projecções horizontais das duas rectas estão coincidentes.
- b) Para transformar o plano α num plano frontal (de frente), efectuaram-se os raciocínios expostos no relatório do exercício 645, pelo que se aconselha a respectiva leitura. Determinou-se P_4 , a projecção do ponto P no plano 4 – r_4 e s_4 (respectivamente as projecções de r e s no plano 4) passam por P_4 . Para definir uma recta são necessários dois pontos ou um ponto e uma direcção. Já temos um ponto para definir ambas as rectas – P_4 . Falta-nos, para cada uma delas, outro ponto. Recorreu-se ao ponto A , da recta s (o seu ponto de concorrência com o eixo X) e ao traço horizontal da recta r (o ponto H). Determinaram-se as projecções de A e de H no plano 4, em função das respectivas cotas (que são nulas, pelo que A_4 e H_4 se situam, ambas, no eixo X') – r_4 passa por P_4 e por H_4 e s_4 passa por P_4 e por A_4 .



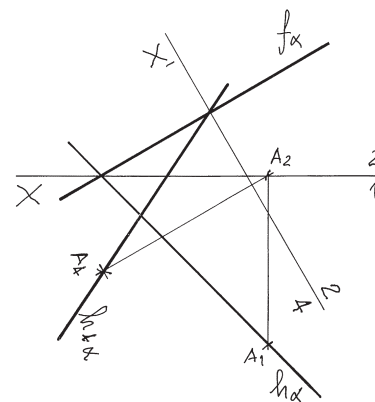
650.



Em primeiro lugar, representou-se o plano α pelos seus traços. Em seguida, para transformar o plano α num plano de topo é necessário substituir o Plano Frontal de Projecção (**plano 2**) por um novo plano de projecção (**plano 4**), criando um novo diedro de projecção no qual o plano α seja um plano de topo – o **plano 4** terá, assim, de ser ortogonal a h_α . O novo eixo X (o eixo X') é a recta de intersecção do Plano Horizontal de Projecção (**plano 1**) com o **plano 4** (o que se assinalou convenientemente com 1/4) e é **perpendicular** a h_α . Uma vez que se manteve o Plano Horizontal de Projecção, manteve-se, também, o traço horizontal do plano – haverá, no entanto, um novo traço frontal do plano α (o traço do plano α no **plano 4**). Para determinar este novo traço, recorreu-se a um ponto qualquer do plano – um ponto A , de f_α , para maior rapidez e economia de traçados. A projecção de A no **plano 4** determinou-se conforme exposto no relatório do exercício 636. No novo diedro de projecção, o plano α é projectante frontal, pelo que o traço de α no **plano 4** ($f_{4\alpha}$) passa **necessariamente** por A_4 e é concorrente com h_α no eixo X' .

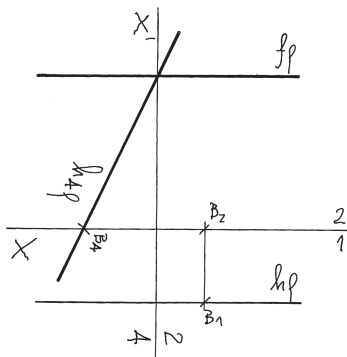
651.

Em primeiro lugar, representou-se o plano α pelos seus traços. Em seguida, para transformar o plano α num plano vertical é necessário substituir o Plano Horizontal de Projecção (**plano 1**) por um novo plano de projecção (**plano 4**), criando um novo diedro de projecção no qual o plano α seja um plano vertical – o **plano 4** terá, assim, de ser ortogonal a f_α . O novo eixo X (o eixo X') é a recta de intersecção do Plano Frontal de Projecção (**plano 2**) com o **plano 4** (o que se assinalou convenientemente com 2/4) e é **perpendicular** a f_α . Uma vez que se manteve o Plano Frontal de Projecção, manteve-se, também, o traço frontal do plano – haverá, no entanto, um novo traço horizontal do plano α (o traço do plano α no **plano 4**). Para determinar este novo traço, recorreu-se a um ponto qualquer do plano – um ponto A , de h_α , para maior rapidez e economia de traçados. A projecção de A no **plano 4** determinou-se conforme exposto no relatório do exercício 638. No novo diedro de projecção, o plano α é projectante horizontal, pelo que o traço de α no **plano 4** ($h_{4\alpha}$) passa **necessariamente** por A_4 e é concorrente com f_α no eixo X' .

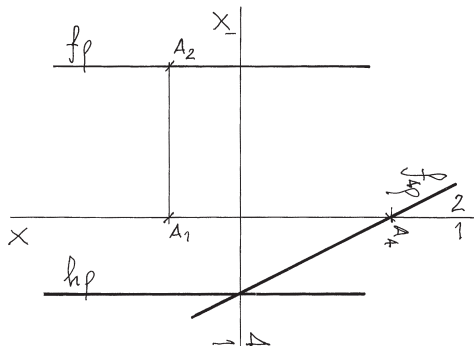


652.

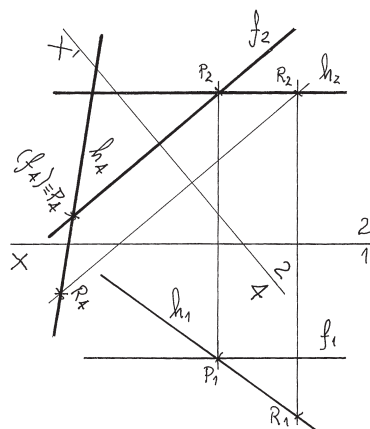
Em primeiro lugar, representou-se o plano ρ pelos seus traços. Sobre a transformação do plano ρ num plano vertical, ver relatório do exercício anterior. O ponto **B** foi o ponto de h_p a que se recorreu para determinar o traço de ρ no **plano 4**.

**653.**

Em primeiro lugar, representou-se o plano ρ pelos seus traços. Sobre a transformação do plano ρ num plano de topo, ver relatório do exercício **650**.

**654.**

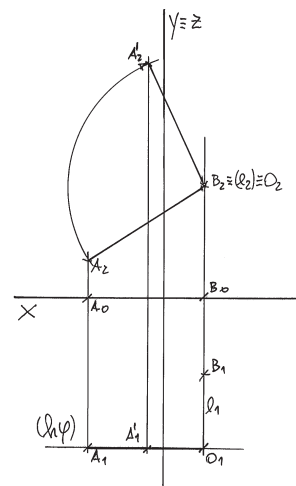
O plano θ está definido por uma recta frontal (de frente) e uma recta horizontal (de nível). As rectas frontais (de frente) de um plano vertical são **necessariamente** rectas verticais. Assim, há que efectuar as transformações necessárias para que a recta f se transforme numa recta vertical – é necessário substituir o Plano Horizontal de Projecção (**plano 1**) por um novo plano de projecção (**plano 4**) que seja ortogonal à recta f (recorde que uma recta frontal é oblíqua ao Plano Horizontal de Projecção e uma recta vertical é ortogonal ao Plano Horizontal de Projecção, sendo ambas paralelas ao Plano Frontal de Projecção). O novo eixo X (o eixo X') fica perpendicular a f_2 . Mantêm-se as projecções frontais e os afastamentos e alteram-se as projecções horizontais (são substituídas por novas projecções) e as cotas. Determinou-se a projecção de P no **plano 4** (P_4), o que nos permite determinar a projecção de f no **plano 4** (que é um ponto – ver exercício **642**). No entanto, para definir a recta h , no novo diedro de projecção, necessitamos de dois pontos e só temos um ponto – o ponto P . Falta-nos, portanto, outro ponto. Recorreu-se a um outro ponto da recta h – o ponto R . Determinou-se R_4 a projecção de R no **plano 4**, e h_4 , a projecção da recta h no **plano 4** fica definida por P_4 e por R_4 . No novo diedro de projecção, a recta h é uma **recta oblíqua** e a recta f é uma **recta vertical** – um plano definido por uma recta oblíqua e por uma recta vertical é **necessariamente** um plano vertical, pelo que se satisfaz o pretendido.

**655.**

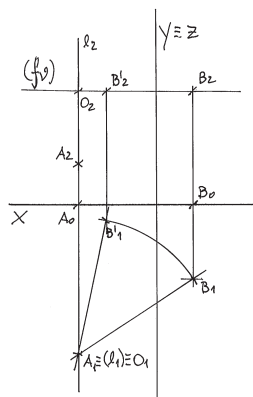
O processo da **rotação** consiste em, mantendo o diedro de projecção inicial, rodar o objecto em torno de uma recta (um eixo de rotação), de forma a que o objecto adquira, no diedro de projecção inicial, uma posição mais favorável para o estudo a efectuar. Os eixos de rotação são **necessariamente** de topo ou verticais, para que os arcos de rotação, que existem em planos ortogonais aos eixos, se projectem em V.G. em **um** dos planos de projecção.

656.

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos dados pelas suas projecções. Em seguida, representaram-se as projecções do eixo de rotação, e – a recta de topo que contém o ponto B . O eixo é de topo, pelo que a rotação do ponto A se processa num plano frontal (de frente), ou seja, o ponto A , na sua rotação, mantém o afastamento. Assim, por A_1 conduziu-se uma recta paralela ao eixo X , que é o traço horizontal do plano frontal (de frente) que contém o arco da rotação de A – (h_ϕ). Note que, com o objectivo de simplificar a leitura da resolução gráfica do exercício, se pode omitir a identificação do plano. O centro da rotação é o ponto O , que é o ponto de intersecção do plano ϕ com o eixo de rotação e . O arco da rotação projecta-se em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projecção, pois existe num plano paralelo àquele. Assim, com centro em O_2 e raio $O_2 A_2$, desenhou-se um arco com 100° de amplitude, no sentido dos ponteiros do relógio, em cujo extremo se situa A'_2 , a projecção frontal do ponto A rodado (A' é o ponto A , após a rotação). A sua projecção horizontal, A'_1 , está na mesma linha de chamada de A'_2 , sobre (h_ϕ), o traço horizontal do plano frontal (de frente) que contém o arco da rotação do ponto A .



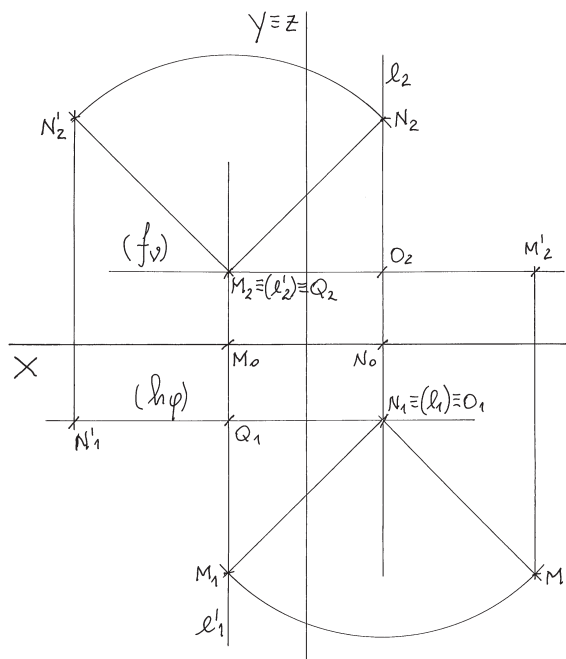
657.



Em primeiro lugar, representaram-se os pontos dados pelas suas projecções. Em seguida, representaram-se as projecções do eixo de rotação, e – a recta vertical que contém o ponto A . O eixo é vertical, pelo que a rotação do ponto B se processa num plano horizontal (de nível), ou seja, o ponto B , na sua rotação, mantém a cota. Assim, por B_2 conduziu-se uma recta paralela ao eixo X , que é o traço frontal do plano horizontal (de nível) que contém o arco da rotação de B – (f_v). Note que, com o objectivo de simplificar a leitura da resolução gráfica do exercício, se pode omitir a identificação do plano. O centro da rotação é o ponto O , que é o ponto de intersecção do plano v com o eixo de rotação e . O arco da rotação projecta-se em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projecção, pois existe num plano paralelo àquele. Assim, com centro em O_1 e raio $O_1 B_1$, desenhou-se um arco com 45° de amplitude, no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio, em cujo extremo se situa B'_1 , a projecção horizontal do ponto B rodado (B' é o ponto B , após a rotação). A sua projecção frontal, B'_2 , está na mesma linha de chamada de B'_1 , sobre (f_v), o traço frontal do plano horizontal (de nível) que contém o arco da rotação do ponto B .

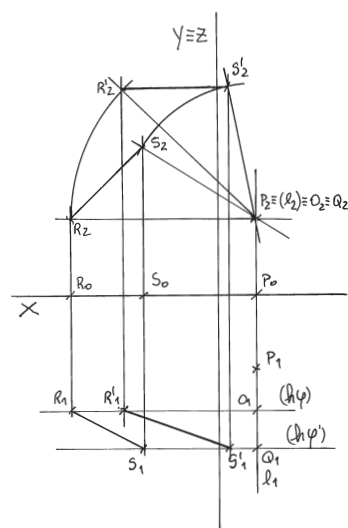
658.

- a) Ver relatório do exercício anterior. A recta e é o eixo de rotação – é a recta vertical que contém o ponto N . O plano v é o plano horizontal (de nível) que contém o arco da rotação do ponto M e O é o seu centro.
- b) Ver relatório do exercício 656. A recta e' é o eixo de rotação – é a recta de topo que contém o ponto M . O plano ϕ é o plano frontal (de frente) que contém o arco da rotação do ponto N e Q é o seu centro.

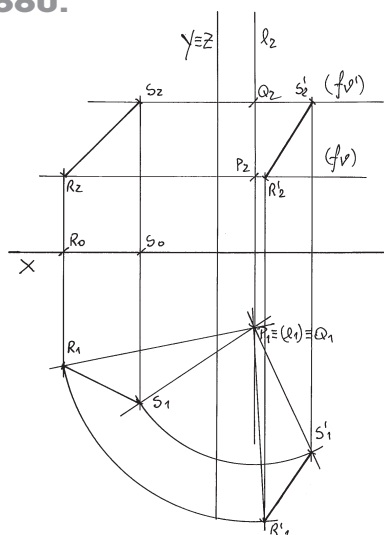


659.

Ver relatório do exercício 656 para a rotação de cada um dos pontos **R** e **S**. A recta **e** é o eixo de rotação – é a recta de topo que contém o ponto **P**. O plano φ é o plano frontal (de frente) que contém o arco da rotação do ponto **R** e **O** é o seu centro. O plano φ' é o plano frontal (de frente) que contém o arco da rotação do ponto **S** e **Q** é o seu centro.



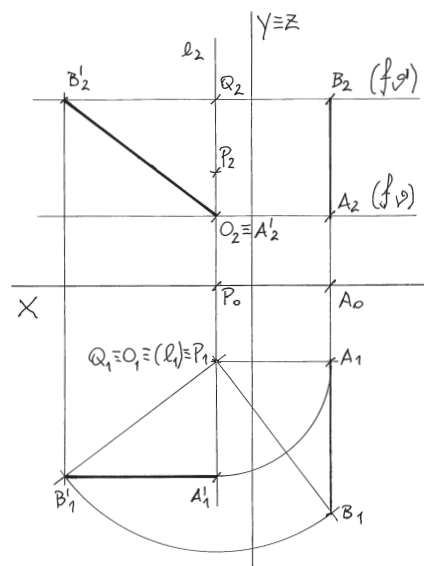
660.



Ver relatório do exercício 657 para a rotação de cada um dos pontos **R** e **S**. A recta **e** é o eixo de rotação – é a recta vertical que contém o ponto **P**. O plano v é o plano horizontal (de nível) que contém o arco da rotação do ponto **R** e o ponto **P** é o seu centro (note que o ponto de intersecção da recta **e** com o plano v é o próprio ponto **P**). O plano v' é o plano horizontal (de nível) que contém o arco da rotação do ponto **S** e **Q** é o seu centro.

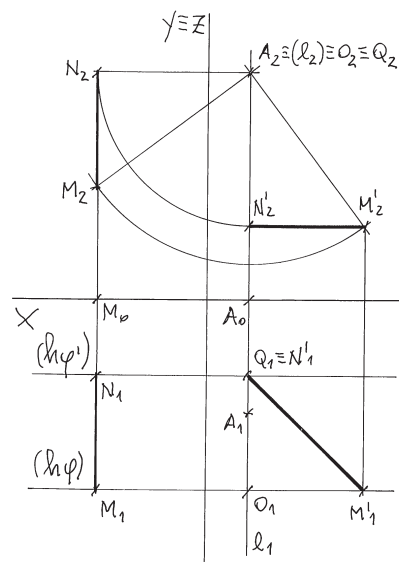
661.

Ver relatório do exercício 657 para a rotação de cada um dos pontos **A** e **B**. A recta **e** é o eixo de rotação – é a recta vertical que contém o ponto **P**. O plano v é o plano horizontal (de nível) que contém o arco da rotação do ponto **A** e **O** é o seu centro. O plano v' é o plano horizontal (de nível) que contém o arco da rotação do ponto **B** e **Q** é o seu centro. Após a rotação, o segmento **[A'B']** (o segmento **[AB]** após a rotação) está paralelo ao Plano Frontal de Projecção, pelo que é um **segmento de recta frontal (de frente)**.



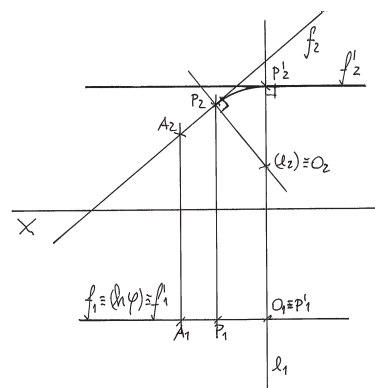
662.

Ver relatório do exercício 656 para a rotação de cada um dos pontos **M** e **N**. A recta **e** é o eixo de rotação – é a recta de topo que contém o ponto **A**. O plano φ é o plano frontal (de frente) que contém o arco da rotação do ponto **M** e **O** é o seu centro. O plano φ' é o plano frontal (de frente) que contém o arco da rotação do ponto **N** e **Q** é o seu centro. Após a rotação, o segmento **[M'N']** (o segmento **[MN]** após a rotação) está paralelo ao Plano Horizontal de Projectão, pelo que é um **segmento de recta horizontal (de nível)**.



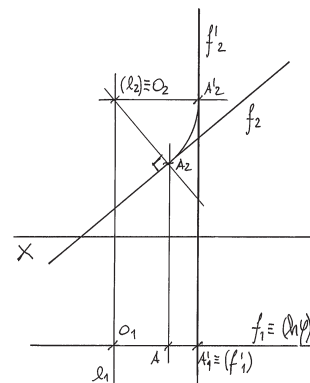
663.

Em primeiro lugar, desenharam-se as projecções da recta **f**, em função dos dados. Para transformar a recta **f** numa recta fronto-horizontal, é necessário efectuar uma rotação na qual sejam as cotas dos pontos que se vão alterar, mantendo-se os seus afastamentos (uma recta fronto-horizontal é um caso particular das rectas frontais). Os arcos de rotação dos pontos da recta **f** existem, assim, em planos frontais (de frente), para que se mantenham os afastamentos, pelo que o eixo de rotação é **necessariamente** uma **recta de topo** (o eixo da rotação é ortogonal aos planos que contêm os arcos de rotação). Desenharam-se as projecções de um eixo qualquer, de topo – recta **e**. Determinaram-se as projecções de um ponto **P**, pertencente à recta **f**, tal que **[OP]** é simultaneamente perpendicular ao eixo de rotação **e** e à recta **f**, em que **O** é o centro da rotação do ponto **P**. Note que **O** é o ponto de intersecção do eixo de rotação **e** com o plano φ , o plano frontal (de frente) que contém o ponto **P** e que contém o arco da rotação de **P** (note que o plano φ contém a própria recta). Por simplificação da leitura da resolução gráfica, poder-se-ia omitir a representação do plano frontal – (h_φ). Para transformar a recta **f** numa recta fronto-horizontal, a sua projecção frontal, **f**₂, após a rotação, tem de ficar paralela ao eixo **X**. Assim, porque o segmento **[OP]** é perpendicular a **f**, o segmento **[OP]** tem de rodar até ficar vertical, ou seja, tem de rodar até a projecção horizontal de **P**, após a rotação, ficar coincidente com **O**₁. O ponto **P'** é o ponto **P** rodado. Efectuada a rotação de **[OP]**, sabe-se que a projecção frontal da recta **f**, após a rotação (**f**'₂), passa por **P**'₂ e é perpendicular a **[O**₂**P**'₂], sendo **f'** a recta **f** rodada. Note que, pelo exposto, **f**'₂ fica paralela ao eixo **X**, que era o pretendido. Todos os pontos da recta **f**, após a rotação, têm a mesma cota. Todos os pontos da recta **f**, antes da rotação, tinham o mesmo afastamento e uma vez que, ao longo da rotação (que se processou num plano frontal), os pontos mantiveram os seus afastamentos, tem-se **f**₁ \equiv **f**'₁. Assim sendo, após a rotação, todos os pontos da recta **f** têm a mesma cota e o mesmo afastamento – a recta **f'** é uma recta fronto-horizontal. Note que a rotação da recta se processou no sentido dos ponteiros do relógio, mas que se poderia ter processado em sentido contrário – nesse caso, com o eixo de rotação escolhido, a recta ficaria com cota negativa.



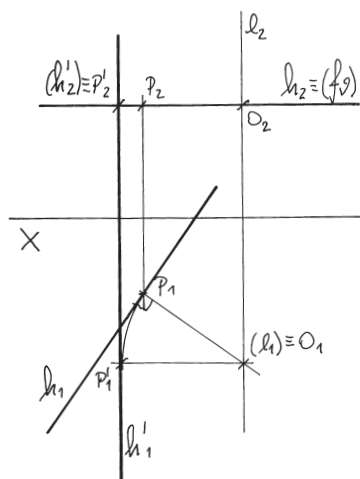
664.

Para transformar a recta f numa recta vertical, é necessário efectuar uma rotação na qual sejam as cotas dos pontos que se vão alterar, mantendo-se os seus afastamentos (uma recta vertical é um caso particular das rectas frontais). Os arcos de rotação dos pontos da recta f existem, assim, em planos frontais (o plano frontal que contém a recta, à semelhança do exercício anterior), para que se mantenham os afastamentos, pelo que o eixo de rotação é **necessariamente** uma **recta de topo** (o eixo da rotação é ortogonal ao plano que contém os arcos de rotação). Desenharam-se as projecções de um eixo de topo – recta e . Com vista a uma maior economia de traçados, localizou-se o eixo de rotação de forma a que o ponto A , da recta, fosse o ponto a rodar (o ponto que corresponde ao ponto P do exercício anterior). O segmento $[OA]$ é simultaneamente perpendicular ao eixo de rotação e e à recta f , em que O é o centro da rotação do ponto A . Note que O é o ponto de intersecção do eixo de rotação e com o plano φ , o plano frontal (de frente) no qual se processa a rotação da recta. Por simplificação da leitura da resolução gráfica, poder-se-ia omitir a representação do plano frontal – (h_φ). Para transformar a recta f numa recta vertical, a sua projecção frontal, f_2 , após a rotação, tem de ficar perpendicular ao eixo X . Assim, porque o segmento $[OA]$ é perpendicular a f , o segmento $[OA]$ tem de rodar até ficar fronto-horizontal, ou seja, tem de rodar até ficar paralelo ao eixo X . O ponto A' é o ponto A rodado. Efectuada a rotação de $[OA]$, sabe-se que a projecção frontal da recta f , após a rotação (f'_2), passa por A'_2 e é perpendicular a $[O_2A'_2]$, sendo f' a recta f rodada. Note que, pelo exposto, f'_2 fica perpendicular ao eixo X , que era o pretendido. Todos os pontos da recta f , antes da rotação, tinham o mesmo afastamento e, ao longo da rotação (que se processou num plano frontal), os pontos mantiveram os seus afastamentos. As projecções horizontais de todos os pontos da recta estão **necessariamente** coincidentes com A'_1 pelo que a projecção horizontal da recta f' é um ponto. A recta f' é uma recta vertical, pelo que $(f'_1) \equiv A'_1$, sendo f'_1 a projecção horizontal de f , na sua nova posição. Note que a rotação da recta se processou no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio, mas que se poderia ter processado em sentido oposto.



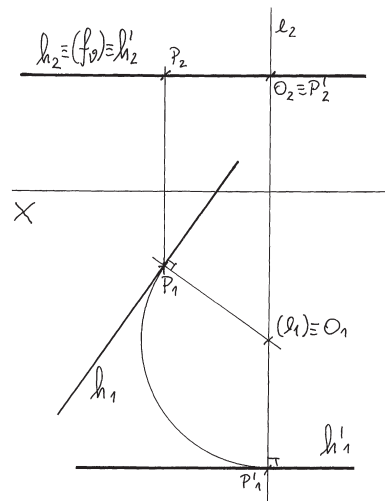
665.

Em primeiro lugar, desenharam-se as projecções da recta h , em função dos dados. Para transformar a recta h numa recta de topo, é necessário efectuar uma rotação na qual sejam os afastamentos dos pontos que se vão alterar, mantendo-se as suas cotas (uma recta de topo é um caso particular das rectas horizontais). Os arcos de rotação dos pontos da recta h existem, assim, em planos horizontais (existem no plano horizontal que contém a própria recta), para que se mantenham as cotas, pelo que o eixo de rotação é **necessariamente** uma **recta vertical** (o eixo da rotação é ortogonal ao plano que contém os arcos de rotação). Desenharam-se as projecções de um eixo vertical – recta e . Com vista a uma maior economia de traçados, localizou-se o eixo de rotação de forma a que o ponto P , da recta, fosse o ponto a rodar. O segmento $[OP]$ é simultaneamente perpendicular ao eixo de rotação e e à recta h , em que O é o centro da rotação do ponto P . Note que O é o ponto de intersecção do eixo de rotação e com o plano v , o plano horizontal (de nível) no qual se processa a rotação da recta. Por simplificação da leitura da resolução gráfica, poder-se-ia omitir a representação do plano horizontal – (f_v). Para transformar a recta h numa recta de topo, a sua projecção horizontal, h_1 , após a rotação, tem de ficar perpendicular ao eixo X . Assim, porque o segmento $[OP]$ é perpendicular a h , o segmento $[OP]$ tem de rodar até ficar fronto-horizontal, ou seja, tem de rodar até ficar paralelo ao eixo X . O ponto P' é o ponto P rodado. Efectuada a rotação de $[OP]$, sabe-se que a projecção horizontal da recta h , após a rotação (h'_1), passa por P'_1 e é perpendicular a $[O_1P'_1]$, sendo h' a recta h rodada. Note que, pelo exposto, h'_1 fica perpendicular ao eixo X , que era o pretendido. Todos os pontos da recta h , antes da rotação, tinham a mesma cota e, ao longo da rotação (que se processou num plano horizontal), os pontos mantiveram as suas cotas. As projecções frontais de todos os pontos da recta estão **necessariamente** coincidentes com P'_2 pelo que a projecção frontal da recta h' é um ponto. A recta h' é uma recta de topo, pelo que $(h'_2) \equiv P'_2$, sendo h'_2 a projecção frontal de h , na sua nova posição. Note que a rotação da recta se processou no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio, mas que se poderia ter processado em sentido oposto.



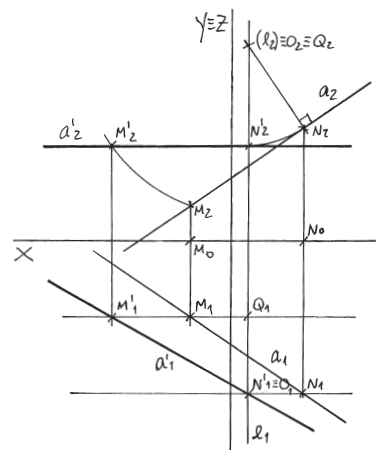
666.

Para transformar a recta h numa recta fronto-horizontal, é necessário efectuar uma rotação na qual sejam os afastamentos dos pontos que se vão alterar, mantendo-se as suas cotas (uma recta fronto-horizontal é um caso particular das rectas horizontais). Os arcos de rotação dos pontos da recta h existem, assim, em planos horizontais (de nível), para que se mantenham as cotas, pelo que o eixo de rotação é **necessariamente** uma **recta vertical**. Desenharam-se as projecções de um eixo qualquer, vertical – recta e . Com vista a uma maior economia de traçados, localizou-se o eixo de rotação de forma a que o ponto P , da recta, fosse o ponto a rodar. O segmento $[OP]$ é simultaneamente perpendicular ao eixo de rotação e e à recta h , em que O é o centro da rotação do ponto P . Por simplificação da leitura da resolução gráfica, poder-se-ia omitir a representação do plano horizontal – (π). Para transformar a recta h numa recta fronto-horizontal, a sua projecção horizontal, h_1 , após a rotação, tem de ficar paralela ao eixo X . Assim, porque o segmento $[OP]$ é perpendicular a h , o segmento $[OP]$ tem de rodar até ficar de topo, ou seja, tem de rodar até a projecção frontal de P , após a rotação, ficar coincidente com O_2 . O ponto P' é o ponto P rodado. Efectuada a rotação de $[OP]$, sabe-se que a projecção horizontal da recta h , após a rotação (h'_1), passa por P'_1 e é perpendicular a $[O_1P'_1]$, sendo h' a recta h rodada. Note que, pelo exposto, h'_1 fica paralela ao eixo X , que era o pretendido. Todos os pontos da recta h , após a rotação, têm o mesmo afastamento. Todos os pontos da recta h , antes da rotação, tinham a mesma cota e uma vez que, ao longo da rotação (que se processou num plano horizontal), os pontos mantiveram as suas cotas, tem-se $h_2 \equiv h'_2$. Assim sendo, após a rotação, todos os pontos da recta h' têm a mesma cota e o mesmo afastamento – a recta h' é uma recta fronto-horizontal. Note que a rotação da recta se processou no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio, mas que se poderia ter processado em sentido oposto.



667.

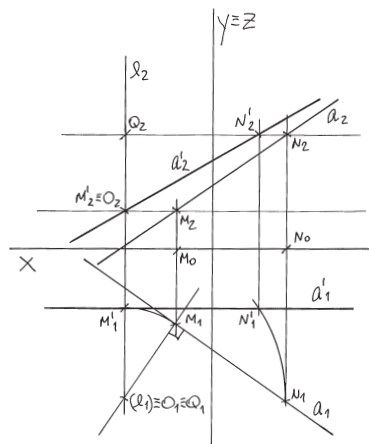
Em primeiro lugar, desenharam-se as projecções da recta a , em função dos dados. Para transformar a numa recta horizontal (de nível), é necessário efectuar uma rotação na qual sejam as cotas dos pontos que se vão alterar, mantendo-se os seus afastamentos. Os arcos de rotação dos pontos da recta a existem, assim, em planos frontais (de frente), para que se mantenham os afastamentos, pelo que o eixo de rotação é **necessariamente** uma recta de topo (é ortogonal aos planos que contêm os arcos de rotação). Desenharam-se as projecções de um eixo de topo – recta e . Com vista a uma maior economia de traçados, localizou-se o eixo de rotação de forma a que o ponto N , da recta, fosse o ponto a rodar. O segmento $[ON]$ é simultaneamente perpendicular ao eixo de rotação e e à recta a , em que O é o centro da rotação do ponto N . Note que O é o ponto de intersecção do eixo de rotação e com o plano frontal (de frente) que contém o ponto N e que contém o respectivo arco da rotação. Por simplificação da leitura da resolução gráfica, omitiu-se a representação do plano frontal – (π). Para transformar a recta a numa recta horizontal (de nível), a sua projecção frontal, a_2 , após a rotação, tem de ficar paralela ao eixo X . Assim, porque o segmento $[ON]$ é perpendicular a a , o segmento $[ON]$ tem de rodar até ficar vertical, ou seja, tem de rodar até a projecção horizontal de N , após a rotação, ficar coincidente com O_1 . O ponto N' é o ponto N rodado. Efectuada a rotação de $[ON]$, sabe-se que a projecção frontal da recta a , após a rotação (a'_2), passa por N'_2 e é perpendicular a $[O_2N'_2]$, sendo a' a recta a rodada. Note que, pelo exposto, a'_2 fica paralela ao eixo X , que era o pretendido. Neste momento, já temos um ponto para definir a recta a' – o ponto N' . Falta-nos outro ponto. Efectuemos a rotação do ponto M . O ponto Q é o centro da rotação de M . Rodou-se o ponto M ao longo de um outro plano frontal (de frente), de forma a M'_2 ficar sobre a'_2 , sendo M' o ponto M rodado. Note que se omitiu, também, a representação do plano frontal (de frente) que contém o arco da rotação do ponto M . M'_1 , a projecção horizontal do ponto M rodado, está na paralela ao eixo X que passa por M_1 (que corresponde ao traço horizontal do plano frontal que contém o seu arco de rotação, e cuja identificação se omitiu). A projecção horizontal da recta a rodada, a'_1 , está definida por M'_1 e N'_1 . Note que a rotação da recta se processou no sentido dos ponteiros do relógio, mas que se poderia ter processado em sentido contrário.



668.

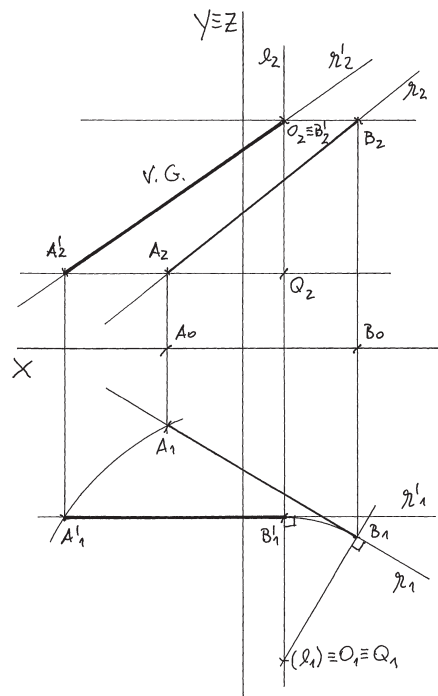
Para transformar a numa recta frontal (de frente), é necessário efectuar uma rotação na qual sejam os afastamentos dos pontos que se vão alterar, mantendo-se as suas cotas. Os arcos de rotação dos pontos da recta a existem, assim, em planos horizontais (de nível), para que se mantenham as cotas, pelo que o eixo de rotação é **necessariamente** uma recta vertical (é ortogonal aos planos que contêm os arcos de rotação). Desenharam-se as projecções de um eixo vertical – recta e . Com vista a uma maior economia de traçados, localizou-se o eixo de rotação de forma a que o ponto M , da recta, fosse o ponto a rodar. O segmento $[OM]$ é simultaneamente perpendicular ao eixo de rotação e e à recta a , em que O é o centro da rotação do ponto M . Note que O é o ponto de intersecção do eixo de rotação e com o plano horizontal (de nível) que contém o ponto M e que contém o respectivo arco da rotação. Por simplificação da leitura da resolução gráfica, omitiu-se a representação do plano horizontal – (π_0). Para transformar a recta a numa recta frontal (de frente), a sua projecção horizontal, a_1 , após a rotação, tem de ficar paralela ao eixo X . Assim, porque o segmento $[OM]$ é perpendicular a a , o segmento $[OM]$ tem de rodar até ficar de topo, ou seja, tem de rodar até a projecção frontal de M , após a rotação, ficar coincidente com O_2 . O ponto M' é o ponto M rodado.

Efectuada a rotação de $[OM]$, sabe-se que a projecção horizontal da recta a , após a rotação (a'_1), passa por M'_1 e é perpendicular a $[O_1M'_1]$, sendo a' a recta a rodada. Note que, pelo exposto, a'_1 fica paralela ao eixo X , que era o pretendido. Neste momento, já temos um ponto para definir a recta a' – o ponto M' . Falta-nos outro ponto. Efectuemos a rotação do ponto N . O ponto Q é o centro da rotação de N . Rodou-se o ponto N ao longo de um outro plano horizontal (de nível), de forma a N'_1 ficar sobre a'_1 , sendo N' o ponto N rodado. Note que se omitiu, também, a representação do plano horizontal (de nível) que contém o arco da rotação do ponto N . N'_2 , a projecção frontal do ponto N rodado, está na paralela ao eixo X que passa por N_2 (que corresponde ao traço frontal do plano horizontal que contém o seu arco de rotação, e cuja identificação se omitiu). A projecção frontal da recta a rodada, a'_2 , está definida por M'_2 e N'_2 . Note que a rotação da recta se processou no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio, mas que se poderia ter processado em sentido oposto.



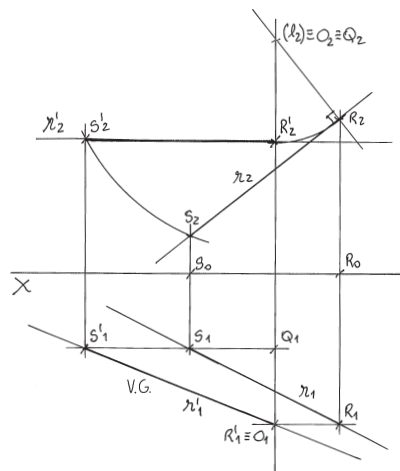
669.

Desenharam-se as projecções do segmento $[AB]$ e da sua recta suporte – a recta r . Para determinar a V.G. do segmento, transformando o segmento de recta num segmento frontal (de frente), há que rodar a recta r (a recta suporte do segmento) de forma a que r se transforme numa recta frontal (de frente) – ver relatório do exercício anterior. Localizou-se o eixo de rotação (recta e), vertical, de forma a que o ponto B seja o ponto a rodar. Os pontos O e Q são os centros dos arcos de rotação dos pontos B e A , respectivamente. Omitiu-se a identificação dos planos horizontais (de nível) que contêm os arcos de rotação dos pontos A e B . O segmento $[A'B']$ é o segmento $[AB]$ rodado e está paralelo ao Plano Frontal de Projecção – é frontal (de frente). A V.G. do segmento $[AB]$ está, assim, na projecção frontal do segmento $[A'B']$ – a V.G. de AB é $A'_2 B'_2$. Note que a rotação do segmento se processou no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio, mas que se poderia ter processado em sentido oposto.

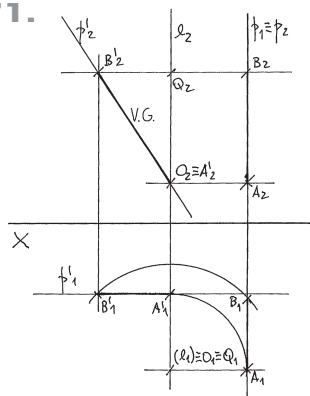


670.

Desenharam-se as projecções do segmento **[RS]** e da sua recta suporte – a recta **r**. Para determinar a V.G. do segmento, transformando o segmento de recta num segmento horizontal (de nível), há que rodar a recta **r** (a recta suporte do segmento) de forma a que **r** se transforme numa recta horizontal (de nível) – ver relatório do exercício 667. Localizou-se o eixo de rotação (recta **e**), de topo, de forma a que o ponto **R** seja o ponto a rodar. Os pontos **O** e **Q** são os centros dos arcos de rotação dos pontos **R** e **S**, respectivamente. Omitiu-se a identificação dos planos horizontais (de nível) que contêm os arcos de rotação dos pontos **R** e **S**. O segmento **[R'S']** é o segmento **[RS]** rodado e está paralelo ao Plano Horizontal de projecção – é horizontal (de nível). A V.G. do segmento **[RS]** está, assim, na projecção horizontal do segmento **[R'S']** – a V.G. de **RS** é **R'₁ S'₁**. Note que a rotação do segmento se processou no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio, mas que se poderia ter processado em sentido oposto.



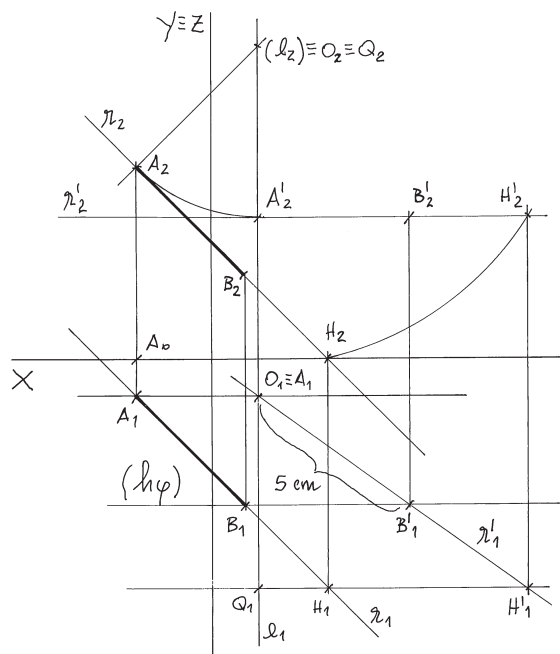
671.



Em primeiro lugar, desenharam-se as projecções do segmento **[AB]** e da sua recta suporte – a recta **p**, de perfil. Ver relatório do exercício 669. Localizou-se o eixo de rotação (recta **e**), vertical, de forma a que o ponto **A** seja o ponto a rodar. Os pontos **O** e **Q** são os centros dos arcos de rotação dos pontos **A** e **B**, respectivamente. Omitiu-se a identificação dos planos horizontais (de nível) que contêm os arcos de rotação. O segmento **[A'B']** é o segmento **[AB]** rodado e é frontal (de frente). A V.G. de **[AB]** está, assim, na projecção frontal de **[A'B']** – a V.G. de **AB** é **A'₂ B'₂**.

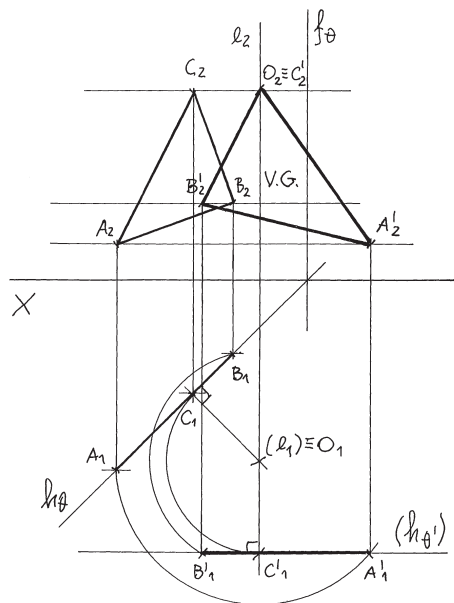
672.

Em primeiro lugar, desenharam-se as projecções da recta **r**, a recta suporte do segmento **[AB]**, em função dos dados. Não é possível, de forma imediata, determinar as projecções do segmento, pois como a recta suporte do segmento é uma recta **obliqua** (é obliqua a ambos os planos de projecção), o **segmento não se projecta em V.G.** em nenhum dos planos de projecção. Assim, para determinar as projecções do segmento há que, em primeiro lugar, conseguir que a recta suporte do segmento fique paralela a um dos planos de projecção. Recorrendo a uma **rotação**, é possível transformar a recta **r** numa **recta frontal** (de frente) ou numa **recta horizontal** (de nível), sendo que, em qualquer das duas situações, é possível obter a V.G. do segmento numa das projecções (o que não é possível numa recta obliqua). Optou-se pela segunda hipótese – transformou-se a recta **r** numa recta horizontal (de nível), seguindo os procedimentos expostos no relatório do exercício 667. A recta **e** é o eixo de topo a que se recorreu para transformar a recta **r** numa recta horizontal (de nível). Localizou-se o eixo de rotação, de forma a que o ponto **A** fosse o ponto a rodar. O ponto **H** (o traço horizontal da recta) foi o segundo ponto da recta que se rodou e que nos permitiu determinar a projecção horizontal da recta, após a rotação. Note que a escolha do traço horizontal da recta para segundo ponto não foi aleatória – de facto, atendendo a que **B** tem de se situar para a direita de **A**, pressupõe-se que **B** terá de se situar entre **A** e **H**, o que nos permite o raciocínio que se segue. A recta **r'** (a recta **r** rodada) é uma recta horizontal (de nível), pelo que a V.G. do segmento está na sua projecção horizontal. Assim, sobre **r'₁** e a partir de **A'₁**, no sentido de **H'₁** (uma vez que **B** se situa à direita de **A**), mediram-se os 5 cm, obtendo-se **B'₁** – **B'₂** situa-se sobre **r'₂**, na linha de chamada de **B'₁**. Em seguida, para inverter o processo da rotação conduziu-se, por **B'₁**, o plano frontal (de frente) ϕ , que contém o arco da rotação do ponto **B** – o ponto de intersecção de (h_ϕ) com **r'₁** é **B₁**, a projecção horizontal de **B**. A partir de **B₁** obteve-se **B₂**, sobre **r₂** e na mesma linha de chamada. A partir das projecções de **A** e **B**, desenharam-se as projecções do segmento **[AB]** pretendido.

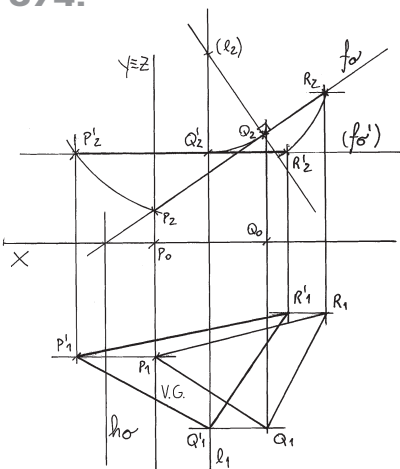


673.

Em primeiro lugar, representou-se o plano θ pelos seus traços e determinaram-se as projecções dos pontos **A**, **B** e **C**, pertencentes a θ , desenhando-se as projecções do triângulo em seguida. Note que o triângulo **[ABC]** não se projecta em V.G. em nenhum dos planos de projecção, pois o plano θ (o plano que o contém) não é paralelo a nenhum dos planos de projecção. Para determinar a verdadeira grandeza do triângulo **[ABC]**, transformando o plano θ num plano frontal (de frente), é necessário rodar o plano em torno de um eixo **vertical** – ao longo da rotação, os pontos mantêm as cotas e alteram os seus afastamentos, pelo que os arcos de rotação estão contidos em planos horizontais (de nível). Conduziu-se um eixo de rotação vertical (recta **e**), de tal forma que o ponto **C** é o ponto a rodar – nesse sentido, o segmento **[OC]** é simultaneamente ortogonal ao plano e ao eixo de rotação, sendo **O** o centro da rotação de **C**. Para transformar o plano θ num plano frontal (de frente), o seu traço horizontal, h_θ , após a rotação, tem de ficar paralelo ao eixo **X**. Assim, porque o segmento **[OC]** é ortogonal a h_θ , o segmento **[OC]** tem de rodar até ficar de topo (ortogonal ao eixo **X**), ou seja, até se ter $C'_2 \equiv O_2$, sendo **C'** o ponto **C** rodado. Efectuada a rotação de **[OC]**, sabe-se que o traço horizontal do plano, h_θ , após a rotação ($h_{\theta'}$), passa por C'_1 e é perpendicular a $[O_1C'_1]$, ou seja, fica paralelo ao eixo **X**, que era o pretendido. Note que se omitiu a representação do plano horizontal (de nível) no qual existe o arco da rotação do ponto **C**. O plano θ' (que é o plano θ rodado), já é um plano frontal (de frente), pelo que está paralelo ao Plano Frontal de Projecção. Em seguida rodaram-se os pontos **A** e **B**, em arcos com a mesma amplitude e no mesmo sentido do da rotação de **C**, de forma a que **A'** e **B'** se situem sobre ($h_{\theta'}$), sendo **A'** e **B'** os pontos **A** e **B** rodados. **A** e **B** rodaram em planos horizontais (de nível), à semelhança de **C**, pelo que mantiveram as suas cotas, o que nos permitiu determinar **A'_2** e **B'_2**. Note que também se omitiu a representação dos planos horizontais (de nível) que contêm os arcos de rotação de **A** e **B**. Determinadas as projecções dos três pontos, após a rotação do plano θ , e atendendo a que, na sua nova posição, o plano é um plano frontal (de frente), o triângulo projecta-se em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projecção – a verdadeira grandeza do triângulo **[ABC]** está no triângulo **[A'_2B'_2C'_2]**. Note que a rotação do plano se processou no sentido contrário aos ponteiros do relógio, mas que se poderia ter processado em sentido oposto. Note ainda que **não seria possível** transformar o plano θ num plano horizontal (de nível), pois um plano horizontal (de nível) é **projectante frontal** enquanto que um plano vertical e um plano frontal (de frente) são, **ambos**, planos **projectantes horizontais** (um plano frontal é um caso particular dos planos projectantes horizontais).



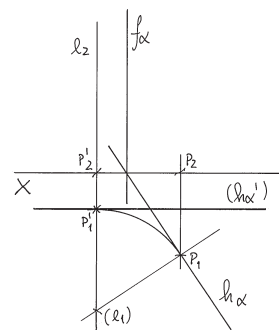
674.



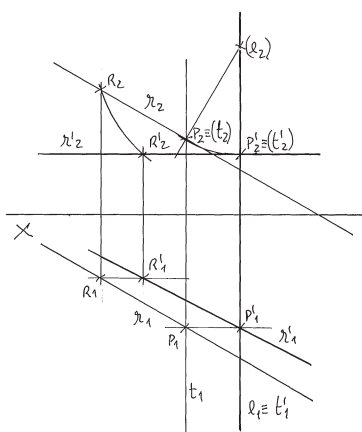
Em primeiro lugar, determinaram-se as projecções dos pontos **P** e **Q**, o que nos permitiu determinar os traços do plano σ . Em seguida determinaram-se as projecções do ponto **R**, pertencente a σ , e desenharam-se as projecções do triângulo. Note que o triângulo **[PQR]** não se projecta em V.G. em nenhum dos planos de projecção, pois o plano σ não é paralelo a nenhum dos planos de projecção. Para determinar a verdadeira grandeza do triângulo **[PQR]**, transformando o plano σ num plano horizontal (de nível), é necessário rodar o plano em torno de um eixo **de topo** – ao longo da rotação, os pontos mantêm os afastamentos e alteram as suas cotas, pelo que os arcos de rotação estão contidos em planos frontais (de frente). Conduziu-se um eixo de rotação de topo (recta **e**), de tal forma que o ponto **Q** é o ponto a rodar – nesse sentido, o segmento **[OQ]** é simultaneamente ortogonal ao plano e ao eixo de rotação, sendo **O** o centro da rotação de **Q** (note que, para simplificação da leitura gráfica da resolução, se omitiu a representação do ponto **O**, apesar de, neste relatório, se fazer referência ao ponto). Para transformar o plano σ num plano horizontal (de nível), o seu traço frontal, f_σ , após a rotação, tem de ficar paralelo ao eixo **X**. Assim, porque o segmento **[OQ]** é perpendicular a f_σ , o segmento **[OQ]** tem de rodar até ficar vertical (ortogonal ao eixo **X**), ou seja, até se ter $Q'_1 \equiv O_1$, sendo **Q'** o ponto **Q** rodado. Efectuada a rotação de **[OQ]**, sabe-se que o traço frontal do plano, f_σ , após a rotação ($f_{\sigma'}$), passa por Q'_2 e é perpendicular a $[O_2Q'_2]$, ou seja, fica paralelo ao eixo **X**, que era o pretendido. Note que se omitiu a representação do plano frontal (de frente) no qual existe o arco da rotação do ponto **Q**. O plano σ' (que é o plano σ rodado), já é um plano horizontal (de nível), pelo que está paralelo ao Plano Horizontal de Projecção. Em seguida, rodaram-se os pontos **P** e **R**, em arcos com a mesma amplitude e no mesmo sentido do da rotação de **Q**, de forma a que **P'_2** e **R'_2** se situem sobre ($f_{\sigma'}$), sendo **P'** e **R'** os pontos **P** e **R** rodados. **P** e **R** rodaram em planos frontais (de frente), à semelhança de **Q**, pelo que mantiveram os seus afastamentos, o que nos permitiu determinar **P'_1** e **R'_1**. Note que também se omitiu a representação dos planos frontais (de frente) que contêm os arcos de rotação de **P** e **R**. Determinadas as projecções dos três pontos, após a rotação do plano σ , e atendendo que, na sua nova posição, o plano é um plano horizontal (de nível), o triângulo projecta-se em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projecção – a verdadeira grandeza do triângulo **[PQR]** está no triângulo **[P'_1Q'_1R'_1]**. Note que a rotação do plano se processou no sentido dos ponteiros do relógio, mas que se poderia ter processado em sentido contrário. Note ainda que **não seria possível** transformar o plano σ num plano frontal (de frente), pois um plano frontal (de frente) é **projectante horizontal**, enquanto que um plano de topo e um plano horizontal (de nível) são, **ambos**, planos **projectantes frontais** (um plano horizontal é um caso particular dos planos projectantes frontais).

675.

Ao transformar um plano vertical num plano frontal (de frente), as alterações processam-se ao nível dos afastamentos dos pontos, mantendo-se as suas cotas – os arcos de rotação existem, assim, em planos horizontais (de nível), pelo que o eixo de rotação é uma **recta vertical** (ver relatório do exercício 673). Representou-se uma recta e , vertical, qualquer (o eixo de rotação) e determinou-se um ponto do plano que nos permita rodar o plano – o ponto P é um ponto de h_α e é o ponto que nos permite rodar o plano, pois o segmento que nos permite rodar o plano é ortogonal a α e perpendicular ao eixo de rotação (omitiu-se a representação do centro da rotação de P). Rodando o ponto P , conforme exposto no relatório do exercício 673, obteve-se o plano α na sua nova posição, após a rotação – o plano α' . Note que a rotação do plano se processou no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio, mas que se poderia ter processado em sentido oposto.



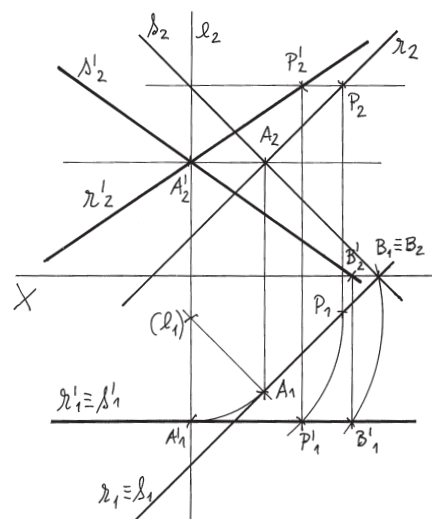
676.



- a) Trata-se de um **plano de topo**, pois um plano definido por uma recta oblíqua e uma recta de topo (projectante frontal) é, **necessariamente**, um plano projectante frontal (de topo).
- b) Para transformar um plano de topo num plano horizontal (de nível), as alterações processam-se ao nível das cotas dos pontos, mantendo-se os seus afastamentos – os arcos de rotação existem, assim, em planos frontais (de frente), pelo que o eixo de rotação é uma **recta de topo** (ver relatório do exercício 674). Desenharam-se as projecções de uma recta e (o eixo de topo), de forma a que o ponto P seja o ponto a rodar – o segmento da rotação que passa por P é ortogonal ao plano (omitiu-se a representação do centro da rotação de P) e perpendicular ao eixo da rotação. O ponto P rodou até ao segmento da rotação ficar vertical – como o segmento da rotação é perpendicular a r_2, r'_2 (a projecção frontal da recta r rodada) fica paralela ao eixo X , pelo que λ se tornou num plano horizontal (de nível). Para definir a recta r , na sua nova posição, necessitamos de um outro ponto. Representou-se um ponto R , qualquer, pertencente à recta r . O ponto R rodou até R'_2 (a projecção frontal do ponto R rodado) se situar sobre r'_2 , a partir do que se determinou R'_1 , com o afastamento de R . A partir de R'_1 é possível desenhar r'_1 . Repare que o processo descrito corresponde à rotação de uma recta oblíqua, no sentido de a transformar numa recta horizontal (de nível) – ver relatório do exercício 667. A recta t , de topo, após a rotação, passa por P' e continua a ser uma recta de topo, pelo que se tem $P'_2 = (t'_2)$. A recta r' (a recta r rodada) é horizontal (de nível) e a recta t' (a recta t rodada) continua a ser uma recta de topo – o plano, agora, está definido por uma recta horizontal (de nível) e por uma recta de topo, pelo que se tornou num **plano horizontal (de nível)** conforme pretendido.

677.

- a) Trata-se de um **plano vertical** (ver exercício 362).
- b) Para transformar um plano vertical num plano frontal (de frente), as alterações processam-se ao nível dos afastamentos dos pontos, mantendo-se as suas cotas – os arcos de rotação existem, assim, em planos horizontais (de nível), pelo que o eixo de rotação é uma **recta vertical** (ver relatório do exercício 673). Desenharam-se as projecções de uma recta e (o eixo vertical), de forma a que o ponto A seja o ponto a rodar. O ponto A' é o ponto A rodado, e é um ponto que pertence às duas rectas, após a rotação (é **necessariamente** o ponto de concorrência das rectas rodadas). Note que o exercício pode ser entendido, também, como a transformação de **duas rectas oblíquas** em rectas frontais (de frente) – ver relatório do exercício 668. O ponto B é o ponto de concorrência da recta s com o eixo X e é o ponto cuja rotação nos permitiu determinar s'_2 . O ponto P é um ponto qualquer da recta r e é o ponto cuja rotação nos permitiu determinar r'_2 . As rectas r' e s' , concorrentes em A' , são as rectas r e s rodadas, respectivamente, são frontais (de frente) e o plano que ambas definem é **necessariamente** um plano frontal (de frente).



678.

O processo dos **rebatimentos** consiste na rotação de um plano em torno de uma das suas rectas (o eixo de rotação ou charneira do rebatimento), de forma a fazê-lo coincidir com outro plano (em geral um dos planos de projecção ou um plano paralelo a um dos planos de projecção, de forma a obter a V.G. das figuras contidas no plano).

679.

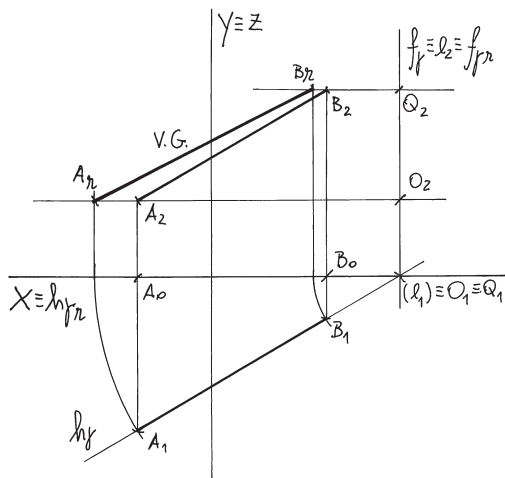
O processo da **rotação** e o processo do **rebatimento** são, afinal, **o mesmo processo** – em ambos se efectua uma rotação em torno de uma recta (o eixo da rotação). No entanto, no **rebatimento**, o eixo de rotação é uma recta **complanar com a figura a rebater** (é uma recta do plano que contém a figura), enquanto que, na **rotação**, o eixo é exterior ao plano que contém a figura, sendo essa a principal diferença entre os dois processos. Como consequência dessa diferença, tem-se que só é possível rebater objectos contidos em planos (para que o eixo seja coplanar com o objecto), enquanto que é possível rodar qualquer tipo de objecto (é possível, por exemplo, rodar uma pirâmide, mas **não é possível** rebater uma pirâmide).

680.

A **charneira do rebatimento** é a recta de intersecção entre o plano a rebater e o plano para o qual se efectua o rebatimento.

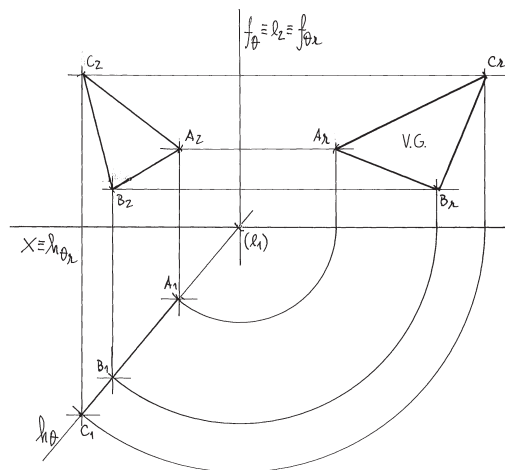
681.

Em primeiro lugar, desenharam-se as projecções do segmento **[AB]**, em função dos dados. Em seguida desenharam-se os traços do plano projectante horizontal do segmento – o plano vertical γ que contém o segmento. Para rebater o plano γ para o Plano Frontal de Projecção, há que, em primeiro lugar, identificar a **charneira do rebatimento** – a charneira é f_γ que é a recta de intersecção do plano a rebater (o plano γ) com o plano para o qual se processa o rebatimento (o Plano Frontal de Projecção). Assim sendo, a charneira (o eixo de rotação) é o traço frontal do plano, f_γ , que roda sobre si próprio, pelo que se tem $f_\gamma = e_2 = f_\gamma$. A projecção horizontal da charneira é um ponto (a charneira é uma recta vertical). O traço horizontal do plano, h_γ , roda até ao eixo X , pelo que se tem $h_\gamma = X$. A charneira é uma recta vertical, pelo que os arcos do rebatimento (de rotação) existem em planos horizontais (de nível) – planos ortogonais à charneira do rebatimento. Analisemos, em seguida, o rebatimento do ponto **A**. O arco da rotação do ponto **A** está contido no plano horizontal (de nível) que passa por **A** (cuja representação se omitiu) e tem centro em **O** (o ponto de intersecção do plano horizontal com a charneira). O arco do rebatimento (rotação) de **A** projecta-se em V.G. no Plano Horizontal de Projecção – com o compasso, fazendo centro em O_1 e raio até A_1 , desenhou-se a projecção horizontal do arco do rebatimento de **A**, de h_γ até h_γ (até ao eixo X), onde se situa A_{1r} (que não se representa). Uma vez que o ponto **A** mantém a cota ao longo do rebatimento (que se processa num plano horizontal), a partir de A_{1r} (que não se representou) determina-se A_r , na mesma linha de chamada e com a cota de **A** (seguindo a linha horizontal que passa por A_2 e corresponde ao traço frontal do plano horizontal que contém **A**). O procedimento para o rebatimento do ponto **B** foi idêntico ao descrito para o ponto **A**, sendo **Q** o centro do seu arco do rebatimento (também não se representou o plano horizontal que contém o arco do rebatimento de **B**). O segmento **[A_rB_r]** situa-se no Plano Frontal de Projecção e é o segmento **[AB]** rebatido. A V.G. de **AB** é **A_rB_r**. Note que, com vista a uma simplificação da leitura gráfica da resolução, é possível (e desejável) a omissão da representação dos centros dos arcos do rebatimento dos pontos **A** e **B**. Note ainda que, tendo-se rebatido o plano γ para o lado esquerdo, seria igualmente possível efectuar o seu rebatimento para o lado direito, como se observará na resolução do exercício seguinte.



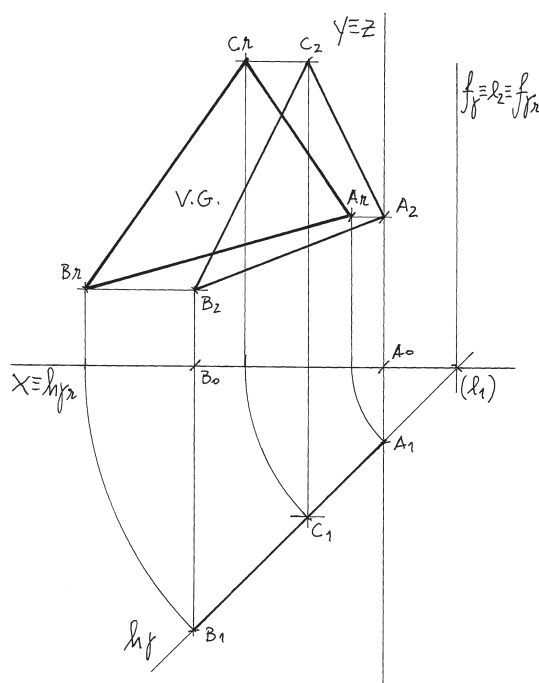
682.

Em primeiro lugar, representou-se o plano θ , pelos seus traços, e determinaram-se as projecções dos pontos **A**, **B** e **C**, pertencentes ao plano, desenhando-se em seguida as projecções do triângulo. Para rebater o plano θ para o Plano Frontal de Projecção, a charneira é f_θ (a recta de intersecção do Plano Frontal de Projecção com θ), e os arcos do rebatimento projectam-se em V.G. no Plano Horizontal de Projecção (ver exercício anterior). Após a identificação da charneira do rebatimento e da posição dos traços do plano em rebatimento, efectuou-se o rebatimento de cada um dos pontos conforme exposto no relatório do exercício anterior para o ponto **A**, pelo que se aconselha a leitura do respectivo relatório. A V.G. do triângulo **[ABC]** está no triângulo **[A₁B₁C₁]**. Note que se efectuou o rebatimento do plano θ para o lado direito, mas que o mesmo se poderia ter efectuado para o lado esquerdo, à semelhança do exercício anterior – essa opção teria, como consequência, o facto de o triângulo, em rebatimento, se sobrepor à própria projecção frontal do triângulo, que é a situação que se observa no exercício seguinte.



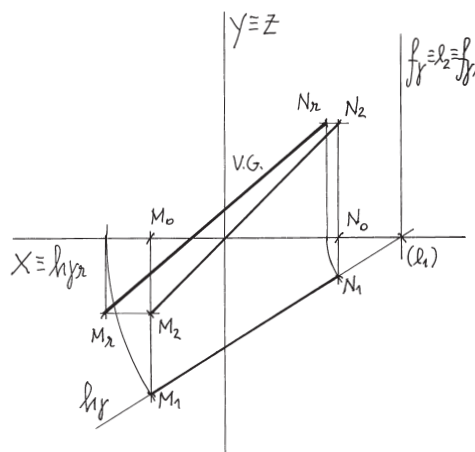
683.

Em primeiro lugar, determinaram-se as projecções dos pontos **A** e **B**, o que nos permitiu determinar os traços do plano γ (h_γ passa necessariamente por **A₁** e **B₁**, pois γ é projectante horizontal). Em seguida determinaram-se as projecções do ponto **C**, pertencente a γ , e desenharam-se as projecções do triângulo. Sobre a determinação da V.G. do triângulo **[ABC]**, ver relatório do exercício anterior.



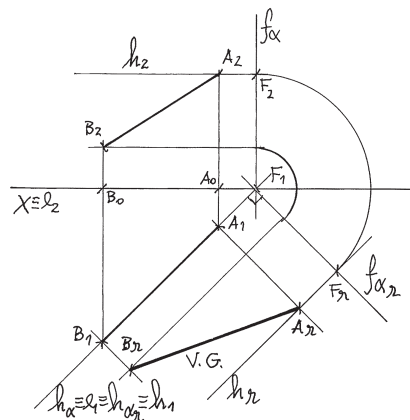
684.

Ver exercício 681 e respectivo relatório. Note que a diferença entre a situação deste exercício e a do exercício 681 reside, apenas, no facto de o ponto **M** ter cota negativa, mas que não altera em nada os raciocínios expostos naquele relatório – o ponto **M**, no seu rebatimento, mantém a cota, que é negativa.

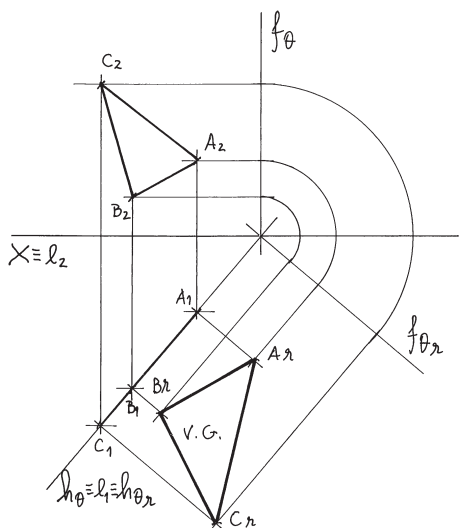


685.

Em primeiro lugar desenharam-se as projecções do segmento $[AB]$, em função dos dados. Em seguida desenharam-se os traços do plano projectante horizontal do segmento – o plano vertical α que contém o segmento. Para rebater o plano α para o Plano Horizontal de Projectação, há que, em primeiro lugar, identificar a **charneira do rebatimento** (que é a recta de intersecção de α com o Plano Horizontal de Projectação) e a posição dos traços do plano em rebatimento. A charneira é h_α que roda sobre si próprio, pelo que se tem $h_\alpha \equiv e_1 \equiv h_\alpha$. Os traços do plano, no espaço, fazem entre si ângulos de 90° que, em rebatimento, estão em V.G. – f_α é, assim, perpendicular a h_α no ponto de concorrência dos dois traços, que é um ponto fixo (é um ponto da charneira, pelo que roda sobre si próprio). A charneira é uma recta horizontal (de nível) com cota nula (a sua projecção frontal está no eixo X), pelo que os arcos do rebatimento existem em planos verticais, ortogonais a h_α e que **não se projectam em V.G. em nenhum dos planos de projecção**. De facto, uma vez que a charneira é uma recta horizontal (de nível), e atendendo a que os arcos do rebatimento existem em planos ortogonais à charneira, nesta situação os arcos do rebatimento estão contidos em **planos verticais** – estes **não são** paralelos a nenhum dos planos de projecção, pelo que não se projectam nunca em verdadeira grandeza. Há, então, que contornar a situação, pois não se poderão desenhar os arcos do rebatimento. Nesse sentido, há a registar que, neste rebatimento, o **raio** do arco do rebatimento de cada ponto é necessariamente a **cota** desse ponto. Assim, no rebatimento do ponto **A**, por exemplo, o **raio** do seu arco do rebatimento é a própria cota de **A**. Começemos por desenhar uma recta perpendicular à charneira, passando por A_1 – esta recta corresponde ao traço horizontal do plano vertical (ortogonal à charneira) que contém o arco do rebatimento de **A**. Uma vez que o arco do rebatimento de **A** existe nesse plano, A_1 terá de se situar sobre essa perpendicular à charneira (o plano que contém o arco do rebatimento de **A** é projectante horizontal). O centro do arco do rebatimento é o próprio A_1 (que corresponde ao ponto de intersecção da charneira com o plano vertical que contém o arco do rebatimento de **A**) – A_1 situar-se-á sobre a perpendicular à charneira que passa por A_1 , tal que A_1A_1 é o **raio** do arco do rebatimento, ou seja, A_1A_1 é a **cota** de **A**. Para tal, transportou-se a cota de **A** para f_α , através de uma recta horizontal (de nível) h do plano, obtendo F , o traço frontal de h sobre f_α . Com o recurso ao compasso, fazendo centro no ponto de concorrência de h_α com f_α (que é o ponto fixo de f_α , pois é um ponto da charneira) e raio até F_2 , transportou-se a cota de F (que é igual à de **A**) para f_α , obtendo F_1 . Note que o arco desenhado não tem correspondência directa no espaço, sendo um mero arco de transporte. Por F_1 conduziu-se h_1 , paralela a h_α (rectas horizontais de um plano são paralelas entre si e paralelas ao traço horizontal do plano). O ponto de intersecção de h_1 com a perpendicular à charneira que passa por A_1 é A_2 . Note que, para simplificar a leitura da resolução gráfica, é possível (e desejável) omitir a representação da recta h e do seu traço frontal, F , embora estes elementos devam estar sempre presentes ao nível dos raciocínios. Repetiu-se o processo para o ponto **B**, obtendo-se B_2 . Note que, de acordo com o que acima se referiu, se omitiu, em projecções e em rebatimento, a representação da recta que nos permitiu rebater o ponto **B** (a recta horizontal que passa por **B**), bem como do seu traço frontal. O segmento $[AB]$ está em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projectação, em rebatimento – o segmento $[A_2B_2]$ é a verdadeira grandeza do segmento $[AB]$.



686.

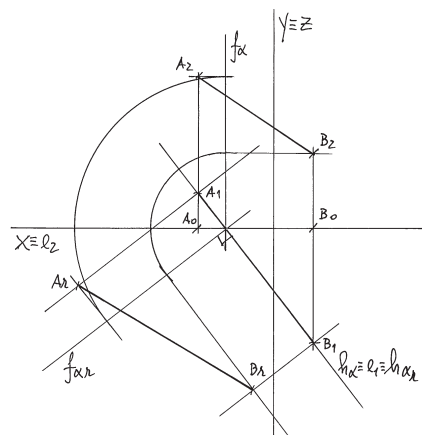


a) Para rebater o plano θ para o Plano Horizontal de Projectação, há que, em primeiro lugar, identificar a **charneira do rebatimento** e a posição dos traços do plano em rebatimento. A charneira é h_θ que roda sobre si próprio, pelo que se tem $h_\theta \equiv e_1 \equiv h_\theta$. Os traços do plano, no espaço, fazem entre si ângulos de 90° , pelo que f_θ é perpendicular a h_θ no ponto de concorrência dos dois traços, que é fixo (é um ponto da charneira – roda sobre si próprio). A charneira é uma recta horizontal (de nível) com cota nula (e_2 está no eixo X), pelo que os arcos do rebatimento existem em planos verticais, ortogonais a h_θ e que **não se projectam em V.G. em nenhum dos planos de projecção**. Assim, sobre os procedimentos necessários ao rebatimento de cada um dos vértices do triângulo, ver relatório do exercício anterior, para os pontos **A** e **B**. Repare que se omitiu a representação das rectas horizontais (de nível) que nos permitiram rebater cada um dos pontos, bem como dos respectivos traços frontais. O triângulo $[ABC]$ está em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projectação, em rebatimento – o triângulo $[A_2B_2C_2]$ é a verdadeira grandeza do triângulo $[ABC]$.

b) As diferenças entre os dois rebatimentos incidem essencialmente sobre dois aspectos, sendo o segundo uma consequência do primeiro. Em primeiro lugar, no rebatimento do exercício 682 a charneira é uma **recta projectante**, o que não acontece na presente situação. Em segundo lugar, e decorrente da primeira diferença, no rebatimento do exercício 682, **os arcos do rebatimento projectavam-se em V.G. no Plano Horizontal de Projectação** (pois estavam contidos em planos horizontais, ortogonais à charneira e, portanto, paralelos ao Plano Horizontal de Projectação), enquanto que, na presente situação, os arcos do rebatimento não se projectam em V.G. em nenhum dos planos de projecção, pois os planos ortogonais à charneira não são paralelos a nenhum dos planos de projecção.

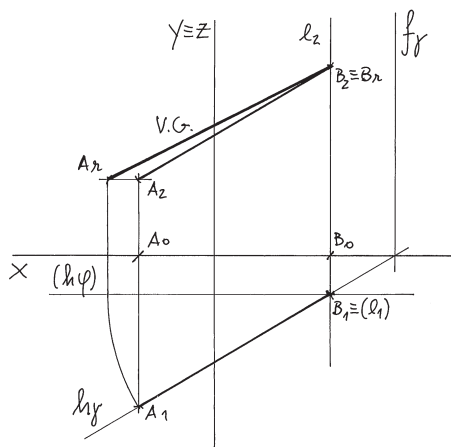
687.

Ver relatório do exercício 685. Note que a diferença entre a situação deste exercício e a do exercício 685 reside, apenas, no facto de o ponto **A** ter afastamento negativo, mas que não altera em nada os raciocínios expostos naquele relatório — o rebatimento do ponto **A** processa-se num plano ortogonal à charneira, pelo que **A_r** se situa **necessariamente** numa perpendicular à charneira que passa por **A₁**. O transporte da cota de **A** para o rebatimento seguiu todas as etapas referidas no relatório do exercício 685, tendo em conta, apenas, que **A_r** se situa para trás de **f_α**, pois tem afastamento negativo.



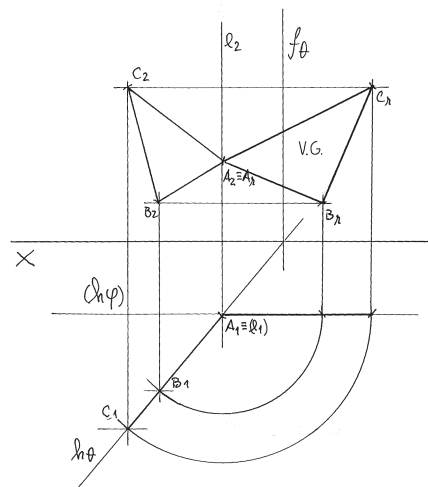
688.

O plano vertical γ é o plano projectante horizontal do segmento. O plano φ é o plano frontal (de frente) que contém o ponto **B**. Para rebater o plano γ para o plano φ há que, em primeiro lugar, determinar a charneira do rebatimento, que é a recta intersecção dos dois planos — a recta **e**, que é a recta vertical (projectante horizontal) que passa por **B**. A projecção horizontal da charneira é um ponto. A charneira do rebatimento é uma recta vertical, pelo que os arcos do rebatimento existem em planos horizontais (de nível) e projectam-se em V.G. no Plano Horizontal de Projecção. O ponto **B** é um ponto da charneira, pelo que é fixo — roda sobre si próprio, pelo que se tem **B_r ≡ B₂**. Note que, ao contrário da situação do exercício 681, em que **B_r** estava no Plano Frontal de Projecção (razão pela qual não se representaram as projecções de **B_r**), nesta situação **B_r** está **no espaço**, sobre o plano φ . Assim sendo, nesta situação, **B_r** tem efectivamente duas projecções — **B_{r1}** e **B_{r2}**. No entanto, convencionalmente, estas projecções não se representam. De facto, uma vez que se pretende determinar a verdadeira grandeza do segmento, representa-se, apenas, a projecção onde aquela existe, que é em projecção frontal, omitindo que se trata de uma projecção (por questões de simplificação de traçado), razão porque se indica, apenas, **B_r**, onde deverá estar **B_{r2}**. O rebatimento de **A** processou-se de forma idêntica à exposta no relatório do exercício 681. Assim, fazendo centro em (**e₁**) e raio até **A₁**, desenhou-se a projecção horizontal do seu arco do rebatimento, de **A₁** até (**h_φ**) — o rebatimento de **A** processou-se num plano horizontal (de nível), pelo que **A_r** tem cota igual a **A**. **A_r** situa-se **no espaço**, sobre φ , pelo que tem duas projecções. No entanto, à semelhança do referido para o ponto **B**, não se representam as projecções de **A_r**, indicando-se apenas **A_r**, onde deveria estar a sua projecção frontal (porque a verdadeira grandeza está na projecção frontal). O segmento [**A_rB_r**] está, agora, contido num plano frontal (de frente), pelo que se projecta em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projecção. **A_rB_r** é a verdadeira grandeza de [**AB**]. Note que, nesta situação, não se indica a posição dos traços do plano em rebatimento. **Vantagens em relação ao rebatimento efectuado no exercício 681:** o rebatimento efectuado neste exercício apresenta, como vantagem, uma maior economia de traçados, uma vez que foi necessário rebater apenas **um** ponto, ao contrário do exercício 681, em que foi necessário rebater os **dois** pontos. De facto, rebatendo o plano para um plano que contém um dos extremos do segmento, esse extremo é um ponto da charneira, pelo que é fixo (roda sobre si próprio), estando imediatamente rebatido.

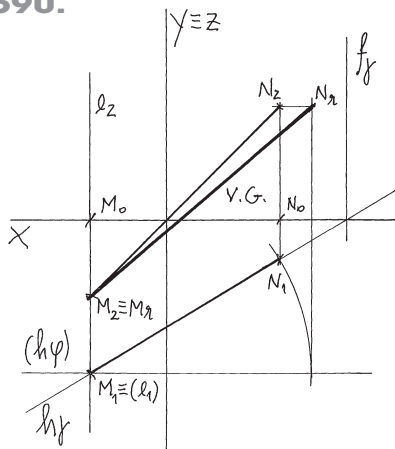


689.

Representou-se o plano θ e as projecções do triângulo $[ABC]$, em função dos dados. O plano φ é o plano frontal (de frente) que contém o ponto A . A charneira do rebatimento é a recta de intersecção do plano φ com o plano θ – é a recta vertical (projectante horizontal) que passa por A . O ponto A é um ponto da charneira, pelo que se tem, imediatamente, em projecção frontal, $A_r \equiv A_2$. O rebatimento dos outros dois vértices do triângulo efectuou-se como explicitado no relatório do exercício anterior para o ponto A , pelo que se aconselha a sua leitura. Note que, na presente situação, se efectuou o rebatimento do plano θ para a direita, mas que o rebatimento se poderia, igualmente, ter efectuado para a esquerda, à semelhança do exercício anterior. A V.G. do triângulo está no triângulo $[A_r B_r C_r]$.



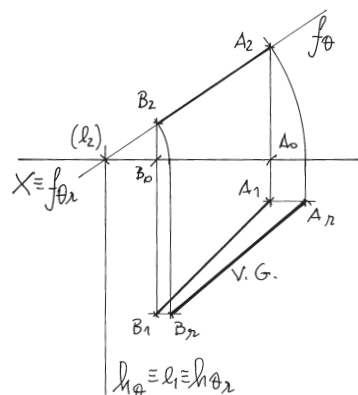
690.



Ver relatório do exercício 688. Note que a diferença entre a situação deste exercício e a do exercício 688 reside, apenas, no facto de o ponto M ter cota negativa. Atendendo a que o ponto M é um ponto da charneira, tem-se imediatamente $M_r \equiv M_2$.

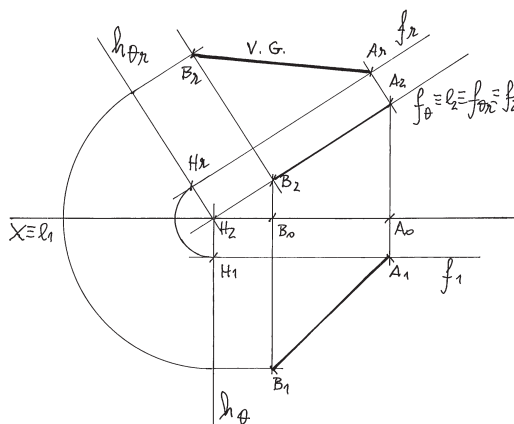
691.

Em primeiro lugar desenharam-se as projecções do segmento $[AB]$, em função dos dados. Em seguida desenharam-se os traços do plano projectante frontal do segmento – o plano de topo θ que contém o segmento. Para efectuar o rebatimento pedido há que, em primeiro lugar, identificar a **charneira do rebatimento** – a charneira é h_θ , que é a recta de intersecção do plano α a rebater (o plano θ) com o plano para o qual se processa o rebatimento (o Plano Horizontal de Projecção). Assim sendo, a charneira é o traço horizontal do plano, h_θ , que roda sobre si próprio, pelo que se tem $h_\theta \equiv e_1 \equiv h_{\theta_1}$. A projecção frontal da charneira é um ponto (a charneira é uma recta de topo). O traço frontal do plano, f_θ , roda até ao eixo X , pelo que se tem $f_\theta \equiv X$. A charneira é uma recta de topo, pelo que os arcos do rebatimento existem em planos frontais (de frente) – planos ortogonais à charneira. Analisemos, em seguida, o rebatimento do ponto A . O arco da rotação do ponto A está contido no plano frontal (de frente) que passa por A (cuja representação se omitiu) e o seu centro é o ponto de intersecção desse plano frontal com a charneira (note que se omitiu, também, a representação do centro do arco do rebatimento). O arco do rebatimento de A projecta-se em V.G. no Plano Frontal de Projecção – com o compasso, fazendo centro em (e_2) e raio até A_2 , desenhou-se a projecção frontal do arco do rebatimento de A , de f_θ até f_{θ_1} (até ao eixo X), onde se situa A_2 (que não se representa). Uma vez que o ponto A mantém o afastamento ao longo do rebatimento (que se processa num plano frontal), a partir de A_2 (que não se representou) determina-se A_r , na mesma linha de chamada e com o afastamento de A (seguindo a linha horizontal que passa por A_1 e que corresponde ao traço horizontal do plano frontal que contém A). O procedimento para o rebatimento do ponto B foi idêntico ao descrito para o ponto A . O segmento $[A_r B_r]$ situa-se no Plano Horizontal de Projecção e é o segmento $[AB]$ rebatido. A V.G. de $A B$ é $A_r B_r$. Note que, tendo-se rebatido o plano θ para o lado direito, seria igualmente possível efectuar o seu rebatimento para o lado esquerdo.



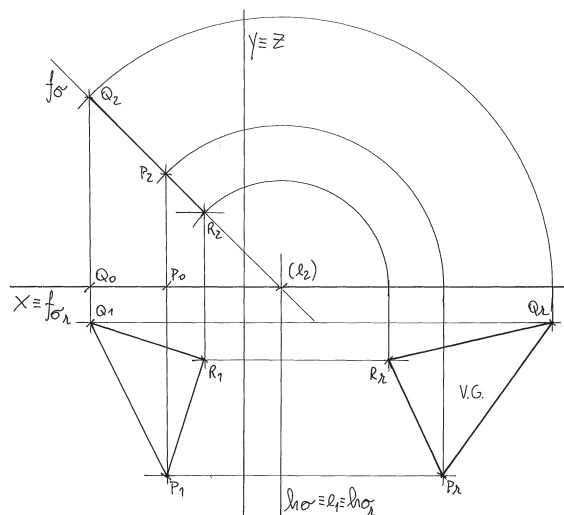
692.

- a) Para rebater o plano θ para o Plano Frontal de Projectação, há que, em primeiro lugar, identificar a **charneira do rebatimento** e a posição dos traços do plano em rebatimento. A charneira é f_θ que roda sobre si próprio, pelo que se tem $f_\theta \equiv e_2 \equiv f_\theta$. Os traços do plano, no espaço, fazem entre si ângulos de 90° , pelo que h_θ é perpendicular a f_θ no ponto de concorrência dos dois traços, que é fixo (é um ponto da charneira – roda sobre si próprio). A charneira é uma recta frontal (de frente) com cota nula (e está no eixo X), pelo que os arcos do rebatimento existem em planos ortogonais à charneira, nesta situação os arcos do rebatimento estão contidos em **planos de topo** – estes **não são** paralelos a nenhum dos planos de projecção, pelo que não se projectam em verdadeira grandeza. Há que contornar a situação, pois não se poderão desenhar os arcos do rebatimento. Nesse sentido, há a registar que, neste rebatimento, o **raio** do arco do rebatimento de cada ponto é necessariamente o **afastamento** desse ponto. Assim, no rebatimento do ponto **A**, por exemplo, o **raio** do seu arco do rebatimento é o próprio afastamento de **A**. Começemos por desenhar uma recta perpendicular à charneira, passando por A_2 – esta recta corresponde ao traço frontal do plano de topo (ortogonal à charneira) que contém o arco do rebatimento de **A**. Uma vez que o arco do rebatimento de **A** existe nesse plano, **A**, terá de se situar sobre essa perpendicular à charneira (o plano que contém o arco do rebatimento de **A** é projectante frontal). O centro do arco do rebatimento é o próprio A_2 (que corresponde ao ponto de intersecção da charneira com o plano de topo que contém o arco do rebatimento de **A**) – **A**, situar-se-á sobre a perpendicular à charneira que passa por A_2 , tal que A_1A_2 é o **raio** do arco do rebatimento, ou seja, A_1A_2 é o **afastamento** de **A**. Para tal, transportou-se o afastamento de **A** para h_θ através de uma recta frontal (de frente) f do plano, obtendo H , o traço horizontal de f sobre h_θ . Com o recurso ao compasso, fazendo centro no ponto de concorrência de f_θ com h_θ (que é o ponto fixo de h_θ , pois é um ponto da charneira) e raio até H_1 , transportou-se o afastamento de H (que é igual ao de **A**) para h_θ , obtendo H_r . Note que o arco desenhado não tem correspondência directa no espaço, sendo um mero arco de transporte. Por H_r conduziu-se f_r , paralela a f_θ (rectas frontais de um plano são paralelas entre si e paralelas ao traço frontal do plano). O ponto de intersecção de f_r com a perpendicular à charneira que passa por A_2 é A_r . Note que, para simplificar a leitura da resolução gráfica, é possível (e desejável) omitir a representação da recta f e do seu traço horizontal, H , embora estes elementos devam estar sempre presentes ao nível dos raciocínios. Repetiu-se o processo para o ponto **B**, obtendo-se B_r . Note que, de acordo com o que acima se referiu, se omitiu, em projecções e em rebatimento, a representação da recta que nos permitiu rebater o ponto **B** (a recta frontal que passa por **B**), bem como do seu traço horizontal. O segmento $[AB]$ está em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projectação, em rebatimento – o segmento $[A_rB_r]$ é a verdadeira grandeza do segmento $[AB]$.
- b) As diferenças entre os dois rebatimentos incidem essencialmente sobre dois aspectos, sendo o segundo uma consequência do primeiro. Em primeiro lugar, no rebatimento do exercício 691, a charneira é uma **recta projectante**, o que não acontece na presente situação. Em segundo lugar, e decorrente da primeira diferença, no rebatimento do exercício 691, **os arcos do rebatimento projectavam-se em V.G. no Plano Frontal de Projectação** (pois estavam contidos em planos frontais, ortogonais à charneira e, portanto, paralelos ao Plano Frontal de Projectação), enquanto que, na presente situação, os arcos do rebatimento não se projectam em V.G. em nenhum dos planos de projecção, pois os planos ortogonais à charneira não são paralelos a nenhum dos planos de projecção (são planos de topo).



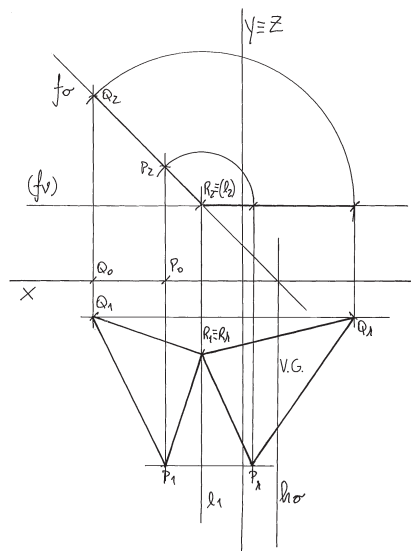
693.

Em primeiro lugar determinaram-se as projecções dos pontos **P** e **Q**, o que nos permitiu determinar os traços do plano σ (f_σ passa **necessariamente** por P_2 e Q_2 , pois σ é projectante frontal). Em seguida determinaram-se as projecções do ponto **R**, pertencente a σ , e desenharam-se as projecções do triângulo. Sobre a determinação da V.G. do triângulo $[PQR]$, ver relatório do exercício 691. A V.G. do triângulo está no triângulo $[P_rQ_rR_r]$.



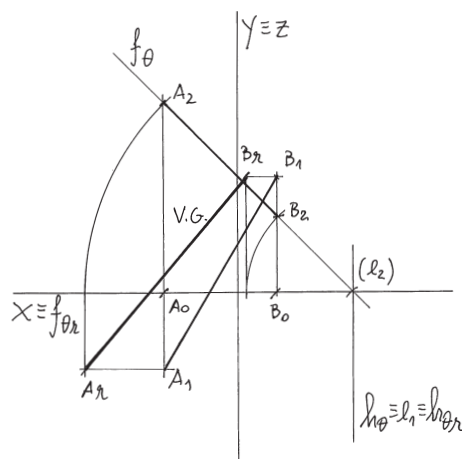
694.

Representou-se o plano σ e as projecções do triângulo $[PQR]$, conforme exposto no relatório do exercício anterior. O plano v é o plano horizontal (de nível) que contém o ponto R . A charneira do rebatimento é a recta de intersecção do plano v com o plano σ – é a recta de topo (projectante frontal) que passa por R . O ponto R é um ponto da charneira, pelo que se tem, imediatamente, em projecção horizontal, $R_r = R_1$. Note que, ao contrário da situação do exercício 691, em que A_r estava no Plano Horizontal de Projecção (razão pela qual não se representaram as projecções de A_r), nesta situação R_r está **no espaço**, sobre o plano v . Assim sendo, nesta situação, R_r tem efectivamente duas projecções – R_{r2} e R_{r1} . No entanto, convencionalmente, estas projecções não se representam. De facto, uma vez que se pretende determinar a verdadeira grandeza do segmento, representa-se, apenas, a projecção onde aquela existe, que é em projecção horizontal, omitindo que se trata de uma projecção (por questões de simplificação de traçado), razão porque se indica, apenas, R_r onde deverá estar R_{r1} . O rebatimento de Q processou-se de forma idêntica à exposta no relatório do exercício 691. Assim, fazendo centro em (e_2) e raio até Q_2 , desenhou-se a projecção frontal do seu arco do rebatimento, de Q_2 até (f_v) – o rebatimento de Q processou-se num plano frontal (de frente), pelo que Q_r tem afastamento igual a Q . Q_r situa-se **no espaço**, sobre v , pelo que tem duas projecções. No entanto, à semelhança do referido para o ponto R , não se representam as projecções de Q_r , indicando-se apenas Q_r onde deveria estar a sua projecção horizontal (porque a V.G. está na projecção horizontal). O rebatimento do ponto P processou-se de forma idêntica à exposta para o ponto Q . O triângulo $[P_rQ_rR_r]$ está, agora, contido num plano horizontal (de nível), pelo que se projecta em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projecção – a V.G. do triângulo $[PQR]$ está no triângulo $[P_rQ_rR_r]$. Note que, nesta situação, não se indica a posição dos traços do plano em rebatimento.



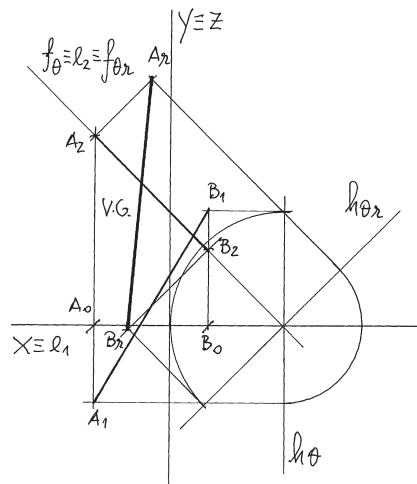
695.

Ver exercício 691 e respectivo relatório. Note que a diferença entre a situação deste exercício e a do exercício 691 reside, apenas, no facto de o ponto B ter afastamento negativo, mas que não altera em nada os raciocínios expostos naquele relatório – o ponto B , no seu rebatimento, mantém o afastamento, que é negativo.



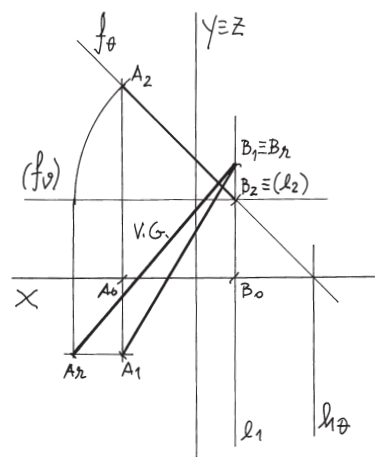
696.

Ver relatório do exercício 694. Note que a diferença entre a situação deste exercício e a do exercício 694 reside, apenas, no facto de o ponto B ter afastamento negativo. Esta diferença, que pode provocar alguma confusão, principalmente ao nível dos sentidos de rotação, não altera em nada os raciocínios expostos naquele relatório. O rebatimento do ponto B processa-se num plano ortogonal à charneira, pelo que B_r se situa numa perpendicular à charneira que passa por B_2 . O transporte do afastamento de B (que é negativo) para o rebatimento seguiu todas as etapas referidas no relatório do exercício 694, como em seguida se especifica. Por B_1 conduziu-se uma paralela ao eixo X (a projecção horizontal da recta frontal que contém B) e, a partir do ponto de intersecção desta com h_0 , desenhou-se o arco de transporte, **que roda necessariamente no mesmo sentido do do rebatimento de A, de h_0 até h_{0r}** . A partir deste ponto, conduziu-se uma paralela a f_{0r} e, no ponto de intersecção desta com a perpendicular à charneira que passa por B_2 , tem-se B_r .



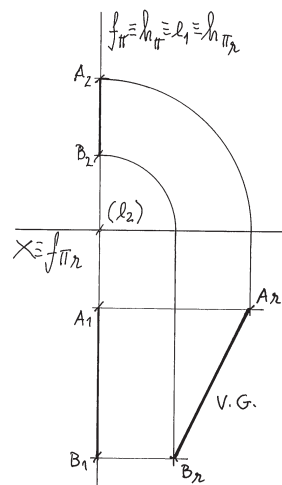
697.

Ver relatório do exercício 694. Note que a diferença entre a situação deste exercício e a do exercício 694 reside, apenas, no facto de o ponto **B** ter afastamento negativo. Atendendo a que o ponto **B** é um ponto da charneira, tem-se imediatamente $B_r \equiv B_1$.

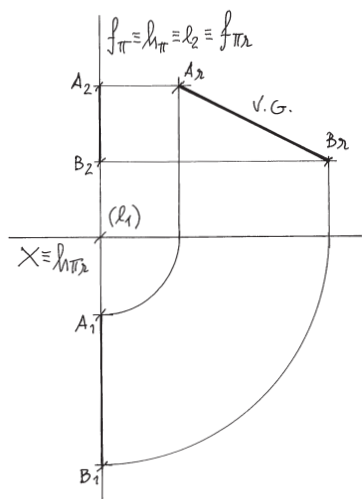


698.

Em primeiro lugar desenharam-se as projecções do segmento $[AB]$, em função dos dados, e representou-se, pelos seus traços, o plano π , o plano de perfil que contém o segmento. Para se efectuar um rebatimento há sempre que, em primeiro lugar, identificar a charneira do rebatimento – tratando-se de rebater o plano π para o Plano Horizontal de Projecção, a charneira é h_{π} (é a recta de intersecção do plano a rebater com o plano para o qual se processa o rebatimento), que roda sobre si próprio, pelo que se tem imediatamente $h_{\pi} \equiv e_1 \equiv h_{\pi}$. O traço frontal do plano em rebatimento, f_{π_r} , fica no eixo X , pelo que se tem $X \equiv f_{\pi_r}$. Como a charneira é uma recta **projectante frontal** (recta de topo), os arcos do rebatimento existem em planos frontais (de frente), pelo que se projectam em verdadeira grandeza no Plano Frontal de Projecção. Com centro em (e_2) e raio até A_2 , rodou-se A_2 até ao eixo X (onde se situa f_{π_r}), obtendo-se A_2 (que não se representou, por não ser necessário). O ponto **A** manteve o seu afastamento ao longo do rebatimento, pois rodou num plano frontal (de frente), facto que nos permitiu obter A_r . Repetiu-se o processo para **B**, obtendo B_r . O segmento, rebatido no Plano Horizontal de Projecção, está em verdadeira grandeza – $A_r B_r$ é, assim, a verdadeira grandeza de AB .



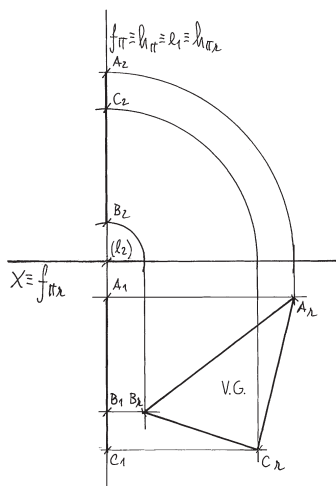
699.



A partir das projecções do segmento $[AB]$, representou-se, pelos seus traços, o plano π , o plano de perfil que contém o segmento. Em primeiro lugar há que identificar a charneira do rebatimento – tratando-se de rebater o plano π para o Plano Frontal de Projecção, a charneira é f_{π} (é a recta de intersecção do plano a rebater com o plano para o qual se processa o rebatimento), que roda sobre si próprio, pelo que se tem imediatamente $f_{\pi} \equiv e_2 \equiv f_{\pi}$. O traço horizontal do plano em rebatimento, h_{π_r} , fica no eixo X , pelo que se tem $X \equiv h_{\pi_r}$. Como a charneira é uma recta **projectante horizontal** (recta vertical), os arcos do rebatimento existem em planos horizontais (de nível), pelo que se projectam em verdadeira grandeza no Plano Horizontal de Projecção. Com centro em (e_1) e raio até A_1 , rodou-se A_1 até ao eixo X (onde se situa h_{π_r}), obtendo-se A_1 (que não se representou, por não ser necessário). O ponto **A** manteve a sua cota ao longo do rebatimento, pois rodou num plano horizontal (de nível), facto que nos permitiu obter A_r . Repetiu-se o processo para **B**, obtendo B_r . O segmento, rebatido no Plano Frontal de Projecção, está em verdadeira grandeza – $A_r B_r$ é, assim, a verdadeira grandeza de AB .

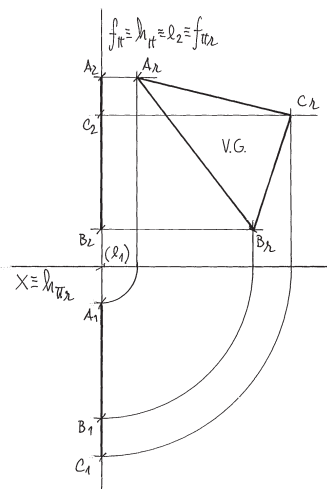
700.

Ver exercício **698** e respectivo relatório.



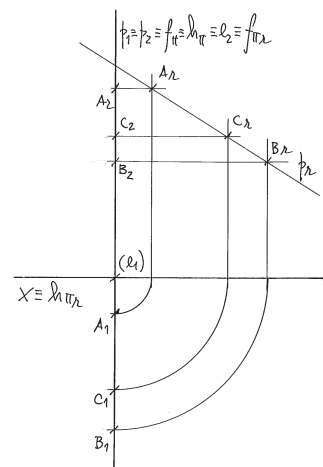
701.

Ver exercício **699** e respectivo relatório.



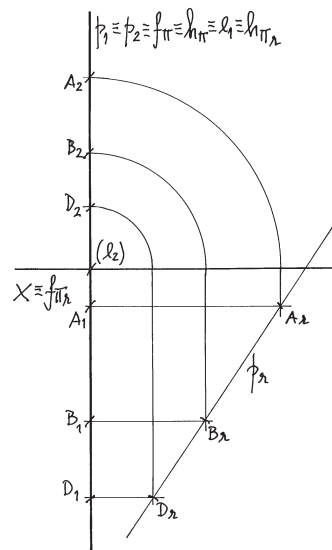
702.

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **A** e **B**, pelas suas projecções, e desenharam-se as projecções da recta **p**. Em seguida representou-se a projecção horizontal do ponto **C**, **C₁**, em função do seu afastamento. Não é possível determinar a projecção frontal do ponto **C**, **C₂**, de forma directa, pois a recta de perfil é a **única** recta que não verifica o **CrITÉrio de Reversibilidade**, ou seja, em que a condição para que um ponto pertença a uma recta é **condição necessária mas não suficiente** para que o ponto pertença, efectivamente, à recta. Assim, nesta situação, não basta que as projecções do ponto se situem sobre as projecções homónimas da recta para que o ponto pertença à recta. Há, pois, que recorrer a raciocínios e/ou a procedimentos auxiliares para determinar **C₂**. O processo mais rápido e mais fácil é, efectivamente, rebater a recta, rebatendo o plano de perfil que a contém. Assim conduziu-se, pela recta **p**, um plano de perfil π . Optou-se por rebater π para o Plano Frontal de Projectão (ver exercício 699 e respectivo relatório). Rebataram-se os pontos **A** e **B** e desenhou-se a recta **p** rebatida – **p_r**, passa por **A_r** e **B_r**. Em seguida rebateu-se o ponto **C**, através da projecção horizontal do seu arco do rebatimento e à semelhança do efectuado para os pontos **A** e **B**, determinando-se **C_r**, sobre **p_r** – o ponto **C** pertence à recta **p**, pelo que **C_r** tem de se situar sobre **p_r**. Para determinar **C₂**, a projecção frontal de **C**, é necessário inverter o processo do rebatimento, naquilo que se chama **inversão do rebatimento** ou **contrarebatimento**. Uma vez que os arcos do rebatimento estão contidos em planos horizontais (de nível), para determinar **C₂** basta conduzir, por **C_r**, uma paralela ao eixo **X** que corresponde ao traço frontal do plano horizontal (de nível) que contém o arco do rebatimento de **C**. O ponto de intersecção desta linha com **f_x** é **C₂**, a projecção frontal de **C**. Note que o exercício poderia ser igualmente resolvido rebatendo o plano π para o Plano Horizontal de Projectão, como se explicará no relatório do exercício seguinte.

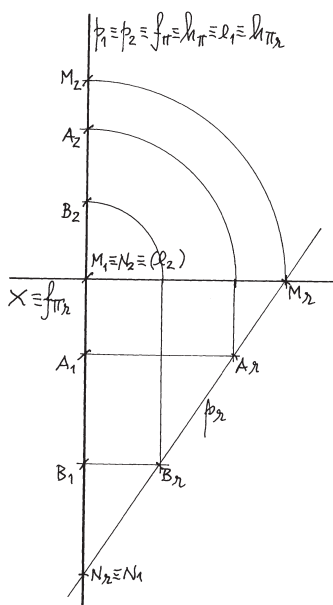


703. Relatório

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **A** e **B** e a recta **p**, pelas suas projecções, e representou-se a projecção horizontal do ponto **D**, **D**₁, em função do seu afastamento. Como se referiu no relatório do exercício anterior, uma vez que a recta de perfil não verifica o **Crítério de Reversibilidade**, não é possível determinar a projecção frontal do ponto **D**, **D**₂, de forma directa. Assim, há que rebater a recta, rebatendo o plano de perfil que a contém. Conduziu-se, pela recta **p**, um plano de perfil π . Optou-se por rebater π para o Plano Horizontal de Projectão (ver exercício 698 e respectivo relatório). Rebateram-se os pontos **A** e **B** e desenhou-se a recta **p** rebatida – **p**_r, passa por **A**_r e **B**_r. Em seguida conduziu-se, por **D**₁, uma paralela ao eixo **X** (que corresponde ao traço horizontal do plano frontal que contém o arco do rebatimento do ponto **D**). O ponto **D** pertence à recta **p**, pelo que **D**_r tem de se situar sobre **p**_r – **D**_r é, assim, o ponto de intersecção de **p**_r com a paralela ao eixo **X** que passa por **D**₁. Para determinar **D**₂, a projecção frontal de **D**, é necessário **inverter o rebatimento**, conforme se referiu no relatório do exercício anterior. Assim, a partir de **D**_r conduziu-se uma perpendicular ao eixo **X** até ao seu ponto de intersecção com aquele, a partir de onde se desenhou a projecção frontal do arco do rebatimento de **D**, com centro em (**e**₂) e rodando em sentido contrário ao dos arcos do rebatimento de **A** e **B**, até **f** _{π} , onde se situa **D**₂.

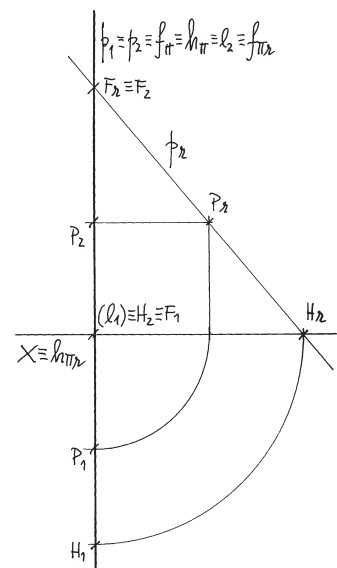
Resolução**704.**

- a) Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **A** e **B** e a recta **p** pelas suas projecções. O ponto **M** tem afastamento nulo, o que nos permite determinar, imediatamente, **M**₁, a sua projecção horizontal, que se situa no eixo **X**. O ponto **N** tem cota nula, o que nos permite determinar, imediatamente, **N**₂, a sua projecção frontal, que se situa no eixo **X**. Os pontos **M** e **N** são pontos da recta **p**, de perfil, pelo que não é possível determinar, de forma directa, as projecções em falta, uma vez que a recta não verifica o Critério de Reversibilidade (ver relatório do exercício 702). Assim, há que rebater a recta **p**, rebatendo o plano de perfil π que a contém. Conduziu-se um plano de perfil π pela recta e rebateu-se o plano para o Plano Horizontal de Projectão (ver exercício 698). A partir de **A**_r e de **B**_r desenhou-se **p**_r. A partir de **M**₁, determinou-se **M**_r sobre **p**_r – invertendo-se o rebatimento, conforme exposto no relatório do exercício 703, determinou-se **M**₂. A partir de **N**₂ determinou-se **N**_r, sobre **p**_r – **N** é um ponto da charneira, pelo que é fixo (roda sobre si próprio), o que nos permite determinar imediatamente **N**₁, pois **N**₁ \equiv **N**_r. Analisemos a situação particular de cada um destes pontos. O ponto **M** pertence ao plano π e tem afastamento nulo, pelo que é um ponto de **f** _{π} . Por outro lado, **M** é um ponto da recta **p**, pelo que **M** é o ponto de concorrência da recta **p** com **f** _{π} – **M**_r é necessariamente o ponto de concorrência de **f** _{π} com **p**_r. O ponto **N**, por sua vez, também pertence ao plano π mas tem cota nula, pelo que é um ponto de **h** _{π} . Por outro lado, **N** é um ponto da recta **p**, pelo que **N** é o ponto de concorrência da recta **p** com **h** _{π} – **N**_r é necessariamente o ponto de concorrência de **h** _{π} com **p**_r.
- b) **M** é o **traço frontal** da recta **p** (que se situa sobre o traço frontal do plano π) e **N** é o **traço horizontal** da recta **p** (que se situa sobre o traço horizontal do plano π).

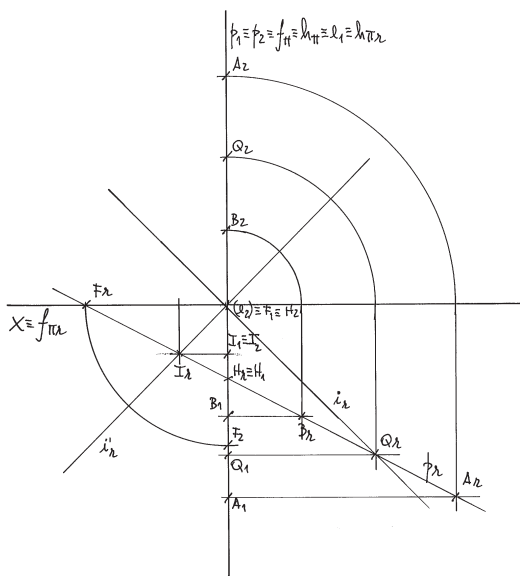


708.

As projecções do ponto **P** e da recta **p** determinam-se imediatamente, o mesmo não acontecendo com os traços da recta. Nesta situação, a recta **p** está definida por um ponto e uma direcção (ver exercício 705). A determinação dos traços da recta processou-se conforme exposto no relatório do exercício anterior. O plano π é o plano de perfil que contém a recta, que foi rebatido para o Plano Frontal de Projectão. O ângulo que a recta **p** faz com o Plano Frontal de Projectão é igual ao ângulo que a recta faz com f_{π} , que está em V.G. no ângulo que p_r faz com $f_{\pi r}$. Das duas hipóteses que existem para medir o ângulo, apenas a apresentada garante que o traço frontal da recta (que se situa, em rebatimento, sobre $f_{\pi r}$) tenha cota superior a **P**. Para determinar os Diedros que a recta atravessa, é necessário analisar a posição da recta em rebatimento. O ponto **P** situa-se no 1º Diedro, pelo que a parte da recta situada entre **F** e **H** (em rebatimento, a parte que se situa entre F_r e H_r) está no 1º Diedro. A recta atravessa f_{π} num ponto com cota positiva, pelo que em **F** a recta passa do 1º para o 2º Diedro. A recta atravessa h_{π} num ponto com afastamento positivo, pelo que em **H** a recta passa do 1º para o 4º Diedro. A recta atravessa, assim, os 2º, 1º e 4º Diedros.

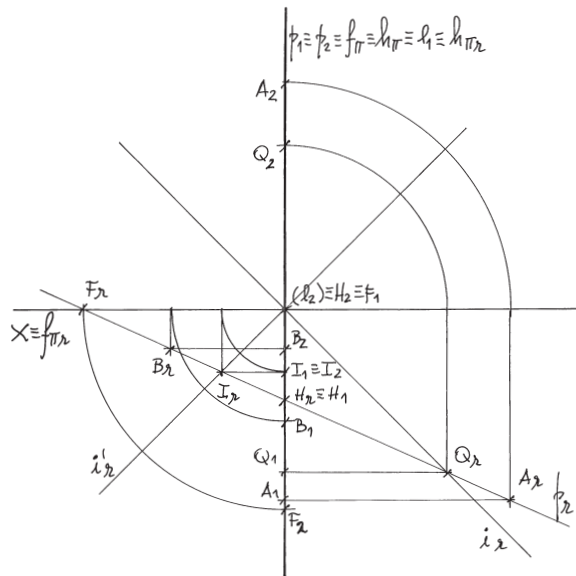
**709.**

Em primeiro lugar, representaram-se as projecções dos pontos **A** e **B** e da recta **p**, de acordo com os dados. Em seguida, para determinar os pontos notáveis da recta **p**, e uma vez que a recta não verifica o **Crítério de Reversibilidade**, é necessário o recurso ao rebatimento da recta **p**, rebatendo o plano de perfil que a contém. Effectuou-se o rebatimento do plano π (o plano de perfil que contém a recta) para o Plano Horizontal de Projectão – a charneira é h_{π} e os arcos do rebatimento existem em planos frontais (de frente), pois a charneira é uma recta de topo. Os traços da recta **p** no planos de projectão, em rebatimento, são os pontos H_r e F_r , que são os pontos de intersecção de p_r com $h_{\pi r}$ e $f_{\pi r}$, respectivamente (ver relatório do exercício 707). Para determinar os traços da recta **p** nos planos bissectores, é necessário, em primeiro lugar, determinar as referências, em rebatimento, que nos permitem obter aqueles pontos. Essas referências são, precisamente, as rectas de intersecção do plano π com os planos bissectores, em rebatimento, ou seja, as rectas i_r e i'_r , que são, em rebatimento, as rectas de intersecção do plano π com o $\beta_{1/3}$ e o $\beta_{2/4}$, respectivamente. Note que se considerou serem i e i' as rectas de intersecção do plano π com o $\beta_{1/3}$ e o $\beta_{2/4}$, respectivamente, não se tendo representado as suas projecções, mas, antes, tendo-se representado as mesmas directamente em rebatimento. Note que as rectas i_r e i'_r são concorrentes entre si num ponto do eixo **X** – são **rectas de perfil passantes** que fazem, com os planos de projectão, ângulos de 45°. Assim, em função do exposto, as rectas i_r e i'_r são as bissectrizes dos quatro ângulos rectos formados entre $f_{\pi r}$ e $h_{\pi r}$. A distinção entre uma (i_r) e a outra (i'_r) faz-se principalmente por perceber que, sendo a recta i_r , em rebatimento, a recta de intersecção de π com o $\beta_{1/3}$, e sendo **A** e **B** dois pontos do 1º Diedro, a recta i_r tem **necessariamente** de passar pelo quadrante do plano onde se situam A_r e B_r . Q_r e I_r são, respectivamente, os pontos de intersecção de p_r com i_r e i'_r , e são os traços de **p** no $\beta_{1/3}$ e no $\beta_{2/4}$, em rebatimento. Contra-rebatendo os pontos notáveis de **p**, obtiveram-se as suas projecções.

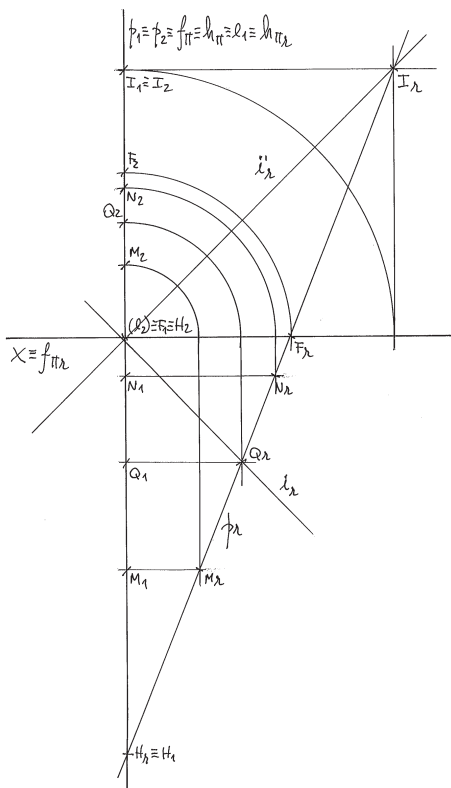


710.

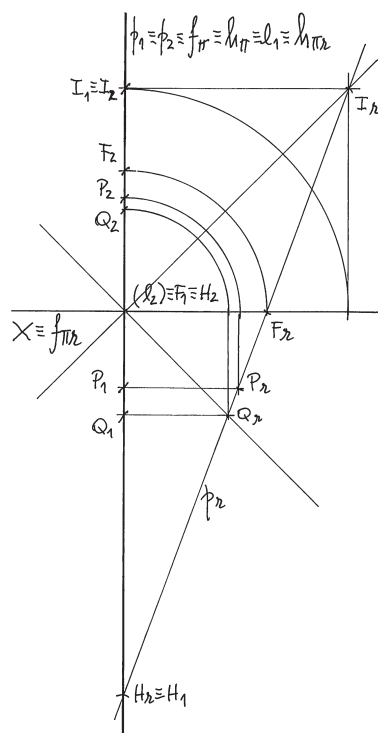
Ver relatório do exercício anterior. Note que a única diferença entre a presente situação e a situação do exercício anterior consiste no facto de o ponto **B** ter cota negativa, o que pode provocar alguma confusão. No entanto, para efectuar o seu rebatimento dever-se-ão executar progressivamente todas as etapas do rebatimento do ponto **A**, pela mesma ordem e no mesmo sentido. A recta atravessa h_π num ponto com afastamento positivo, pelo que em **H** a recta passa do 1º para o 4º Diedro. A recta atravessa f_π num ponto com cota negativa, pelo que em **F** a recta passa do 4º para o 3º Diedro. A recta atravessa, assim, os 1º, 4º e 3º Diedros.

**711.**

Ver relatório do exercício 709. O ângulo que a recta p faz com o Plano Horizontal de Projecção é igual ao ângulo que a recta faz com h_π , que está em V.G. no ângulo que p_r faz com h_π . Das duas hipóteses que existem para medir o ângulo, apenas a apresentada garante que o traço horizontal da recta se situe no **SPHA** (tenha afastamento positivo). Note que, neste exercício, e com vista a uma simplificação da leitura da sua resolução gráfica, se optou por omitir a identificação das rectas i_r e i'_r , por tal não ser necessário – no entanto, mantiveram-se os raciocínios referentes àquelas rectas.

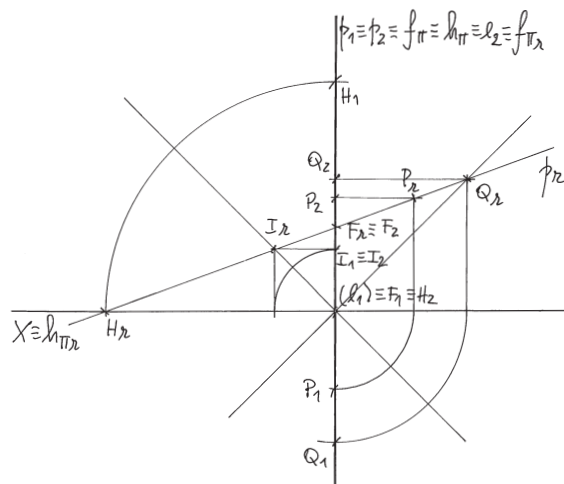
**712.**

Ver relatório do exercício 709. A recta atravessa f_π num ponto com cota positiva, pelo que em **F** a recta passa do 1º para o 2º Diedro. A recta atravessa h_π num ponto com afastamento positivo, pelo que em **H** a recta passa do 1º para o 4º Diedro. A recta atravessa, assim, os 2º, 1º e 4º Diedros.

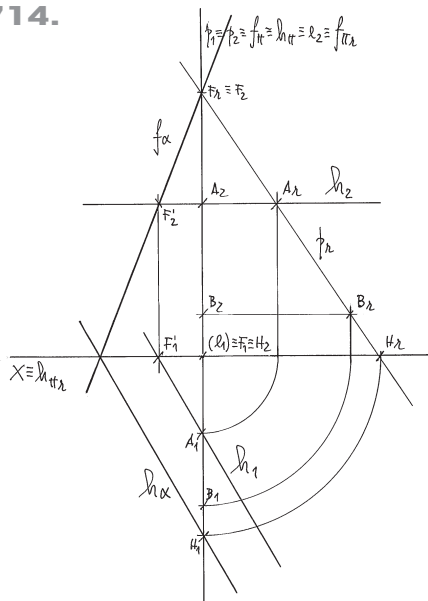


713.

Ver relatório do exercício 709. Note que, neste exercício, se optou por rebater o plano π (o plano de perfil que contém a recta) para o Plano Frontal de Projectão – a charneira é f_π . O ângulo que a recta p faz com o Plano Horizontal de Projectão é igual ao ângulo que a recta faz com h_π , que está em V.G. no ângulo que p_r faz com h_π . Das duas hipóteses que existem para medir o ângulo, apenas a apresentada garante que o traço horizontal da recta se situe no **SPHP** (tenha afastamento negativo). Note que, à semelhança do exercício anterior, com vista a uma simplificação da leitura da resolução gráfica do exercício, se optou por omitir a identificação das rectas i_r e i'_r , por tal não ser necessário, mantendo-se, no entanto, os raciocínios a elas respeitantes.



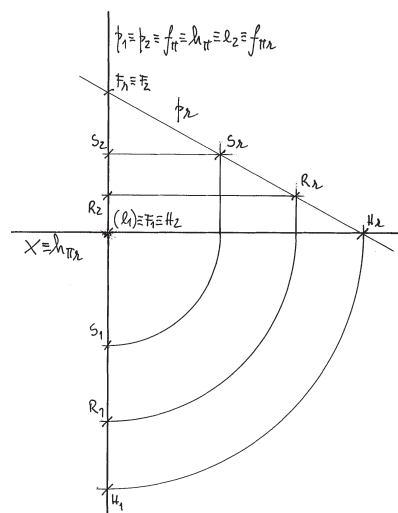
714.



Para determinar os traços do plano é necessário determinar os traços das duas rectas. Em primeiro lugar, determinaram-se os traços da recta p nos planos de projecção, F e H , rebatendo o plano de perfil que contém a recta, conforme exposto no relatório do exercício 707 – o rebatimento de π , neste caso, processou-se para o Plano Frontal de Projectão. Em seguida determinou-se F' , o traço frontal da recta h . O traço frontal do plano, f_α , está definido por F e F' , os traços frontais das duas rectas. O traço horizontal do plano, h_α , contém H , o traço horizontal da recta p e é paralelo à recta h (rectas horizontais de um plano são paralelas entre si e paralelas ao traço horizontal do plano). Note que f_α e h_α são **necessariamente** concorrentes num ponto do eixo X .

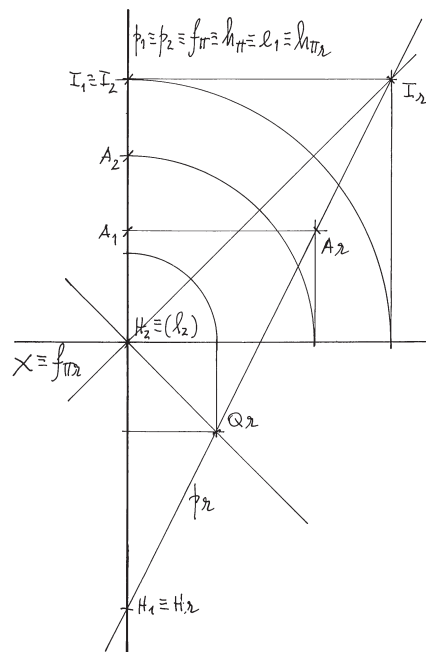
715.

Em primeiro lugar, desenharam-se as projecções das duas rectas, em função dos dados. Em seguida, determinaram-se as projecções da recta i' , a recta de intersecção do plano com o $\beta_{1/3}$, conforme exposto no relatório do exercício 277. O ponto Q é o traço da recta f no $\beta_{1/3}$ – Q determinou-se em função do afastamento da recta, pois Q tem **necessariamente** coordenadas iguais (é o ponto da recta que tem 2 cm de cota, que é o afastamento da recta). O ponto Q' é o traço da recta p no $\beta_{1/3}$, que se determinou a partir do rebatimento da recta (pelo rebatimento do plano de perfil que a contém), conforme exposto no relatório do exercício 709. A recta i' está definida por Q e Q' . Para determinar a recta i'' já temos um ponto – o ponto de concorência da recta i' com o eixo X (as rectas i' e i'' são **necessariamente** concorrentes entre si num ponto do eixo X – ver exercício 280). Assim, bastou determinar o traço de **uma** das rectas no $\beta_{2/4}$ – sendo mais fácil determinar o traço da recta f no $\beta_{2/4}$ (o ponto I), foi este o ponto que nos permitiu determinar a recta i'' .

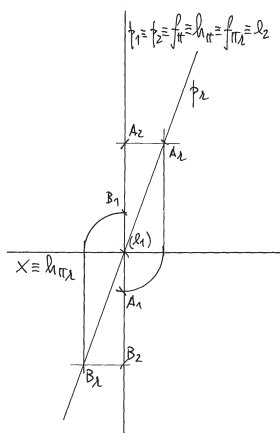


716.

Ver relatório do exercício 709. Note que a única diferença entre a presente situação e a situação do exercício 709 consiste no facto de o ponto **A** ter afastamento negativo, o que pode provocar alguma confusão. No entanto, atendendo a que se rebateu o plano de perfil que contém a recta para o Plano Horizontal de Projectação, o ponto **A** mantém o seu afastamento (que é negativo) ao longo do rebatimento e o seu arco do rebatimento (que existe num plano frontal) projecta-se em V.G. no Plano Frontal de Projectação – tem centro em (e_2) e raio até A_2 . O ponto **H**, que é um ponto da charneira, roda sobre si próprio (é fixo), pelo que se tem $H_1 \equiv H_r$. Note que o rebatimento do plano π para o Plano Horizontal de Projectação teve, como vantagem, evitar o rebatimento de um ponto, uma vez que só foi necessário rebater o ponto **A** – caso se efectuasse o rebatimento do plano π para o Plano Frontal de Projectação, seria necessário rebater dois pontos (**A** e **H**).



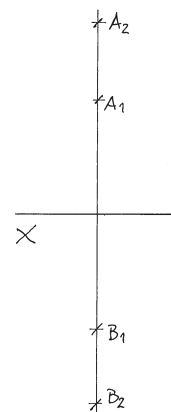
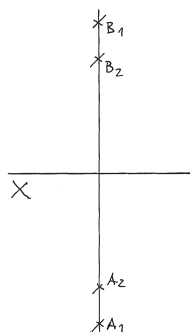
717.



Em primeiro lugar, representou-se o ponto **A** pelas suas projecções, em função das suas coordenadas. Dois pontos simétricos em relação ao eixo **X** situam-se numa recta de perfil passante, equidistantes do eixo **X** (do ponto de concorrência da recta de perfil passante com o eixo **X**). Assim, representou-se a recta **p** (a recta de perfil passante que contém **A**) pelas suas projecções. Para determinar as projecções do ponto **B**, pertencente a **p**, é necessário rebater a recta, rebatendo o plano de perfil que a contém. Rebateu-se o plano de perfil π que contém **p**, para o Plano Frontal de Projectação, rebatendo **A**, e desenhou-se p_r , passando por A_r e concorrente com o eixo **X**. B_r situa-se sobre p_r , simétrico de A_r , em relação ao eixo **X**. As coordenadas de **B** são **necessariamente** $(-1; -3)$ – note que as coordenadas de **B** são simétricas das coordenadas de **A**. Invertendo o rebatimento, obtiveram-se as projecções de **B**. Note que o arco do rebatimento de **B** tem a mesma amplitude do arco do rebatimento de **A** e roda em sentido contrário. É possível, também, através de raciocínio, descobrir as coordenadas de **B** (conforme exposto) e desenhar as suas projecções, sem o recurso ao rebatimento, como se observará no exercício seguinte. Note, no entanto, que pontos simétricos em relação ao eixo **X** situam-se **sempre** no mesmo plano de perfil (têm a mesma abcissa).

719.

Ver relatório do exercício anterior. As coordenadas de **B** são $(3; -5)$.

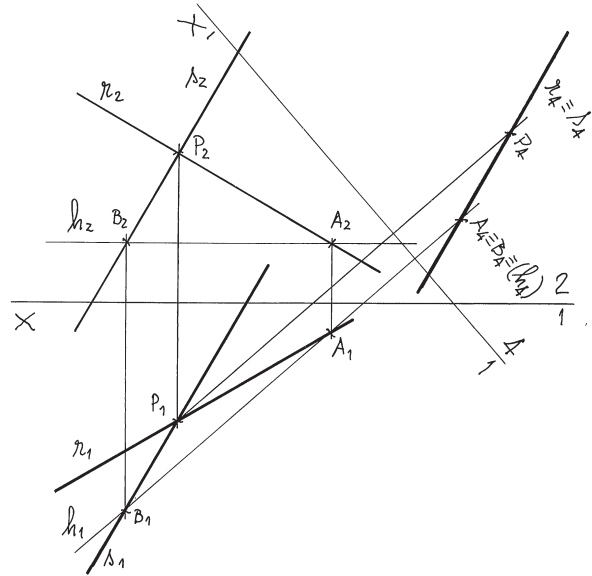


718.

Em primeiro lugar, representou-se o ponto **A** pelas suas projecções, em função das suas coordenadas. Pontos simétricos em relação ao eixo **X** têm as coordenadas simétricas. As coordenadas de **B** são $(-4; 3)$. A partir das coordenadas de **B** determinaram-se as suas projecções – **A** e **B** situam-se **necessariamente** no mesmo plano de perfil (ver relatório do exercício anterior).

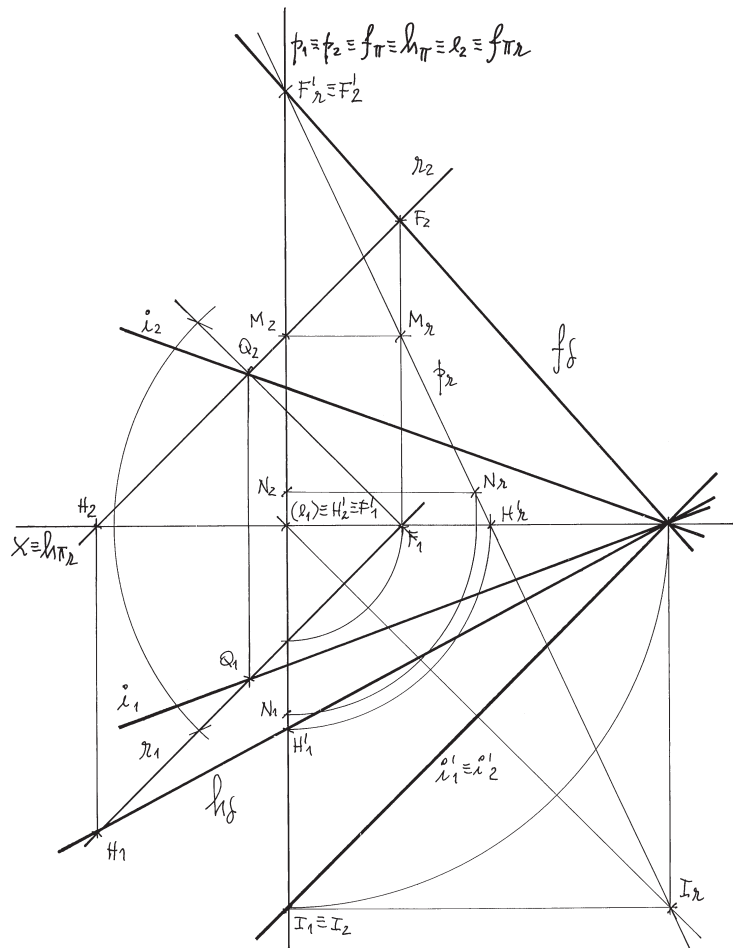
720.

Em primeiro lugar, representou-se o plano pelas projecções das duas rectas, em função dos dados. Em seguida, para transformar o plano dado num plano de topo, **sem determinar os traços do plano**, é necessário conhecer a direcção das suas rectas horizontais (de nível). De facto, são as rectas horizontais (de nível) que nos permitem transformar o plano dado num plano de topo, pois as rectas horizontais (de nível) de um plano de topo são rectas de topo. Assim, determinaram-se as projecções de uma recta horizontal (de nível), pertencente ao plano. A recta h está definida por dois pontos – os pontos A e B , que são, respectivamente, os seus pontos de concorrência com as rectas r e s . Para transformar o plano num plano de topo, é necessário substituir o Plano Frontal de Projectão (**plano 2**) por um novo plano de projecção (**plano 4**), que seja ortogonal à recta h – o novo eixo X (o eixo X') é perpendicular a h_1 . Os pontos, na transformação efectuada, mantiveram as cotas e as projecções horizontais. As projecções dos pontos A , B e P no **plano 4** determinaram-se em função das suas cotas, que se mantiveram (ver exercício 636). A projecção da recta h no **plano 4** é um ponto – h é, no novo diedro de projecção, uma recta de topo. A projecção da recta r no **plano 4** (r_4) está definida por P_4 e A_4 . A projecção da recta s no **plano 4** (s_4) está definida por P_4 e B_4 . Note que se tem **necessariamente** $r_4 \equiv s_4$, pois o plano dado está transformado num plano de topo (projectante frontal).



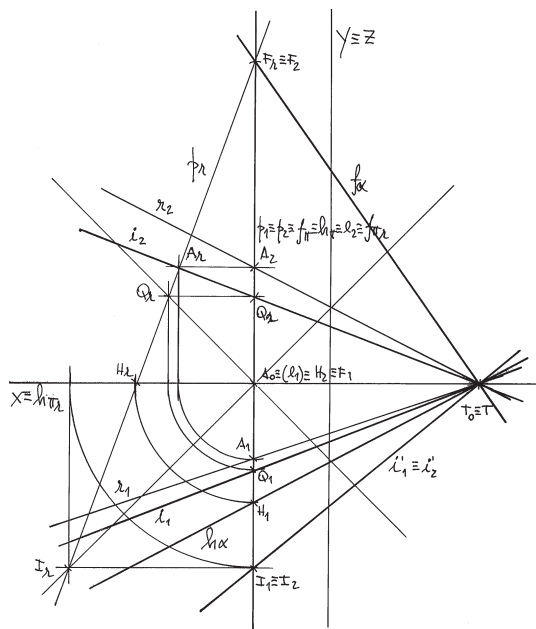
706.

- a) Em primeiro lugar, representou-se o plano pelas projecções das duas rectas, em função dos dados. Para determinar os traços do plano, é necessário determinar os traços das duas rectas nos planos de projecção. Assim, determinaram-se F e H , respectivamente o traço frontal e o traço horizontal da recta r . Em seguida, determinaram-se os traços da recta p nos planos de projecção, F' e H' , rebatendo o plano de perfil que contém a recta, conforme exposto no relatório do exercício 707 – o rebatimento de π , neste caso, efectuou-se para o Plano Frontal de Projectão. O traço frontal do plano, f_δ , está definido por F e F' , os traços frontais das duas rectas. O traço horizontal do plano, h_δ , está definido por H e H' , os traços horizontais das duas rectas. Os dois traços, f_δ e h_δ , são **necessariamente** concorrentes num ponto do eixo X .
- b) As rectas de intersecção de δ com os planos bissectores passam, ambas, pelo ponto de concorrência dos traços do plano, que é um ponto de δ que pertence a ambos os bissectores. Já temos um ponto para definir cada uma das duas rectas – falta-nos outro ponto para cada uma. A recta r não tem traço no $\beta_{2/4}$, mas tem traço no $\beta_{1/3}$, que se determinou – o ponto Q . A recta i está definida por Q e pelo ponto de concorrência dos traços do plano. Determinou-se o traço da recta p no $\beta_{2/4}$ (ver exercício 709), o ponto I – a recta i' está definida por I e pelo ponto de concorrência dos traços do plano. Note que não é necessária a determinação do traço da recta p no $\beta_{1/3}$.



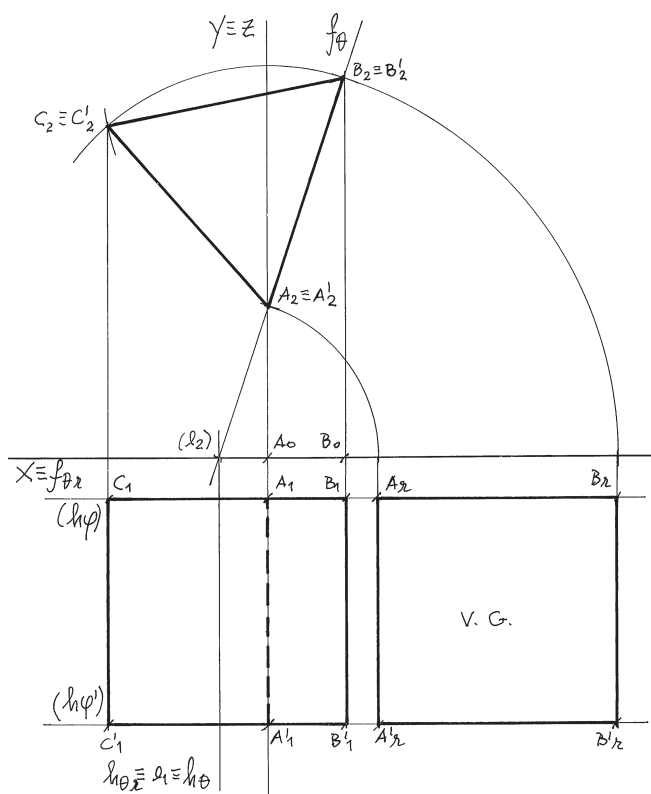
722.

- a) Os traços do plano são concorrentes entre si em \mathbf{T} , que é o ponto de concorrência da recta \mathbf{r} com o eixo \mathbf{X} . Já temos um ponto para definir cada um dos dois traços do plano. É necessário determinar os traços da recta \mathbf{p} , o que se efectuou recorrendo ao rebatimento do plano de perfil que contém \mathbf{p} (ver exercício 707) – \mathbf{f}_α está definido por \mathbf{F} e por \mathbf{T} e \mathbf{h}_α está definido por \mathbf{H} e por \mathbf{T} .
- b) As rectas de intersecção de α com os planos bissectores passam, ambas por \mathbf{T} , pois \mathbf{T} é um ponto de α que pertence a ambos os bissectores. \mathbf{T} é assim, simultaneamente, o traço da recta \mathbf{r} no $\beta_{1/3}$ e o traço da recta \mathbf{r} no $\beta_{2/4}$. É necessário determinar os traços de \mathbf{p} nos planos bissectores, os que se efectuou conforme explicitado no relatório do exercício 709) – i está definida por \mathbf{Q} e por \mathbf{T} e i' está definida por \mathbf{I} e por \mathbf{T} .



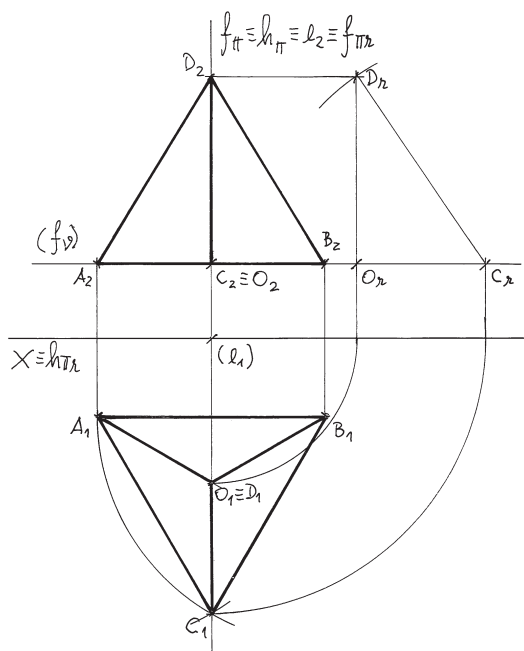
723.

- b) A face lateral que contém a aresta $[AB]$ é a face $[A'A'B'B]$. Para determinar a V.G. daquela face, é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar, pois a face não é paralela a nenhum dos planos de projecção (não se projecta em V.G. em nenhum dos planos de projecção) – optou-se pelo rebatimento do plano que a contém, o plano θ , de topo, cujos traços se determinaram imediatamente. Efetuou-se o rebatimento do plano θ para o Plano Horizontal de Projectação, conforme se expôs no relatório do exercício 691.



724.

Em primeiro lugar, desenharam-se as projecções do triângulo $[ABC]$, em função dos dados, e determinou-se imediatamente a projecção horizontal do sólido, conforme exposto nos relatórios dos exercícios 566 e 568. Agora, nesta situação, ao contrário das situações referidas, não há nenhuma aresta com extremo em D que se projecte em V.G. em qualquer dos dois planos de projecção, pelo que os procedimentos explicitados naqueles relatórios não são utilizáveis nesta situação. Há, pois, que recorrer a um processo geométrico auxiliar, para conseguirmos uma das arestas $[AD]$, $[BD]$ ou $[CD]$ em V.G. – optou-se por determinar a V.G. da aresta $[CD]$, que é de perfil. Conduziu-se o plano π , de perfil, que contém a aresta $[CD]$, efectuou-se o seu rebatimento para o Plano Frontal de Projecção, obtendo-se C_r e O_r (sendo O o centro do triângulo). D_r tem de se situar na vertical que passa por O_r tal que $C_r D_r$ meça 6 cm (o lado do triângulo, que é a medida da aresta do sólido). Assim, com o recurso ao compasso, fazendo centro em C_r e com 6 cm de raio, determinou-se D_r na vertical que passa por O_r . Invertendo o rebatimento (que se processou em planos horizontais, pelo que D mantém a cota), obteve-se D_2 , a projecção frontal de D , que nos permitiu concluir a construção da projecção frontal do sólido.



10

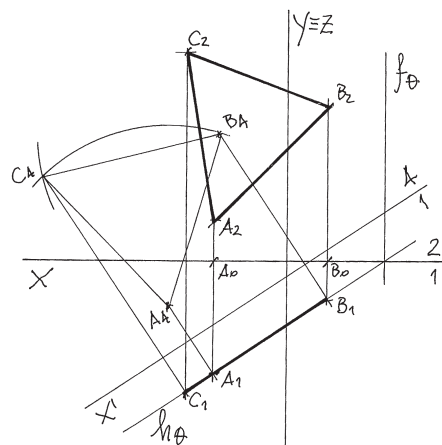
REPRESENTAÇÃO DE FIGURAS PLANAS II

725.

Uma vez que só existem verdadeiras grandezas em situações de paralelismo em relação a um dos planos de projecção, em todas as situações em que tal não se verifique há a necessidade de se recorrer a um **processo geométrico auxiliar** para, dessa forma, se obterem projecções mais favoráveis do objecto em estudo, nomeadamente projecções nas quais o objecto se apresente em verdadeira grandeza. Assim, nessas situações, o recurso aos **processos geométricos auxiliares** não é o fim (objectivo) do exercício mas, antes, **um meio** para atingir o fim (objectivo) do exercício, pois em situações em que os objectos não se projectem em verdadeira grandeza, não é possível efectuar, de forma directa, a construção das suas projecções.

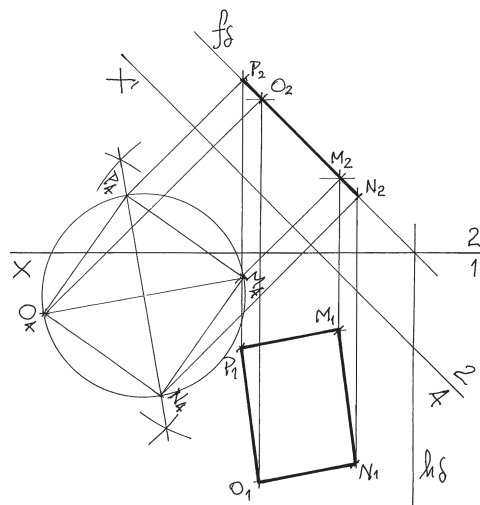
726.

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos A e B pelas suas projecções, bem como o plano θ , pelos seus traços, contendo os dois pontos. Em seguida, atendendo a que o triângulo está contido num plano vertical (que não é paralelo a nenhum dos planos de projecção), a figura não se projecta em V.G. em nenhum dos planos de projecção, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. Como é expressamente pedido no enunciado, recorreu-se ao processo da **mudança do diedro de projecção**. Para obter o triângulo em V.G., através da mudança do diedro de projecção, é necessário transformar o plano θ num plano frontal (de frente) – ver relatório do exercício 645. Efectuando a mudança de projecção, obtiveram-se as novas projecções dos pontos A e B (A_4 e B_4), no novo diedro de projecção (formado pelo **plano 1** e pelo **plano 4**), no qual o plano θ é um plano frontal (de frente) – é paralelo ao **plano 4**. O triângulo projecta-se, assim, em V.G. no **plano 4**. Construiu-se a projecção do triângulo no **plano 4** em V.G., obtendo-se imediatamente C_4 , a projecção do ponto C no **plano 4**, bem como a projecção do triângulo no **plano 4** – o triângulo $[A_4B_4C_4]$. A projecção horizontal de C , C_1 , determina-se imediatamente, sobre o traço horizontal do plano (trata-se de um plano projectante horizontal, tanto no diedro de projecção inicial como no novo diedro). Para determinar a projecção frontal do ponto C (a projecção de C no **plano 2**, no diedro de projecção inicial), teve-se em conta que, na mudança do diedro de projecção efectuada, se mantiveram as cotas, pelo que C_2 se determinou, precisamente, em função da cota de C (a distância de C_2 ao eixo X é igual à distância de C_4 ao eixo X'). Determinadas as duas projecções do ponto C , desenharam-se as projecções do triângulo, no diedro de projecção inicial. Note que a projecção frontal do triângulo **não é um triângulo equilátero** (está **deformada**), embora, **no espaço** se trate realmente de um triângulo equilátero – a deformação observada deve-se, precisamente, ao facto de o plano θ não ser paralelo ao Plano Frontal de Projecção. Também existe deformação em projecção horizontal, pois, nesta projecção, o triângulo reduz-se a um segmento de recta – trata-se da deformação máxima, pois o plano θ é projectante horizontal.

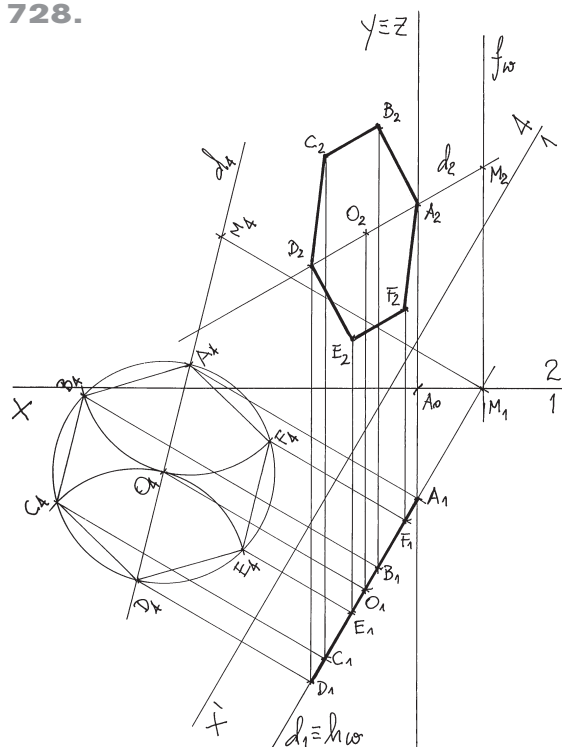


727.

Em primeiro lugar, representaram-se o plano δ , pelos seus traços, e os pontos **M** e **O** pelas suas projecções, pertencentes ao plano. Em seguida, considerando que o quadrado está contido num plano de topo (que não é paralelo a nenhum dos planos de projecção), não se projectando em V.G. em nenhum dos planos de projecção, é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. Recorreu-se ao processo da mudança do diedro de projecção. Para obter o quadrado em V.G., através da mudança do diedro de projecção, é necessário transformar o plano δ num plano horizontal (de nível) – ver exercício 646. Efectuando a mudança do diedro de projecção, obtiveram-se as novas projecções dos pontos **M** e **O** (M_4 e O_4), no novo diedro de projecção (formado entre o **plano 2** e o **plano 4**), no qual o plano δ é um plano horizontal (de nível) – é paralelo ao **plano 4**. O quadrado projecta-se, assim, em V.G. no **plano 4**. Construiu-se a projecção do quadrado no **plano 4** em V.G., obtendo-se imediatamente N_4 e P_4 , respectivamente as projecções dos vértices **N** e **P** no **plano 4**. Obteve-se igualmente a projecção do quadrado no **plano 4** – o quadrado $[A_4B_4C_4D_4]$. As projecções frontais de **N** e **P**, N_2 e P_2 , determinam-se imediatamente, sobre o traço frontal do plano (trata-se de um plano projectante frontal, tanto no diedro de projecção inicial como no novo diedro). Para determinar as projecções horizontais de **N** e **P** (as projecções de **N** e **P** no **plano 1**, no diedro de projecção inicial), teve-se em conta que, na mudança do diedro de projecção efectuada, se mantiveram os afastamentos, pelo que N_1 e P_1 se determinaram, precisamente, em função dos respectivos afastamentos (a distância de N_1 ao eixo **X** é igual à distância de N_4 ao eixo X' , o mesmo se verificando para o ponto **P**). Determinadas as duas projecções dos pontos **N** e **P**, desenharam-se as projecções do quadrado, no diedro de projecção inicial. Note que a projecção horizontal do quadrado **não** é um quadrado (está **deformada**), embora, no **espaço** se trate realmente de um quadrado – a deformação observada deve-se, precisamente, ao facto de o plano δ não ser paralelo ao Plano Horizontal de Projecção. Também existe deformação em projecção frontal, pois, nesta projecção, o quadrado reduz-se a um segmento de recta – trata-se da deformação máxima, pois o plano δ é projectante frontal.



728.

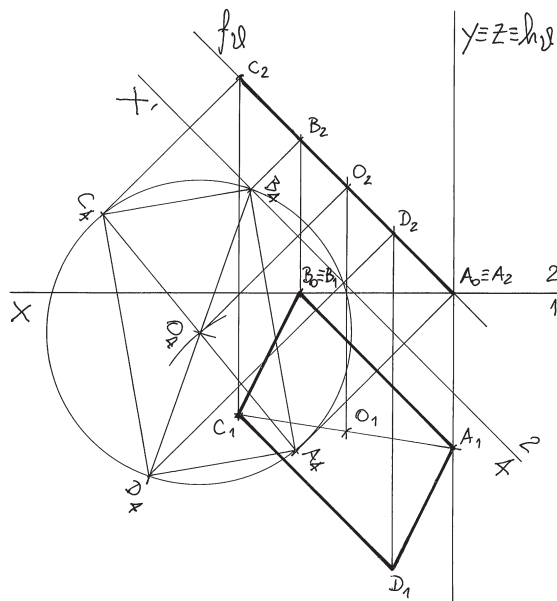


Em primeiro lugar, representaram-se o ponto **A** e a recta **d**, pelas suas projecções, bem como o plano ω , pelos seus traços, que é o plano projectante horizontal da recta **d**. O hexágono está contido num plano vertical (que não é paralelo a nenhum dos planos de projecção), pelo que não se projecta em V.G. em nenhum dos planos de projecção – é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. Recorreu-se a uma **mudança do diedro de projecção**, para transformar o plano ω num plano frontal (de frente) – ver relatório do exercício 645. Efectuando a mudança do diedro de projecção, **é necessário** determinar as projecções do ponto **A** e da recta **d** no novo plano de projecção (**plano 4**), pois a recta **d** é a recta suporte da diagonal **[AD]** do polígono. A_4 determinou-se conforme exposto no relatório do exercício 645. Para obter d_4 , a projecção da recta **d** no **plano 4**, é necessário um outro ponto da recta (ver exercício 644) – o ponto **M**, que é o traço frontal da recta, foi o segundo ponto que nos permitiu determinar d_4 (d_4 está definida por A_4 e por M_4). Note que a escolha do traço frontal da recta para segundo ponto não foi aleatória – de facto, atendendo a que o hexágono se situa no **1º Diedro**, o ponto **M** é a fronteira a partir da qual os pontos da recta **d** se situam no **2º Diedro**. No novo diedro de projecção, formado entre o **plano 1** e o **plano 4**, o plano ω é frontal (de frente) e a recta **d** é uma recta frontal (de frente). A diagonal **[AD]** existe na recta **d** (projecta-se em V.G. no **plano 4**, pois é um segmento frontal), pelo que **D** é um ponto da recta **d**. Por outro lado, atendendo a que o lado hexágono (que é 3 cm) é igual ao raio da circunferência em que se inscreve, e uma vez que **[AD]** é **necessariamente** um diâmetro dessa circunferência, sabe-se que **D** se situa sobre **d** a 6 cm (o dobro do raio) de **A**. Assim, sobre d_4 , a partir de A_4 , mediram-se os 6 cm, obtendo-se D_4 . O hexágono projecta-se em V.G. no **plano 4**, pelo que se construiu a

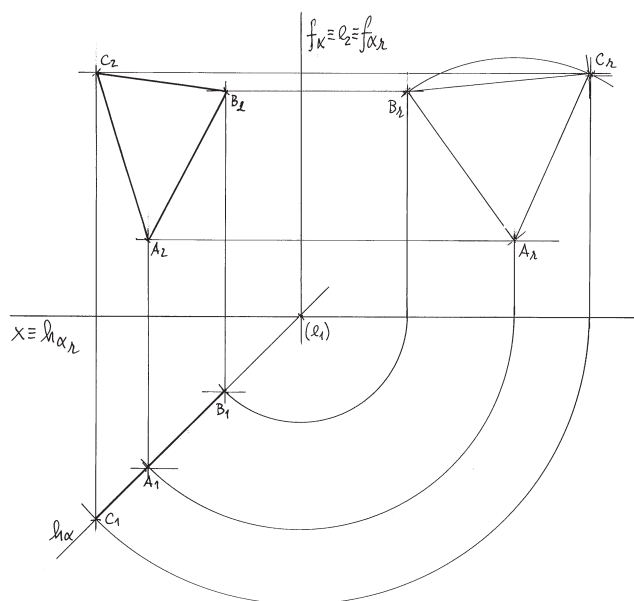
sua projecção no **plano 4** em V.G., obtendo-se as projecções, no **plano 4**, dos restantes vértices do polígono e do próprio polígono. As projecções dos vértices do hexágono no diedro de projecção inicial, bem como as projecções do polígono nesse diedro, determinaram-se conforme exposto no relatório do exercício 726, pelo que se aconselha a sua leitura.

729.

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **A** e **B** pelas suas projecções, bem como o plano ϑ , pelos seus traços, contendo os dois pontos. O rectângulo está contido num plano de topo (que não é paralelo a nenhum dos planos de projecção), pelo que a figura não se projecta em V.G. em nenhum dos planos de projecção – é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. Recorreu-se a uma **mudança do diedro de projecção**, para transformar o plano ϑ num plano horizontal (de nível) – ver relatório do exercício 646. Efectuando a mudança do diedro de projecção, determinaram-se as projecções dos pontos **A** e **B** no **plano 4**, respectivamente **A₄** e **B₄**. No novo diedro de projecção (formado entre o **plano 2** e o **plano 4**), o plano ϑ é um plano horizontal (de nível), pelo que é paralelo ao **plano 4** – o rectângulo projecta-se, assim, em V.G. no **plano 4**. Para construir o rectângulo a partir dos dados (dois vértices consecutivos e a medida das diagonais), é necessário inscrever o polígono numa circunferência com 4 cm de raio (metade do comprimento das diagonais, que são diâmetros dessa circunferência). Assim, com o recurso ao compasso, determinou-se o ponto que dista 4 cm de **A₄** e de **B₄** – **O₄**, que é a projecção de **O** no **plano 4**, sendo **O** o centro da circunferência. Com centro em **O₄** e 4 cm de raio, desenhou-se a projecção, no **plano 4**, da circunferência circunscrita ao rectângulo, que passa necessariamente por **A₄** e por **B₄**. Em seguida, efectuou-se a construção do rectângulo, em V.G., na sua projecção no **plano 4** (a partir das diagonais que passam por **A** e **B**), o que nos permitiu determinar **C₄** e **D₄**, as projecções dos outros dois vértices do rectângulo no **plano 4**. As projecções de **C** e **D** no diedro de projecção inicial, bem como as projecções do rectângulo nesse diedro, determinaram-se conforme exposto no relatório do exercício 727, pelo que se aconselha a sua leitura.



730.

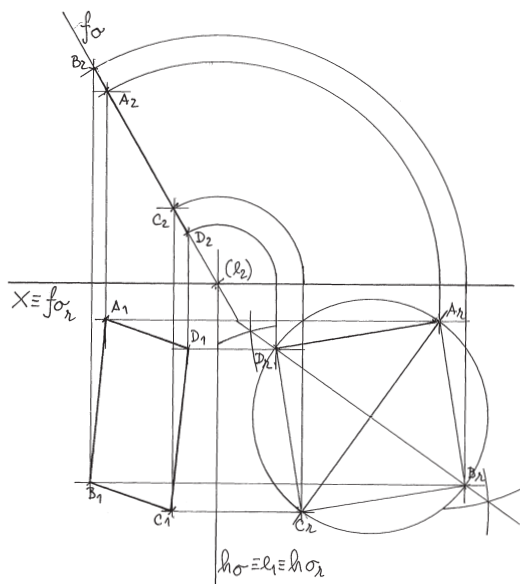


Em primeiro lugar, representaram-se o plano α , pelos seus traços, e os pontos **A** e **B** pelas suas projecções, pertencentes ao plano. O triângulo está contido num plano vertical (que não é paralelo a nenhum dos planos de projecção), pelo que não se projecta em V.G. em nenhum dos planos de projecção – é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. Recorreu-se ao **rebatimento** do plano α para o Plano Frontal de Projecção, para construir o triângulo em V.G., em rebatimento, no Plano Frontal de Projecção – ver relatório do exercício 681. A charneira é f_α e os arcos do rebatimento existem em planos horizontais (de nível) – planos ortogonais à charneira. Efectuando o rebatimento do plano α , obtiveram-se **A_r** e **B_r**. Em seguida, construiu-se o triângulo em V.G., em rebatimento, obtendo **C_r** (que tem cota superior a **A_r**, pelo que **C_r** tem de se situar acima de **A_r**). Invertendo o rebatimento, obtêm-se as projecções de **C**. O arco do rebatimento de **C** tem a amplitude dos arcos do rebatimento de **A** e **B**, é concêntrico com estes e roda em sentido contrário – a cota de **C** mantém-se, pois o arco do seu rebatimento existe num plano horizontal (de nível). Determinando **C₁** sobre h_α (no extremo do arco do rebatimento de **C**), obtêm-se **C₂** na mesma linha de chamada e com a cota de **C_r** (pois, no rebatimento efectuado, os pontos mantêm a sua cota). A partir das projecções de **A**, **B** e

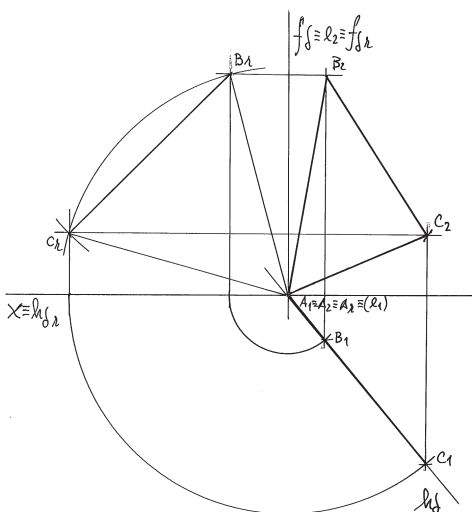
C, desenharam-se as projecções do triângulo, que se representaram a **traço forte**, pois é esse o objectivo do exercício. Note que, neste exercício, e ao contrário do exercício 681, o rebatimento é um **traçado auxiliar** para atingir o objectivo do exercício (as projecções do triângulo), pelo que o triângulo, em rebatimento, é representado a **traço leve**. Note ainda que a projecção frontal do triângulo **não** é um **triângulo equilátero** (está **deformada**), embora, **no espaço** se trate realmente de um triângulo equilátero – a deformação observada deve-se ao facto de o plano α não ser paralelo ao Plano Frontal de Projecção. Também existe deformação em projecção horizontal, pois, nesta projecção, o triângulo reduz-se a um segmento de recta – trata-se da deformação máxima, pois o plano α é projectante horizontal.

731.

Em primeiro lugar, representaram-se o plano σ , pelos seus traços, e os pontos **A** e **C** pelas suas projecções, pertencentes ao plano. O quadrado está contido num plano de topo, pelo que não se projecta em V.G. em nenhum dos planos de projecção – é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. Recorre-se ao **rebatimento** do plano σ para o Plano Horizontal de Projecção, para construir o quadrado em V.G., em rebatimento, no Plano Horizontal de Projecção – ver relatório do exercício 691. A charneira é h_σ e os arcos do rebatimento existem em planos frontais (de frente) – planos ortogonais à charneira. Efectuando o rebatimento do plano σ , obtiveram-se **A_r** e **C_r**. Em seguida, construiu-se o quadrado em V.G., em rebatimento, obtendo **B_r** e **D_r**, os outros dois vértices do quadrado, em rebatimento. Invertendo o rebatimento, obtêm-se as projecções de **B** e **D**. O arco do rebatimento de **B** tem a amplitude dos arcos do rebatimento de **A** e **C**, é concêntrico com estes e gira em sentido contrário – o afastamento de **B** mantém-se, pois o arco do seu rebatimento existe num plano frontal (de frente). Determinando **B₂** sobre f_σ (no extremo do arco do rebatimento de **B**), obtém-se **B₁** na mesma linha de chamada e com o afastamento de **B_r** (pois, no rebatimento efectuado, os pontos mantêm o seu afastamento). As projecções do ponto **D** determinaram-se de forma semelhante. A partir das projecções de **A**, **B**, **C** e **D**, desenharam-se as projecções do quadrado, que se representaram a **traço forte**, pois é esse o objectivo do exercício – o rebatimento é um **traçado auxiliar** para atingir o objectivo do exercício (as projecções do quadrado), pelo que o quadrado, em rebatimento, é representado a **traço leve**. Note, ainda, que a projecção horizontal do quadrado **não é um quadrado** (está **deformada**), embora, **no espaço** se trate realmente de um quadrado – a deformação observada deve-se ao facto de o plano σ não ser paralelo ao Plano Horizontal de Projecção. Em projecção frontal, o quadrado reduz-se a um segmento de recta – trata-se da deformação máxima, pois o plano σ é projectante frontal.



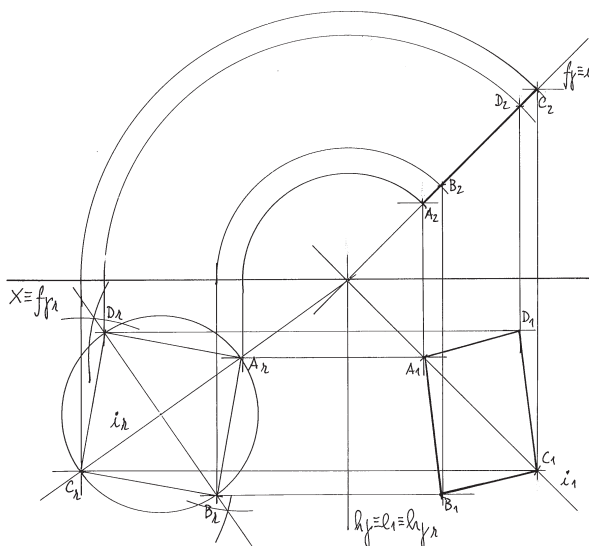
732.



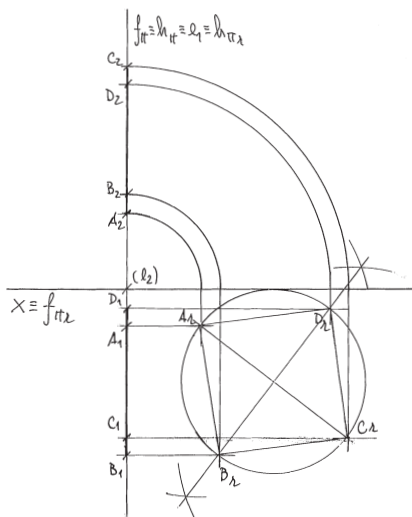
Em primeiro lugar, representou-se o plano δ pelos seus traços e localizou-se o ponto **A** – o ponto **A** é **necessariamente** o ponto de concorrência dos traços do plano (é um ponto do eixo **X**, pois tem cota e afastamento nulos). É dado o comprimento do lado do triângulo e o ângulo que o lado **[AB]**, do triângulo, faz com f_δ – note que o ângulo dado é o **ângulo real**, no espaço, e não o ângulo das projecções. De facto, é **no espaço**, na superfície do plano, que existe o ângulo entre o lado **[AB]** e f_δ (sugere-se a visualização da situação). Há, no entanto, que ter em conta que o triângulo está contido num plano vertical, pelo que não se projecta em V.G. em nenhum dos planos de projecção – assim, nem o ângulo dado se projecta em V.G., nem a medida de qualquer dos lados do polígono. É necessário, pois, o recurso a um processo geométrico auxiliar. Recorreu-se ao **rebatimento** do plano δ para o Plano Frontal de Projecção, para construir o triângulo em V.G., em rebatimento, no Plano Frontal de Projecção – a charneira é f_δ e os arcos do rebatimento existem em planos horizontais (de nível). Rebateu-se o plano, identificando a charneira do rebatimento, a posição dos traços do plano em rebatimento e assinalando **A_r** (que é fixo, pois é um ponto da charneira). Em rebatimento, tudo o que existe no plano está em V.G., pelo que, a partir de **A_r**, é possível medir, **em verdadeira grandeza**, o ângulo que o lado **[AB]** faz com f_δ – é o ângulo que o segmento **[A_rB_r]** faz com f_δ . A partir do ângulo dado e do comprimento do lado do polígono, determinou-se **B_r** e construiu-se o triângulo em V.G., em rebatimento, obtendo-se **C_r**. Em seguida inverteu-se o rebatimento, conforme exposto no relatório do exercício 730 (aconselha-se a sua leitura), o que nos permitiu determinar as projecções de **B** e **C** e as projecções do triângulo.

733.

Em primeiro lugar, representou-se o plano γ , pelos seus traços. A determinação das projecções de **A** e **C** pode processar-se por dois raciocínios distintos. O primeiro consiste em determinar as coordenadas dos dois pontos – uma vez que a diagonal **[AC]** está contida no $\beta_{1/3}$, sabe-se que os dois pontos, que pertencem **necessariamente** ao $\beta_{1/3}$, têm coordenadas iguais, pelo que **A** tem 2 de cota e 2 de afastamento e **C** tem 6 de cota e 6 de afastamento. As projecções de **A** e **C**, pertencentes ao plano, podem determinar-se, agora, em função das respectivas cotas. O segundo raciocínio (aquele que foi utilizado na resolução apresentada) consiste em determinar a recta de intersecção do plano γ com o $\beta_{1/3}$ (ver exercício 487), a recta i , e determinar as projecções de **A** e **C**, pertencentes a i , em função dos respectivos afastamentos. A partir das projecções de **A** e **C**, constata-se que não é possível construir directamente as projecções do quadrado, pois o plano que contém a figura não é paralelo a nenhum dos planos de projecção – a figura não se projecta em V.G. em nenhum dos planos de projecção. É necessário, então, o recurso a um processo geométrico auxiliar. Optou-se pelo rebatimento do plano γ para o Plano Horizontal de Projecção – a charneira é h_γ . Rebateu-se o plano, rebatendo os pontos **A** e **C** e a recta i , que por eles passa – i_r está definida por A_r e B_r (e passa **necessariamente** pelo ponto de concorrência dos traços do plano, que é um ponto fixo, pois pertence à charneira). Em seguida construiu-se o quadrado em V.G., em rebatimento, e determinaram-se os outros dois vértices da figura, em rebatimento e em projecções (após a inversão do rebatimento – ver exercício 731), o que nos permitiu desenhar as projecções do polígono.



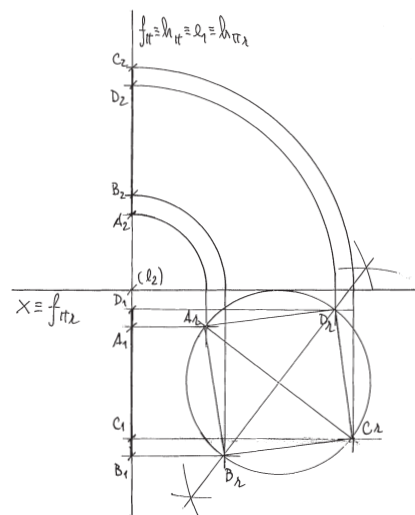
734.



Em primeiro lugar, representou-se o plano de perfil π que contém o polígono, pelos seus traços, bem como os pontos **A** e **C**, pelas suas projecções, pertencentes ao plano. Em seguida, atendendo a que o quadrado está contido num plano de perfil (que não é paralelo a nenhum dos planos de projecção), não se projecta em V.G. em nenhum dos planos de projecção, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. Note que o plano de perfil é **duplamente projectante**, pelo que as duas projecções do polígono irão apresentar a deformação máxima – as projecções do quadrado reduzem-se, ambas, a segmentos de recta. Optou-se pelo rebatimento do plano π , rebatendo o plano para o Plano Horizontal de Projecção – a charneira é h_π e os arcos do rebatimento existem em planos frontais (ver exercício 698). Rebateu-se o plano, obteve-se A_r e B_r . Em seguida, construiu-se o quadrado em V.G., em rebatimento, obtendo B_r e D_r , os outros dois vértices do quadrado, em rebatimento. Invertendo o rebatimento, obtêm-se as projecções de **B** e **D**. O arco do rebatimento de **B** tem a amplitude dos arcos do rebatimento de **A** e **C** (que é de 90°), é concêntrico com estes e roda em sentido contrário – o afastamento de **B** mantém-se, pois o arco do seu rebatimento existe num plano frontal (de frente). Determinando B_2 sobre f_π (no extremo do arco do rebatimento de **B**), obtém-se B_1 sobre h_π e com o afastamento de B_r (pois, no rebatimento efectuado, os pontos mantêm o seu afastamento). As projecções do ponto **D** determinaram-se de forma semelhante. A partir das projecções de **A**, **B**, **C** e **D**, desenharam-se as projecções do quadrado (que são dois segmentos de recta), que se representaram a **traço forte**, pois é esse o objectivo do exercício – o rebatimento é um **traçado auxiliar** para atingir o objectivo do exercício (as projecções do quadrado), pelo que o quadrado, em rebatimento, é representado a **traço leve**.

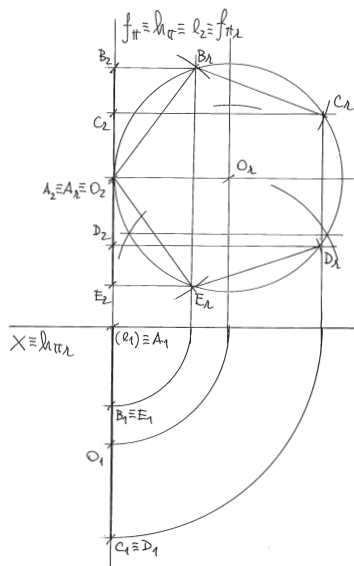
735.

Em primeiro lugar, representou-se o plano de perfil π , pelos seus traços, e o ponto P , pelas suas projecções, pertencente ao plano. É dado o comprimento do lado do triângulo e o ângulo que o lado $[PQ]$, do triângulo, faz com o Plano Frontal de Projectão – este ângulo é igual ao ângulo que o lado $[PQ]$ faz com f_π (ver exercício 706). Esse ângulo existe **no espaço**, na superfície do plano – sugere-se a visualização da situação. Tendo em conta que o triângulo está contido num plano perfil, não se projectando em V.G. em nenhum dos planos de projecção, é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. Recorreu-se ao **rebatimento** do plano π para o Plano Horizontal de Projectão, para construir o triângulo em V.G., em rebatimento, no Plano Horizontal de Projectão – a charneira é h_π e os arcos do rebatimento existem em planos frontais (ver exercício 698). Rebateu-se o plano, obtendo-se A_r – a partir de A_r , mediu-se o ângulo de 20° com f_{π_r} , sendo que existem duas hipóteses para medir o ângulo dado. No entanto, em apenas uma delas (a hipótese apresentada) se garante que o ponto Q tenha cota inferior a P (na outra hipótese, o ponto Q teria **necessariamente** cota superior a P ou não se situaria no espaço do 1° Diedro). Sobre o lado do ângulo e a partir de P_r , mediram-se os 5 cm (a medida do lado), obtendo-se Q_r , o que nos possibilitou a construção do triângulo em V.G., em rebatimento, obtendo-se R_r . Em seguida, inverteu-se o rebatimento, conforme exposto no relatório do exercício anterior (aconselha-se a sua leitura), o que nos permitiu determinar as projecções de Q e R e as projecções do triângulo.



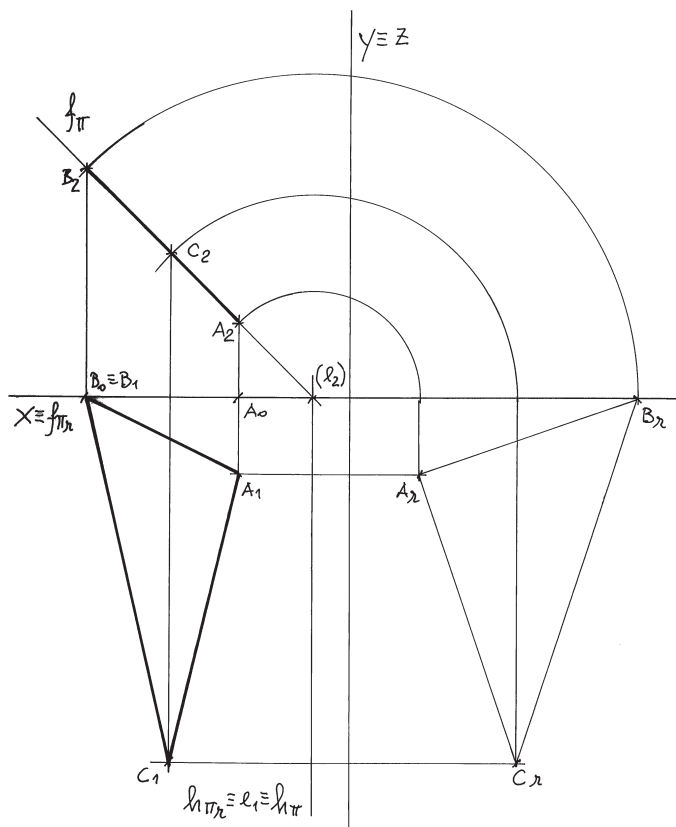
736.

Em primeiro lugar, representou-se o plano de perfil π que contém o polígono, pelos seus traços, bem como o ponto O , pelas suas projecções, pertencente ao plano. Em seguida, atendendo a que o pentágono está contido num plano de perfil, não se projecta em V.G. em nenhum dos planos de projecção, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. Optou-se pelo rebatimento do plano de perfil para o Plano Frontal de Projectão (ver exercício 699). Sobre o rebatimento do plano e a sua inversão, para obter as projecções do polígono, ver relatório do exercício 734. Ao nível dos dados e sua interpretação, para a construção do pentágono, há a referir que o lado $[CD]$, do polígono, é vertical e é o lado de maior afastamento do pentágono, pelo que, em rebatimento, é o lado mais distante de f_π . Por outro lado, a circunferência circunscrita ao pentágono tem 3 cm de raio e o seu centro tem 3 cm de afastamento, pelo que a circunferência é tangente a f_π – em rebatimento, a circunferência é tangente a f_{π_r} . Assim, o vértice oposto ao lado $[CD]$ é A , que é, na resolução apresentada, um ponto da charneira (note que, caso se tivesse rebatido o plano π para o Plano Horizontal de Projectão, A não seria um ponto da charneira).

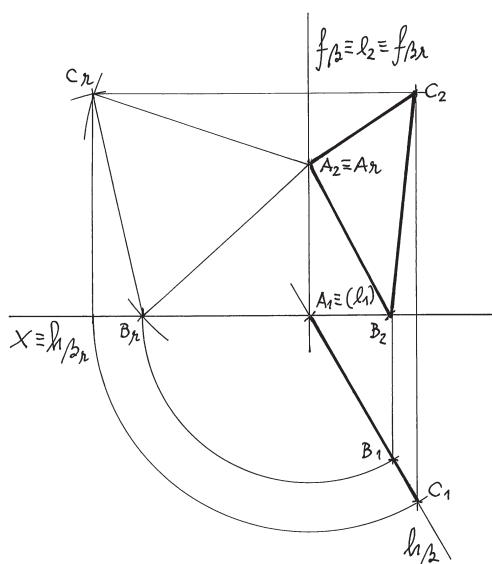


737.

Os dados do exercício permitiram-nos determinar as coordenadas em falta dos pontos **A** e **B** – **A** tem 2 de cota, pois é um ponto do $\beta_{1/3}$ (pontos do $\beta_{1/3}$ têm coordenadas iguais) e **B** tem afastamento nulo, pois é um ponto do Plano Frontal de Projecção. Assim, em primeiro lugar representaram-se os pontos **A** e **B**, pelas suas projecções, e determinaram-se os traços do plano π , de topo, contendo os dois pontos dados. O triângulo está contido num plano de topo, que não é paralelo a nenhum dos planos de projecção – a figura não se projecta em V.G. em nenhum dos planos de projecção. É necessário, então, o recurso a um processo geométrico auxiliar. Optou-se pelo rebatimento do plano π para o Plano Horizontal de Projecção – a charneira é h_π . Rebateu-se o plano, rebatendo os pontos **A** e **B**. A partir de **A_r** e **B_r** construiu-se o triângulo em V.G., em rebatimento, atendendo a que o cateto **[AC]** mede 8 cm (dado no enunciado) é perpendicular ao cateto **[AB]**. Note que, tratando-se de um triângulo rectângulo, a hipotenusa é o lado maior do polígono. Sendo referido, no enunciado, que **[AC]** é um cateto, e atendendo a que **[AC]** é maior do que **[AB]**, **[AB]** não pode ser a hipotenusa – a hipotenusa tem de ser **[BC]**. Assim, **[AB]** e **[AC]** são perpendiculares entre si e o ângulo recto tem vértice em **A**. Após a construção do triângulo em rebatimento, atendendo ao exposto, determinou-se o vértice **C**, da figura, em rebatimento e em projecções (após a inversão do rebatimento – ver exercício 731), o que nos permitiu desenhar as projecções do triângulo.

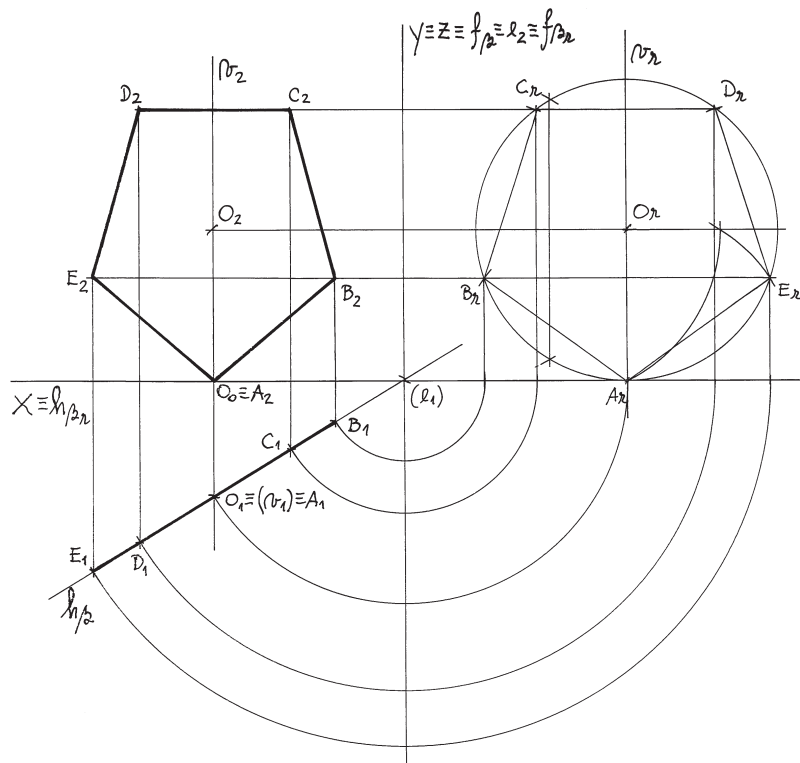


738.



ponto **A** tem afastamento nulo e pertence ao plano β , pelo que é **necessariamente** um ponto de f_β . Assim, em primeiro lugar representou-se o plano β , pelos seus traços, e o ponto **A**, pelas suas projecções. Sabe-se que o ponto **B** tem cota nula, pelo que **B** é **necessariamente** um ponto de h_β – no entanto, uma vez que o plano que contém o triângulo não é paralelo a nenhum dos planos de projecção, o triângulo não se projecta em V.G. em nenhum dos planos de projecção, pelo que não é possível medir directamente o lado **[AB]** em nenhuma das suas projecções. Assim, é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar – optou-se por rebater o plano β para o Plano Frontal de Projecção (ver exercício 681). A charneira é f_β e $A_r \equiv A_2$, pois **A** é um ponto da charneira, pelo que é fixo (roda sobre si próprio). Em rebatimento, o triângulo está em V.G., pelo que já é possível medir o lado **[AB]** em V.G. – com o recurso ao compasso, fazendo centro em **A_r** e com 6 cm de raio (a medida do lado do polígono), determinou-se **B_r** sobre $h_{\beta r}$ (que está no eixo **X** – recorde que se concluíra anteriormente que **B** é um ponto de h_β). A partir de **A_r** e **B_r** construiu-se o triângulo em V.G., em rebatimento, e determinou-se **C_r**. Invertendo o rebatimento (ver exercício 730), determinaram-se as projecções de **B** e de **C** e construíram-se as projecções da figura.

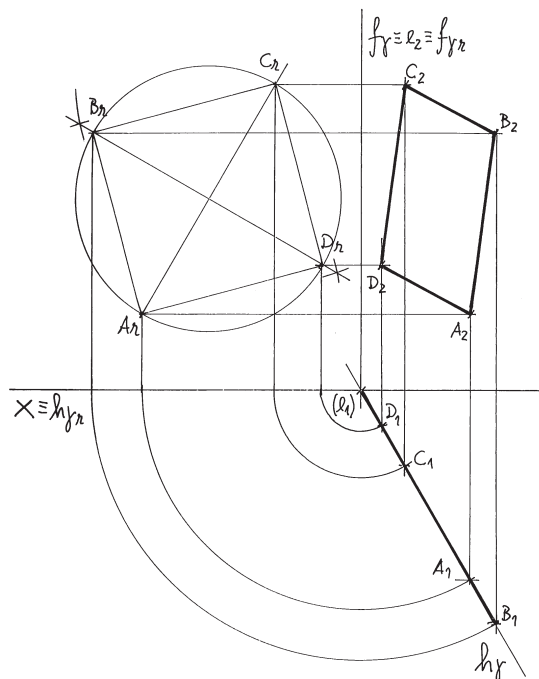
739.



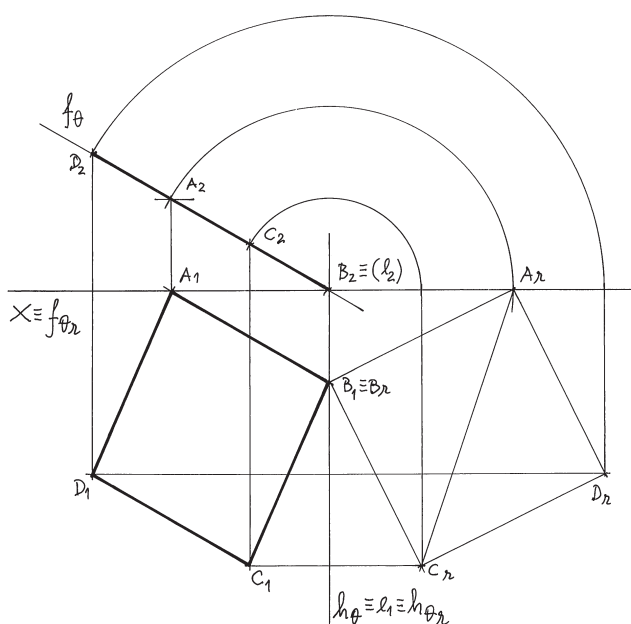
Em primeiro lugar, representou-se o ponto O , pelas suas projecções, e o plano β , contendo O , pelos seus traços. Em seguida, representou-se a recta v que passa por O e à qual pertence o vértice A . Atendendo a que A é um ponto do Plano Horizontal de Projecção, sabe-se imediatamente que A tem cota nula, pelo que A é **necessariamente** um ponto de h_β – A é o traço horizontal da recta v . O plano que contém o pentágono não é paralelo a nenhum dos planos de projecção, pelo que o polígono não se projecta em V.G. em nenhum dos planos de projecção – não é possível construir directamente o pentágono em nenhuma das suas projecções, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. Optou-se por rebater o plano β para o Plano Frontal de Projecção (ver exercício 681). A charneira é f_β . Em rebatimento, o pentágono está em V.G., pelo que, com o compasso, fazendo centro em O_r e raio até A_r , desenhou-se a circunferência circunscrita ao pentágono em V.G. e construiu-se o polígono, em V.G., em rebatimento – note que A é o vértice de menor cota do pentágono e o lado oposto (o lado $[CD]$) é horizontal (de nível), pois é paralelo a h_β . Uma vez determinados todos os vértices do pentágono em rebatimento, inverteu-se o rebatimento (ver exercício 730), obtendo-se as projecções dos vértices do pentágono que nos permitiram construir as projecções da figura.

740.

Em primeiro lugar, representou-se o plano γ , pelos seus traços, e o ponto **A**, pelas suas projecções, pertencente ao plano. É dado o comprimento da diagonal **[AC]** do quadrado e o ângulo que a diagonal faz com f_γ – note que o ângulo dado é o **ângulo real**, no espaço, e não o ângulo das projecções. De facto, é **no espaço**, na superfície do plano, que existe o ângulo entre a diagonal **[AC]** e f_γ (ver exercício 732). Uma vez que o quadrado está contido num plano vertical, não se projecta em V.G. em nenhum dos planos de projecção – nem o ângulo dado se projecta em V.G., nem a medida das diagonais do polígono. É necessário, pois, o recurso a um processo geométrico auxiliar. Recorreu-se ao **rebatimento** do plano γ para o Plano Frontal de Projecção, para construir o quadrado em V.G., em rebatimento, no Plano Frontal de Projecção – a charneira é f_γ e os arcos do rebatimento existem em planos horizontais (ver exercício 681). Rebateu-se o plano, obtendo **A_r**. Em rebatimento, tudo o que existe no plano está em V.G., pelo que, em rebatimento, é possível medir, **em verdadeira grandeza**, o ângulo que a diagonal **[AC]** faz com f_γ – é o ângulo que o segmento **[A_rC_r]** fará com f_{γ_r} . Assim, a partir de **A_r**, mediu-se o ângulo de 30° com f_{γ_r} , sendo que existem duas hipóteses para medir o ângulo dado. No entanto, em apenas uma delas (a hipótese apresentada) se garante que ponto **C** tenha cota superior e afastamento inferior a **A** (na outra hipótese, o ponto **C** teria **necessariamente** afastamento superior a **A** ou não se situaria no espaço do 1º Diedro). Sobre o lado do ângulo e a partir de **A_r**, mediram-se os 7 cm (a medida da diagonal), obtendo-se **C_r**, o que nos possibilitou a construção do quadrado em V.G., em rebatimento, obtendo-se **B_r** e **D_r**. Em seguida, inverteu-se o rebatimento, conforme exposto no relatório do exercício 730 (aconselha-se a sua leitura), o que nos permitiu determinar as projecções de **B**, **C** e **D** e as projecções do quadrado.



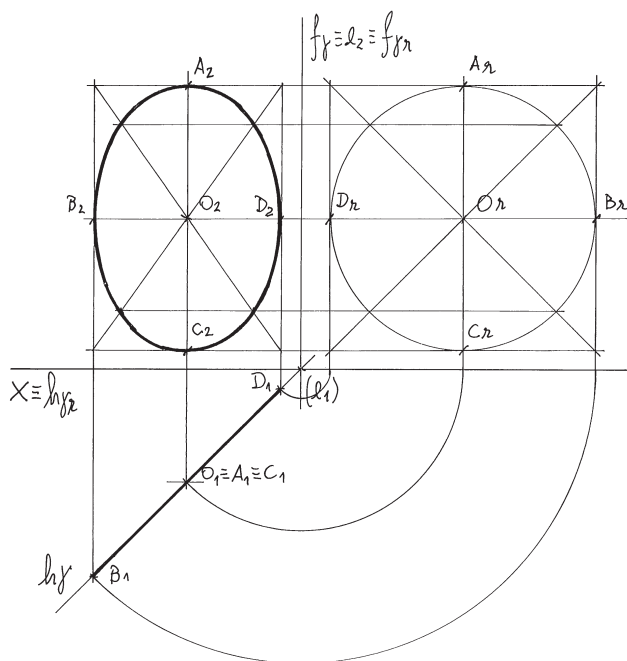
741.



O ponto **A** situa-se no **SPFS**, pelo que tem afastamento nulo (tem 2,5 cm de cota) – é um ponto do Plano Frontal de Projecção e pertence a f_θ . O ponto **B** situa-se no **SPHA**, pelo que tem cota nula e afastamento positivo – é um ponto do Plano Horizontal de Projecção e pertence a h_θ . Assim, em primeiro lugar representou-se o plano θ , pelos seus traços, e o ponto **A**, pelas suas projecções, pertencente ao plano. Sabe-se que o segmento **[AB]** tem as suas projecções paralelas entre si, e uma vez que o plano θ é projectante frontal, sabe-se, também, que **[A₂B₂]** se situa sobre f_θ . Assim, **[A₁B₁]** é **necessariamente** paralelo a f_θ – conduzindo, por **A₁**, uma paralela a f_θ , determinou-se **B₁** sobre h_θ (**B** é um ponto de h_θ), o que nos permitiu determinar as duas projecções de **B** (**B₂** situa-se no eixo **X**). A partir das projecções de **A** e **B**, e uma vez que o quadrado não se projecta em V.G. em nenhum dos planos de projecção (o plano θ não é paralelo a nenhum dos planos de projecção), é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. Optou-se pelo rebatimento do plano θ para o Plano Horizontal de Projecção, seguindo-se todos os procedimentos expostos no relatório do exercício 731, pelo que se aconselha a sua leitura.

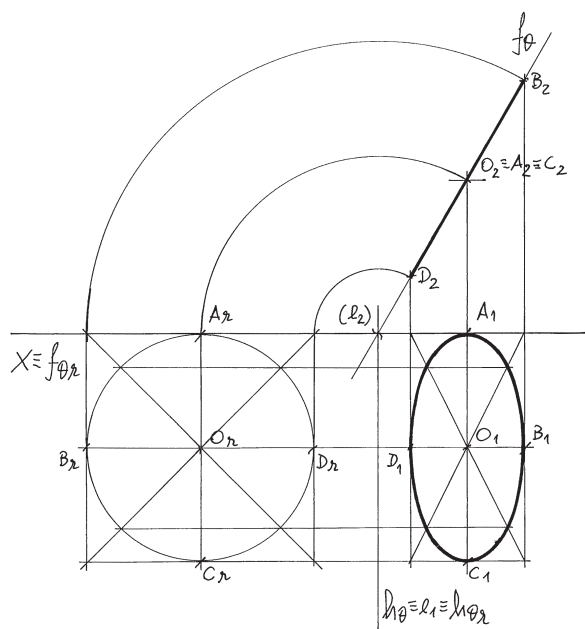
742.

Em primeiro lugar representou-se o plano γ , pelos seus traços, bem como o ponto O , pelas suas projecções, pertencente ao plano. Em seguida, atendendo a que o círculo está contido num plano vertical (que não é paralelo a nenhum dos planos de projecção), pelo que não se projecta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projecção, é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. Note que a projecção horizontal do círculo é um segmento de recta (o plano é projectante horizontal) e a sua projecção frontal será uma elipse. Optou-se pelo recurso ao rebatimento, rebatendo-se o plano γ para o Plano Frontal de Projecção e obtendo-se O_r – a charneira é f_r , pelo que os arcos do rebatimento existem em planos horizontais (de nível). Com centro em O_r e com 3,5 cm de raio, desenhou-se a circunferência que delimita a figura, em V.G., em rebatimento. Para construir a elipse que é a projecção frontal da circunferência, são necessários oito dos seus pontos, bem como o rectângulo envolvente e, se possível, os seus dois eixos. Entre a circunferência (em V.G.) e a elipse (que é a sua projecção frontal), existe uma relação homológica que tem, por eixo, a charneira do rebatimento (f_r), pelo que há que inscrever a figura num quadrado de lados paralelos ao eixo de homologia. Desenhou-se o quadrado circunscrito à circunferência, em V.G., e desenharam-se as suas medianas e as suas diagonais. Os pontos em que as medianas se apoiam nos lados do quadrado (os pontos **A**, **B**, **C** e **D**) são, imediatamente, quatro pontos da circunferência que nos ajudarão a desenhar a elipse (são os pontos em que a circunferência é tangente aos lados do quadrado e as suas projecções frontais serão os pontos em que a elipse será tangente ao rectângulo envolvente). Os pontos em que a circunferência corta as diagonais do quadrado são os outros quatro pontos que nos permitirão o desenho da curva da elipse. O diâmetro **[AC]** da circunferência, por ser paralelo ao eixo de homologia, não sofre redução, pelo que corresponderá ao eixo maior da elipse. Por sua vez, o diâmetro **[BD]**, por ser perpendicular ao eixo de homologia, é o diâmetro que sofre maior redução, pelo que corresponderá ao eixo menor da elipse. Inverteu-se o rebatimento, obtendo-se as projecções do quadrado circunscrito à circunferência – a projecção horizontal do quadrado é um segmento de recta, que corresponde à projecção horizontal do círculo, e a projecção frontal do quadrado é um rectângulo, no qual se inscreverá a elipse. Desenharam-se as medianas e as diagonais do rectângulo, que são concorrentes entre si sobre O_2 . Os pontos em que as medianas se apoiam nos lados do rectângulo são, imediatamente, as projecções frontais dos pontos **A**, **B**, **C** e **D**. **[A₂C₂]** é o eixo maior da elipse e **[B₂D₂]** é o eixo menor da elipse. Os pontos em que a circunferência corta as diagonais do quadrado foram transportados para as projecções frontais daquelas, através dos planos horizontais (de nível) que os contêm, obtendo-se, assim, as projecções frontais dos oito pontos que nos permitem desenhar a elipse. No desenho da curva, teve-se em conta que a elipse é **necessariamente** tangente aos lados do rectângulo em **A₂**, **B₂**, **C₂** e **D₂**.



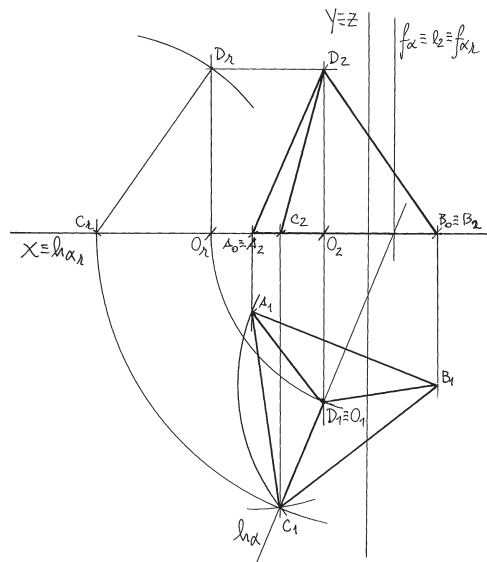
743.

Em primeiro lugar, representou-se o plano θ pelos seus traços. Em seguida determinaram-se as projecções do ponto O , o centro da circunferência que delimita a figura – O tem 4 cm de cota e tem **necessariamente** 3 cm de afastamento (note que o círculo é tangente ao Plano Frontal de Projecção, pelo que a distância do seu centro ao Plano Frontal de Projecção – o afastamento de O – é igual ao raio do círculo). O círculo está contido num plano de topo, pelo que não se projecta em verdadeira grandeza em nenhum dos planos de projecção – é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. Note que a projecção frontal do círculo é um segmento de recta (o plano é projectante frontal) e a sua projecção horizontal será uma elipse. Optou-se pelo recurso ao rebatimento, rebatendo-se o plano θ para o Plano Horizontal de Projecção – a charneira é h_θ , pelo que os arcos do rebatimento existem em planos frontais (de frente). Em V.G., com centro em O_r , desenhou-se a circunferência que delimita a figura, em rebatimento. Para construir a elipse que é a projecção horizontal da circunferência, são necessários oito dos seus pontos, bem como o rectângulo envolvente e, se possível, os seus dois eixos. O eixo de homologia entre a circunferência e a elipse é a charneira do rebatimento (h_θ), pelo que há que inscrever a figura num quadrado de lados paralelos a h_θ . Desenhou-se o quadrado circunscrito à circunferência, em V.G., e desenharam-se as suas medianas e as suas diagonais. Os pontos **A**, **B**, **C** e **D** são os pontos em que as medianas se apoiam nos lados do quadrado e são quatro pontos da circunferência (são os pontos em que a circunferência é tangente aos lados do quadrado e as suas projecções horizontais serão os pontos em que a elipse será tangente aos lados do rectângulo envolvente). Os pontos em que a circunferência corta as diagonais do quadrado são os outros quatro pontos de que necessitamos para o desenho da elipse. O diâmetro **[AC]** da circunferência, por ser paralelo a h_θ , não sofre redução, pelo que corresponderá ao eixo maior da elipse. Por sua vez, o diâmetro **[BD]**, por ser perpendicular a h_θ , é o diâmetro que sofre maior redução, pelo que corresponderá ao eixo menor da elipse. Inverteu-se o rebatimento, obtendo-se as projecções do quadrado circunscrito à circunferência – a projecção frontal do quadrado é um segmento de recta, que corresponde à projecção frontal do círculo, e a projecção horizontal do quadrado é um rectângulo, no qual se inscreverá a elipse. Desenharam-se as medianas e as diagonais do rectângulo, que são concorrentes entre si sobre O_1 . Os pontos em que as medianas se apoiam nos lados do rectângulo são, imediatamente, as projecções horizontais dos pontos **A**, **B**, C e **D**. **[A₁C₁]** é o eixo maior da elipse e **[B₁D₁]** é o seu eixo menor. Os pontos em que a circunferência corta as diagonais do quadrado foram transportados para as projecções horizontais daquelas, através dos planos frontais (de frente) que os contêm, obtendo-se, assim, as projecções horizontais dos oito pontos que nos permitem desenhar a elipse. No desenho da curva, teve-se em conta que a elipse é **necessariamente** tangente aos lados do rectângulo em **A₁**, **B₁**, **C₁** e **D₁**.

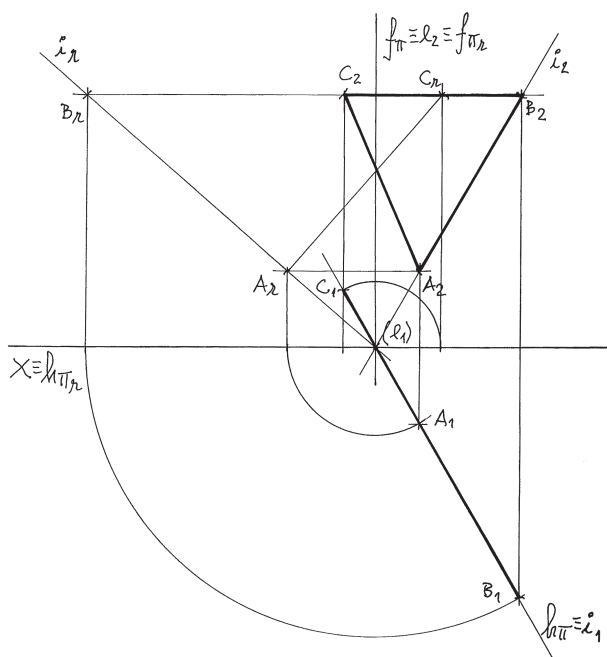


744.

Ver exercício 724. Em primeiro lugar desenharam-se as projecções do triângulo $[ABC]$, em função dos dados, e determinou-se imediatamente a projecção horizontal do sólido, conforme exposto nos relatórios dos exercícios 566 e 568. Agora, nesta situação, ao contrário das situações referidas, não há nenhuma aresta com extremo em D que se projecte em V.G. em qualquer dos dois planos de projecção, pelo que os procedimentos explicitados naqueles relatórios não são utilizáveis nesta situação (ver exercício 724). Há, pois, que recorrer a um processo geométrico auxiliar, para conseguirmos uma das arestas $[AD]$, $[BD]$ ou $[CD]$ em V.G. – optou-se por determinar a V.G. da aresta $[CD]$. Conduziu-se o plano α , vertical, que contém a aresta $[CD]$ (é o plano projectante horizontal da aresta CD) e efectuou-se o seu rebatimento para o Plano Frontal de Projecção, obtendo-se C_r e O_r (sendo O o centro do triângulo). D_r tem de se situar na vertical que passa por O_r , tal que $\overline{C_r D_r} = \overline{A_1 B_1} = \overline{A_1 C_1} = \overline{B_1 C_1}$ (o lado do triângulo, que é a medida da aresta do sólido, está em V.G. da projecção horizontal de cada um dos lados do triângulo $[ABC]$). Assim, com o recurso ao compasso, fazendo centro em C_r e com raio igual a $\overline{A_1 B_1} = \overline{A_1 C_1} = \overline{B_1 C_1}$, determinou-se D_r na vertical que passa por O_r . Invertendo o rebatimento (que se processou em planos horizontais, pelo que D mantém a cota), obteve-se D_2 , a projecção frontal de D , o que nos permitiu concluir a construção da projecção frontal do sólido.



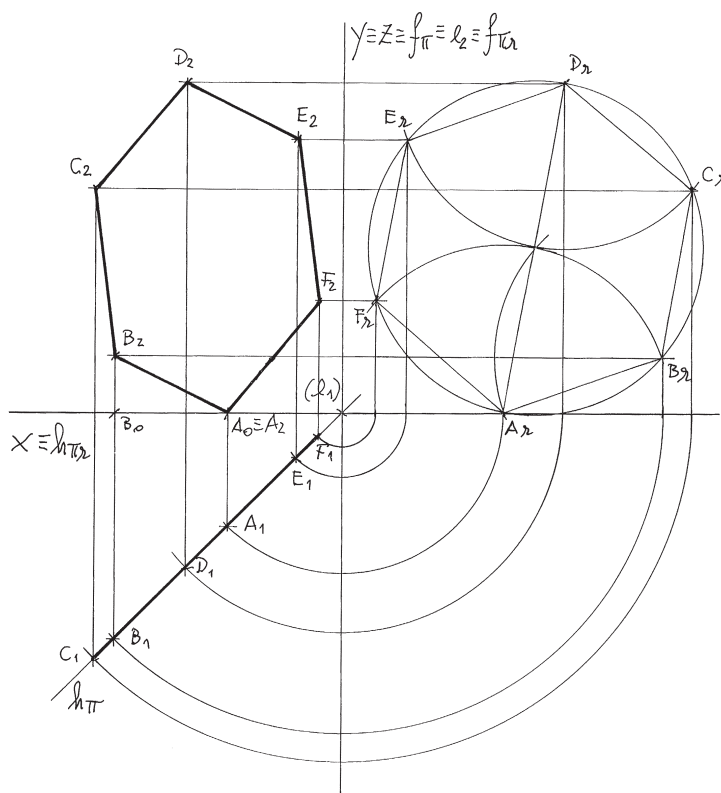
745.



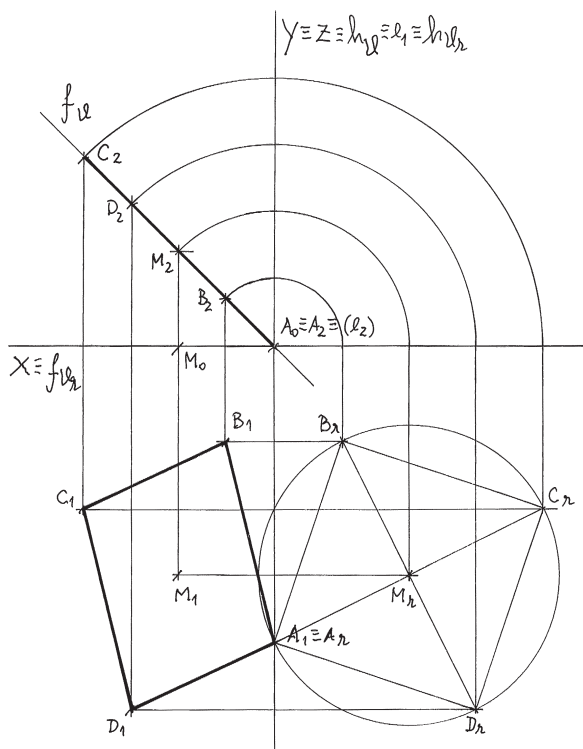
Em primeiro lugar, representou-se o plano π , pelos seus traços, e o ponto A , pelas suas projecções, pertencente ao plano. O cateto $[AB]$ do triângulo pertence ao $\beta_{1/3}$, pelo que está contido na recta de intersecção do plano π com o $\beta_{1/3}$ – determinou-se a recta i , a recta de intersecção dos dois planos (ver exercício 486) e determinaram-se as projecções do ponto A , pertencente à recta i (com 2 cm de afastamento). Não é possível construir directamente as projecções do triângulo, pois o plano que contém a figura não é paralelo a nenhum dos planos de projecção – a figura não se projecta em V.G. em nenhum dos planos de projecção. É necessário, então, o recurso a um processo geométrico auxiliar. Optou-se pelo rebatimento do plano π para o Plano Frontal de Projecção – a charneira é f_π . Rebateu-se o plano, rebatendo o ponto A e a recta $i - i_r$, está definida por A_r e pelo ponto de concorrência dos traços do plano (que é o ponto de concorrência da recta i com o eixo X , pois a recta i é uma recta passante), que é um ponto fixo, pois pertence à charneira. Em seguida, sobre i_r e a partir de A_r , mediram-se os 7 cm (o comprimento do cateto $[AB]$), obtendo-se B_r , com cota positiva (cota superior a A). A partir de A_r e B_r , construiu-se o triângulo em V.G., atendendo a que o ângulo recto do triângulo tem vértice em A (os catetos $[AB]$ e $[AC]$ são perpendiculares entre si) e que a hipotenusa $[BC]$ é horizontal (em rebatimento, $[B_r C_r]$ é paralelo a h_π , pois rectas horizontais de um plano são paralelas entre si e paralelas ao traço horizontal do plano, no espaço, em projecções e em rebatimento). Efectuada a construção em rebatimento, constata-se que o vértice C , do triângulo, tem **necessariamente** afastamento negativo – note que, no enunciado, **nunca** é referido que o triângulo se situa no espaço do 1º Diedro. Invertendo o rebatimento, determinaram-se as projecções de B e C (ver exercício 730) e desenharam-se as projecções do polígono. Note que a inversão dos rebatimentos de B e de C é a mesma, apesar de o afastamento negativo do ponto C poder gerar alguma confusão. No entanto, repare que o arco do rebatimento de C é concêntrico com o arco do rebatimento de B , tem a mesma amplitude e roda no mesmo sentido, sendo que, tal como B , também C mantém a cota.

746.

Em primeiro lugar representaram-se os pontos **A** e **B**, pelas suas projecções, e o plano vertical π que contém os dois pontos, pelos seus traços. Em seguida, uma vez que a figura não se projecta em V.G. em nenhum dos planos de projecção, é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar – optou-se por rebater o plano π para o Plano Frontal de Projecção (a charneira é f_π), o que nos permitiu a construção do hexágono em V.G. e, depois, invertendo o rebatimento, determinaram-se as projecções da figura – ver exercício 730.



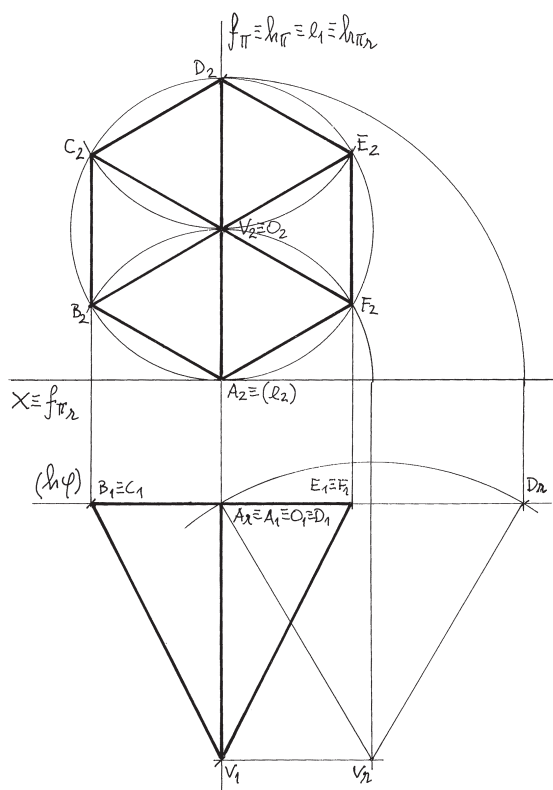
747.



Os dados do exercício permitiram-nos representar o ponto **M**, pelas suas projecções, e localizar a projecção frontal do ponto **A** – **A** tem abcissa e cota nulas. O ponto **A** é **necessariamente** um ponto de h_θ . A partir das projecções frontais dos dois pontos, é possível representar o plano ϑ pelos seus traços, contendo os dois pontos. Note que não nos é possível saber, de forma imediata e a partir dos dados, o afastamento do ponto **A**. Uma vez que a figura não se projecta em V.G. em nenhum dos planos de projecção, é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar – optou-se por rebater o plano ϑ para o Plano Horizontal de Projecção (a charneira é h_θ). Rebateu-se o plano, rebatendo o ponto **M**. Com o compasso, fazendo centro em M_r e com 4 cm de raio, desenhou-se, em V.G., em rebatimento, a circunferência circunscrita ao polígono e esta permitiu-nos determinar **A_r** sobre h_θ (recorde que **A** é um ponto de h_θ , pois tem cota nula). A partir de **A_r**, construiu-se o quadrado em V.G., em rebatimento, e efectuou-se a inversão do rebatimento (ver exercício 731), o que nos possibilitou determinar as projecções de todos os vértices do quadrado e desenhar as suas projecções. Note que o ponto **A** é um ponto da charneira, sendo fixo (roda sobre si próprio), pelo que se tem **A_r** = **A₁**.

752.

Os dados do enunciado permitem-nos, de forma imediata, representar o ponto V , pelas suas projecções. Não nos é dado o afastamento do plano frontal (de frente) que contém a base, mas, no entanto, atendendo a que se trata de uma pirâmide regular, é possível construir a projecção frontal da pirâmide. O eixo do sólido está contido numa recta de topo (ortogonal ao plano da base), pelo que se tem imediatamente $V_2 \equiv O_2$, sendo O o centro da circunferência circunscrita à base. A circunferência é tangente ao Plano Horizontal de Projecção, pelo que tem 4 cm de raio – com centro em O_2 , desenhou-se a projecção frontal da circunferência, que não tem qualquer deformação (o plano que a contém é paralelo ao Plano Frontal de Projecção). Atendendo a que duas arestas laterais do sólido são de perfil, é possível localizar imediatamente os vértices de maior e de menor cota da base e construir o hexágono da base em V.G., em projecção frontal (não há deformação). Tendo em conta que o vértice da pirâmide é visível em projecção frontal, sabe-se que o afastamento da base é inferior ao afastamento do vértice, pelo que todas as arestas laterais do sólido são visíveis em projecção frontal, o que nos permite concluir a construção da sua projecção frontal. Para a construção da projecção horizontal da pirâmide falta-nos o afastamento do plano da base, que não nos é dado. Sabe-se, no entanto, que as arestas laterais do sólido medem 8 cm, mas nenhuma delas se projecta em V.G. – todas as arestas laterais (os segmentos $[AV]$, $[BV]$, $[CV]$, $[DV]$, $[EV]$ e $[FV]$) são oblíquas aos dois planos de projecção. Há, assim, que recorrer a um processo geométrico auxiliar – optou-se por rebater o plano de perfil que contém as arestas laterais $[AV]$ e $[DV]$ (o plano π). Rebateu-se o plano π para o Plano Horizontal de Projecção (a charneira é h_π e os arcos do rebatimento existem em planos frontais), obtendo-se V_r e as referências que nos permitem determinar A_r e D_r . Com o compasso, fazendo centro em V_r e com 8 cm de raio (a medida das arestas laterais), desenhou-se um arco de circunferência – os pontos em que este intersecta as referências de A_r e D_r são, precisamente, A_r e D_r (o que nos permite desenhar as arestas laterais $[AV]$ e $[DV]$ em rebatimento). Uma vez que o rebatimento de A e D se processa num plano frontal, que é **necessariamente** o plano da base, está determinado o afastamento do plano φ (o plano da base), o que nos permite determinar as projecções horizontais de todos os vértices da base do sólido e concluir a construção da sua projecção horizontal.



11

REPRESENTAÇÃO DE SÓLIDOS II

753.

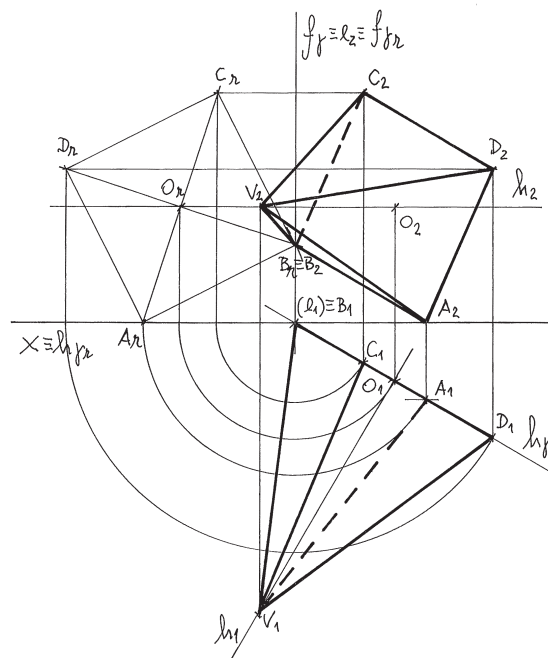
O eixo de uma pirâmide regular de base vertical está **necessariamente** contido numa **recta horizontal (de nível)** ortogonal ao plano da base, ou seja, cuja projecção horizontal é perpendicular ao traço horizontal do plano da base.

754.

As arestas laterais de um prisma regular de bases de topo estão **necessariamente** contidas em **rectas frontais (de frente)** ortogonais aos planos das bases, ou seja, cujas projecções frontais são perpendiculares aos traços frontais dos planos das bases.

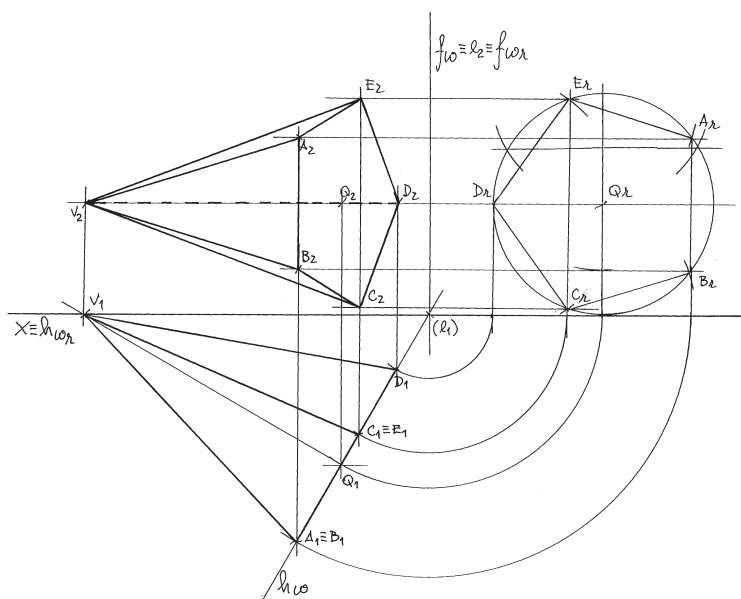
755.

Em primeiro lugar, representou-se o plano γ , pelos seus traços, e o ponto **A**, pelas suas projecções, pertencente ao plano (**A** é um ponto de h_γ , pois tem cota nula). O ponto **B** tem afastamento nulo, pelo que **B** é um ponto de f_γ . Como a base da pirâmide está contida num plano não paralelo a qualquer dos planos de projecção, a construção da base requer o recurso a um processo geométrico auxiliar (ver exercício 730) – optou-se pelo rebatimento do plano γ para o Plano Frontal de Projecção (a charneira é f_γ). Rebateu-se o plano, rebatendo o ponto **A** – com o compasso, fazendo centro em A_r e com 4,5 cm de raio (o lado do quadrado), determinou-se B_r sobre f_γ (**B** é um ponto de f_γ) e construiu-se o quadrado em V.G., em rebatimento. Em seguida, inverteu-se o rebatimento (conforme exposto no relatório do exercício 730) e construíram-se as projecções do quadrado **[ABCD]**, que é a base da pirâmide. Note que, em rebatimento, se determinou previamente o centro do quadrado, o ponto **O**, cujas projecções também se determinaram com a inversão do rebatimento, pois o eixo da pirâmide passa por **O**. A pirâmide é **regular**, pelo que o seu eixo está contido numa recta ortogonal ao plano da base (o plano γ). A recta **h**, horizontal (de nível), passando por **O** e ortogonal a γ (ver resposta à questão do exercício 753), é a recta suporte do eixo do sólido, sendo que h_1 é perpendicular a h_γ . Como a pirâmide é **regular**, a sua altura corresponde ao comprimento do seu eixo, que se projecta em V.G. no Plano Horizontal de Projecção, pois a recta **h** é paralela àquele. Assim, a partir de O_1 , sobre h_1 , mediram-se os 7 cm (a altura da pirâmide), obtendo-se V_1 , a projecção horizontal do vértice da pirâmide – V_2 está sobre h_2 . A partir das projecções de todos os vértices do sólido, desenharam-se os seus contornos aparentes. O **contorno aparente frontal** é **[A₂B₂V₂C₂D₂]**. A aresta **[BC]**, da base, é a única aresta invisível em projecção frontal, pois a base e a face lateral **[BCV]** são invisíveis, em projecção frontal. O **contorno aparente horizontal** é **[B₁C₁D₁V₁]**. Em projecção horizontal, as arestas da base que são invisíveis estão ocultas pelas arestas visíveis. A aresta lateral **[CV]** é visível (**C** é o vértice de maior cota) e a aresta lateral **[AV]** é invisível (**A** é o vértice de menor cota).



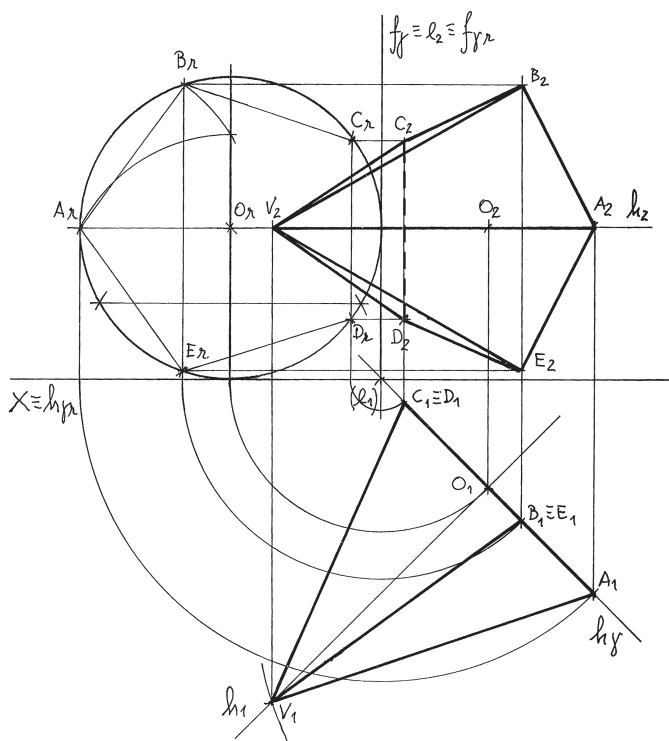
756.

Em primeiro lugar, representou-se o plano ω , pelos seus traços, e o ponto **Q**, pelas suas projecções, pertencente ao plano. A base da pirâmide está contida num plano não paralelo a qualquer dos planos de projecção, pelo que a construção da base requer o recurso a um processo geométrico auxiliar (ver exercício 739) – optou-se pelo rebatimento do plano ω para o Plano Frontal de Projecção (a charneira é f_ω). A circunferência circunscrita é tangente ao Plano Horizontal de Projecção, pelo que, em rebatimento, é tangente a h_ω . O lado de maior afastamento do pentágono (o lado mais distante de f_ω , em rebatimento) é vertical – é o lado **[AB]** e **A** tem cota superior a **B**. Após a construção da base da pirâmide em rebatimento, em V.G., inverteu-se o rebatimento e obtiveram-se as projecções do pentágono. A pirâmide é **regular**, pelo que o seu eixo é ortogonal ao plano da base (o plano ω) – existe numa recta horizontal (de nível) que passa por **Q** e cuja projecção horizontal é perpendicular a h_ω . O vértice da pirâmide está no Plano Frontal de Projecção (tem afastamento nulo), pelo que é o traço frontal da recta que contém o eixo da pirâmide. A partir das projecções de todos os vértices da pirâmide, desenharam-se os contornos aparentes. O **contorno aparente frontal** é **[C₂V₂E₂D₂]**. A base é visível em projecção frontal, pelo que todas as arestas da base são visíveis. Os únicos vértices que não pertencem ao contorno aparente frontal são **A** e **B**, que são os vértices de maior afastamento, pelo que são visíveis, bem como todas as arestas que neles convergem – as arestas laterais **[AV]** e **[BV]** são visíveis e a aresta lateral **[DV]** é invisível, pois **D** é o vértice de menor afastamento. As faces laterais **[CDV]** e **[DEV]** são invisíveis, em projecção frontal. O **contorno aparente horizontal** é **[A₁V₁D₁E₁]**. Em projecção horizontal, todas as arestas da pirâmide que são invisíveis estão ocultas por arestas visíveis, pelo que não há quaisquer invisibilidades a assinalar.



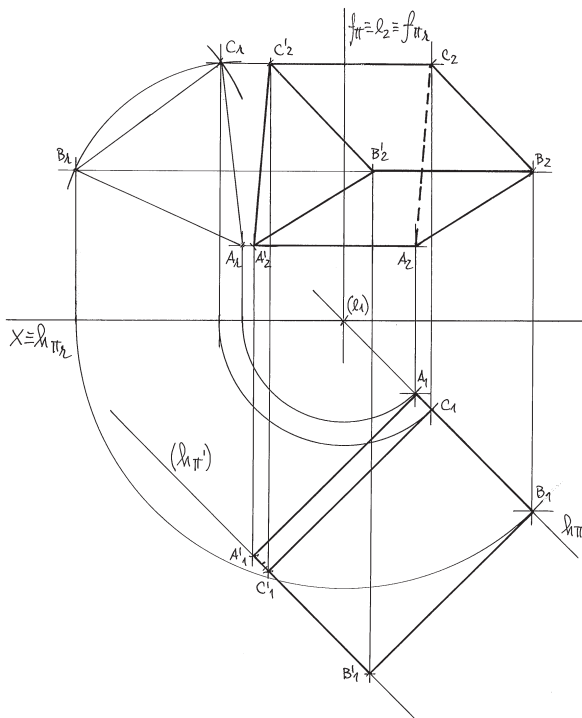
757.

Em primeiro lugar, representou-se o plano γ , pelos seus traços, o plano que contém a base da pirâmide – o plano γ não é paralelo a nenhum dos planos de projecção, pelo que é necessário recorrer a um processo geométrico auxiliar para a determinação das projecções do pentágono da base. Em função dos dados, é possível concluir que o raio da circunferência circunscrita ao pentágono é 4 cm – **A** é o vértice de maior afastamento do pentágono e o lado que lhe é oposto é vertical, pelo que **A** e o centro da circunferência circunscrita ao polígono têm necessariamente a mesma cota. Uma vez que a circunferência é tangente ao Plano Horizontal de Projecção (é tangente aos dois planos de projecção), o raio da circunferência é **necessariamente** 4 cm. Rebateu-se o plano γ para o Plano Frontal de Projecção, identificando imediatamente a charneira (que é f_γ) e os traços do plano em rebatimento. Em seguida, uma vez que a circunferência circunscrita é tangente aos dois planos de projecção, ela é **necessariamente** tangente aos dois traços do plano (ver exercício 748). Assim, em rebatimento, determinou-se O_r (o centro da circunferência circunscrita ao pentágono), equidistante de f_r e de h_r (a 4 cm de ambos), desenhou-se a circunferência, em V.G., tangente aos dois traços do plano (em rebatimento) e efectuou-se a construção do pentágono inscrito na circunferência (em rebatimento), de acordo com os dados. A pirâmide é **regular**, pelo que o seu eixo é ortogonal ao plano da base (o plano γ) – existe numa recta horizontal (de nível) h , cuja projecção horizontal é perpendicular a h_γ . Note que, nesta situação, não nos é dada a altura da pirâmide (ao contrário da situação do exercício 755) nem a localização do vértice do sólido no espaço (como na situação do exercício anterior). De facto, o problema deste exercício está, precisamente, na determinação do vértice do sólido, pois a única informação que nos é dada a esse respeito é o comprimento das arestas laterais. As arestas laterais são os segmentos **[AV]**, **[BV]**, **[CV]**, **[DV]** e **[EV]**. Analisando detalhadamente a posição, no referencial, de cada uma das arestas laterais, constata-se que existe uma aresta que é horizontal (de nível) – a aresta lateral **[AV]**, pois **A** e **V** têm **necessariamente** a mesma cota. Assim, esta aresta projecta-se em V.G. no Plano Horizontal de Projecção. A partir dessa constatação, é possível, com o compasso, fazendo centro em A_1 e com 9 cm de raio (o comprimento das arestas), determinar V_1 (a projecção horizontal do vértice) sobre h_1 (que é a recta suporte do eixo do sólido) – V_2 está sobre h_2 . A partir das projecções de todos os vértices do sólido, desenharam-se os seus contornos aparentes. O **contorno aparente frontal** é **[A₂B₂C₂V₂D₂E₂]**. A aresta **[CD]**, da base, é a única aresta invisível em projecção frontal, pois a base e a face lateral **[CDV]** são invisíveis, em projecção frontal. O **contorno aparente horizontal** é **[A₁B₁C₁V₁]**. Em projecção horizontal, todas as arestas da pirâmide que são invisíveis estão ocultas por arestas visíveis, pelo que não há quaisquer invisibilidades a assinalar.

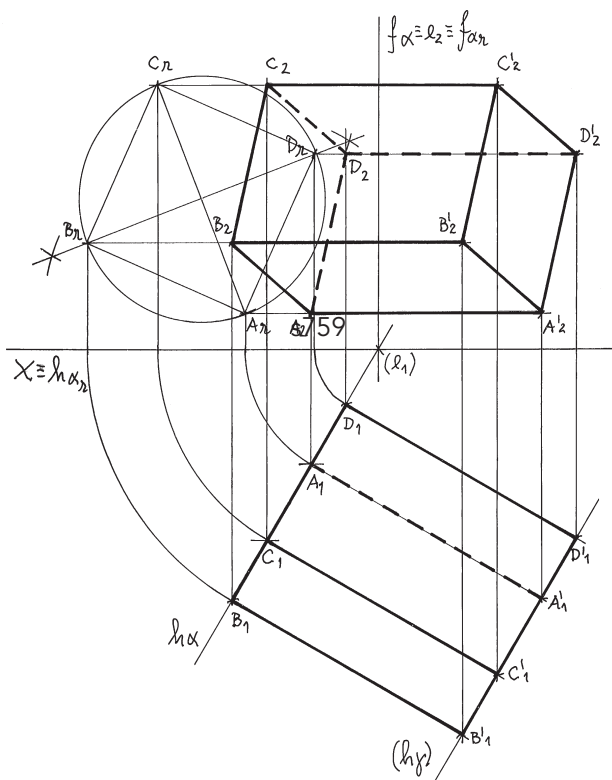


758.

Em primeiro lugar, representou-se o plano π , pelos seus traços, e os pontos **A** e **B**, pelas suas projecções, pertencentes ao plano. Para obter as projecções do triângulo **[ABC]**, da base referida, foi necessário recorrer a um rebatimento, pois o plano π não é paralelo a nenhum dos planos de projecção (ver exercício 730). A altura de um prisma é a distância entre os planos das duas bases, medida perpendicularmente aos planos – o plano π' , representado apenas pelo seu traço horizontal (razão pela qual se assinalou esse traço entre parêntesis), é o plano da outra base do prisma e está a 6 cm (a altura do sólido) do plano π , garantindo que o prisma se situa no espaço do 1º Diedro, como é pedido no enunciado. O prisma é regular, pelo que as suas arestas laterais são ortogonais aos planos das bases – estão contidas em rectas horizontais (de nível), cujas projecções horizontais são perpendiculares a h_{π} . O triângulo **[A'B'C']** é a outra base do sólido – os vértices **A'**, **B'** e **C'** são os pontos de intersecção das rectas suportes das arestas laterais com o plano π' (intersecção de rectas não projectantes com planos projectantes – ver exercício 432). A partir das projecções de todos os vértices do sólido, desenharam-se os seus contornos aparentes. O **contorno aparente frontal** é **[A₂B₂C₂C'₂A'₂]**. Em projecção frontal, o único vértice que não integra o contorno aparente frontal é o vértice **B'**, que é visível (é o vértice de maior afastamento), bem como todas as arestas que nele convergem. A aresta **[AC]**, da base de menor afastamento, é a única aresta invisível, pois separa duas faces invisíveis em projecção frontal – a base **[ABC]** e a face lateral **[AA'C'C]**. O **contorno aparente horizontal** é **[A₁C₁B₁B'₁C'₁A'₁]**. Em projecção horizontal, a aresta lateral **[CC']** é visível, pois **C** e **C'** são os vértices de maior cota do sólido. As arestas invisíveis do prisma, em projecção horizontal, estão ocultas por arestas visíveis, pelo que, em projecção horizontal, não há quaisquer invisibilidades a assinalar. Note que, em projecção frontal, as arestas da base **[A'B'C']** são **necessariamente** paralelas às arestas correspondentes da base **[ABC]**.



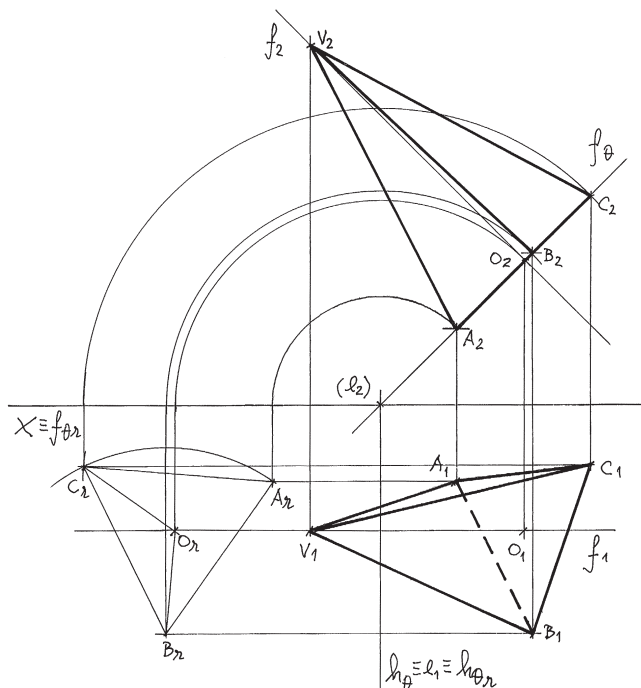
759.



Ver exercício anterior e respectivo relatório. O plano γ , representado apenas pelo seu traço horizontal (razão pela qual se assinalou esse traço entre parêntesis), é o plano da outra base do prisma e está a 7 cm (a altura do sólido) do plano α . O **contorno aparente frontal** é **[A₂B₂C₂C'₂D'₂A'₂]**. Em projecção frontal, existem dois vértices que não integram o contorno aparente frontal – o vértice **B'**, que é visível (é o vértice de maior afastamento), bem como todas as arestas que nele convergem, e o vértice **D**, que é invisível (é o vértice de menor afastamento), bem como todas as arestas que nele convergem. A base **[ABCD]** (a base de menor afastamento) e as faces laterais **[AA'D'D]** e **[CC'D'D]** são invisíveis, em projecção frontal. O **contorno aparente horizontal** é **[B₁C₁D₁D'₁C'₁B'₁]**. Em projecção horizontal, a aresta lateral **[CC']** é visível, pois **C** e **C'** são os vértices de maior cota do sólido, enquanto que a aresta lateral **[AA']** é invisível, pois **A** e **A'** são os vértices de menor cota do sólido. As arestas das bases que são invisíveis, em projecção horizontal, estão ocultas por arestas visíveis. Note que, em projecção frontal, as arestas da base **[A'B'C'D']** são **necessariamente** paralelas às arestas correspondentes da base **[ABCD]**.

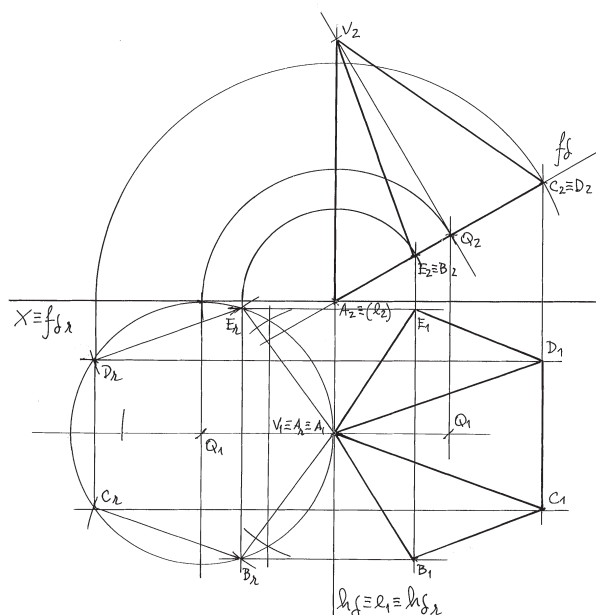
760.

Em primeiro lugar, representou-se o plano θ , pelos seus traços, e os pontos **A**, e **B**, pelas suas projecções, pertencentes ao plano. Como a base da pirâmide está contida num plano não paralelo a qualquer dos planos de projecção, a construção da base requer o recurso a um processo geométrico auxiliar – rebateu-se o plano θ para o Plano Horizontal de Projecção (a charneira é h_θ) e construiu-se o triângulo **[ABC]**, em V.G., em rebatimento, garantindo-se que **B** seja o vértice de maior afastamento do sólido (ver exercício 731). Em seguida inverteu-se o rebatimento, obtendo-se as projecções do triângulo **[ABC]**, que é a base da pirâmide. Note que, em rebatimento, se determinou previamente o centro do triângulo, o ponto **O**, cujas projecções também se determinaram com a inversão do rebatimento, pois o eixo da pirâmide passa por **O**. A pirâmide é **regular**, pelo que o seu eixo está contido numa recta ortogonal ao plano da base (o plano θ). A recta **f**, frontal (de frente), passando por **O** e ortogonal a θ , é a recta suporte do eixo do sólido, sendo que f_2 é perpendicular a f_θ . Como a pirâmide é **regular**, a sua altura corresponde ao comprimento do seu eixo, que se projecta em V.G. no Plano Frontal de Projecção, pois a recta **f** é paralela àquele. Assim, a partir de **O**₂, sobre f_2 , mediram-se os 8 cm (a altura da pirâmide), obtendo-se **V**₂, a projecção frontal do vértice da pirâmide – **V**₁ está sobre f_1 . A partir das projecções de todos os vértices do sólido, desenharam-se os seus contornos aparentes. O **contorno aparente frontal** é **[A₂B₂C₂V₂]**. A aresta **[AC]**, da base, é a única aresta invisível em projecção frontal, mas está oculta pelas arestas da base que são visíveis, pelo que, em projecção frontal, não há quaisquer invisibilidades a assinalar. O **contorno aparente horizontal** é **[A₁V₁B₁C₁]**. A aresta **[AB]**, da base, é a única aresta invisível em projecção horizontal, pois a base e a face lateral **[ABV]** são invisíveis, em projecção horizontal.



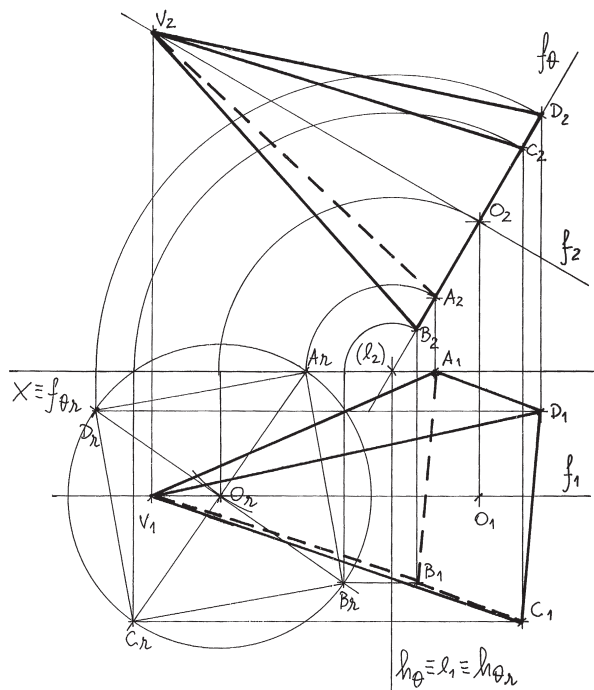
761.

Em primeiro lugar, representou-se o plano δ , pelos seus traços, e o ponto **A**, pelas suas projecções (**A** é um ponto de h_δ , pois tem cota nula). O plano δ não é paralelo a nenhum dos planos de projecção, pelo que é necessário recorrer a um processo geométrico auxiliar para a determinação das projecções do pentágono da base – rebateu-se o plano δ para o Plano Horizontal de Projecção, identificando imediatamente a charneira (que é h_δ), os traços do plano em rebatimento e o ponto **A** em rebatimento (**A**_r = **A**₁, pois **A** é um ponto da charneira, pelo que é fixo – roda sobre si próprio). Em seguida, uma vez que a circunferência circunscrita ao pentágono é tangente aos dois planos de projecção, ela é **necessariamente** tangente aos dois traços do plano (ver exercício 748) e é tangente a h_δ em **A**_r. Assim, em rebatimento, determinou-se **Q**_r (o centro da circunferência circunscrita ao pentágono), equidistante de f_δ e de h_δ (a 3,5 cm de ambos, que é o raio da circunferência, em V.G., tangente aos dois traços do plano (em rebatimento)). Em seguida, efectuou-se a construção do pentágono inscrito na circunferência (em rebatimento), de acordo com os dados – o lado oposto ao vértice **A** é necessariamente de topo. Invertendo-se o rebatimento (ver exercício 731), obtiveram-se as projecções dos vértices do pentágono e foi possível construir as projecções da base do sólido. A pirâmide é **regular**, pelo que o seu eixo existe numa recta ortogonal ao plano da base – está contido numa recta recta frontal (de frente), cuja projecção frontal é perpendicular a f_δ . Note que, nesta situação, não nos é dada a altura da pirâmide – de facto, o problema deste exercício está, precisamente, na determinação do vértice do sólido. Repare que o enunciado refere que a aresta **[AV]** é vertical, pelo que se tem imediatamente **V**₁ = **A**₁. A partir de **V**₁ determina-se **V**₂, sobre a projecção frontal da recta suporte do eixo do sólido, e, a partir das projecções de todos os vértices da pirâmide, desenharam-se os seus contornos aparentes. O **contorno aparente frontal** é **[A₂B₂C₂V₂]**. Em projecção frontal, todas as arestas da pirâmide que são invisíveis estão ocultas por arestas visíveis, pelo que não há quaisquer invisibilidades a assinalar. O **contorno aparente horizontal** é **[B₁C₁D₁E₁V₁]**. Em projecção horizontal, as únicas arestas invisíveis são as arestas **[AB]** e **[AE]**, da base, que estão ocultas pelas arestas laterais **[BV]** e **[EV]**, respectivamente, que são visíveis, pelo que, em projecção horizontal, também não há quaisquer invisibilidades a assinalar.



762.

Em primeiro lugar, representou-se o plano θ , pelos seus traços, e o ponto A , pelas suas projecções, pertencente ao plano. A informação dada sobre o centro da circunferência circunscrita ao quadrado permite-nos, apenas, determinar a projecção frontal de O (o centro da circunferência). O plano θ não é paralelo a nenhum dos planos de projecção, pelo que a construção das projecções do quadrado da base implica o recurso a um processo geométrico auxiliar (ver exercício 731) – optou-se pelo rebatimento do plano θ para o Plano Horizontal de Projecção (a charneira é h_θ). Rebateu-se o plano, obtendo-se A_r e a referência de O_r – repare que não foi possível determinar O_r (apenas a sua referência em rebatimento), pois não é conhecido o afastamento de O . No entanto, sabendo que o raio da circunferência circunscrita ao quadrado é 4 cm, e que o segmento $[OA]$ é **necessariamente** um raio da circunferência, com o compasso, fazendo centro em A_r e com 4 cm de raio (o raio da circunferência), determinou-se O_r na sua referência em rebatimento, obtida a partir de O_2 . A partir de O_r e de A_r , desenhou-se a circunferência circunscrita ao polígono e construiu-se o quadrado, inscrito na mesma, em V.G., em rebatimento, após o que se inverteu o rebatimento e se obtiveram as suas projecções. A pirâmide é **regular**, pelo que a sua altura corresponde ao comprimento do seu eixo, que está contido numa recta frontal (de frente) f , ortogonal ao plano θ (ver exercício 760). Determinadas as projecções do vértice do sólido (como exposto no relatório do exercício 760), a partir das projecções de todos os vértices do sólido desenharam-se os seus contornos aparentes. O **contorno aparente frontal** é $[B_2C_2D_2V_2]$. Em projecção frontal, a aresta lateral $[AV]$ é invisível (A é o vértice de menor afastamento da pirâmide) e a aresta lateral $[CV]$ é visível (C é o vértice de maior afastamento da pirâmide). Em projecção frontal, as arestas da base que são invisíveis estão ocultas pelas arestas da base que são visíveis. O **contorno aparente horizontal** é $[A_1V_1C_1D_1]$. Em projecção horizontal, existe um único vértice que não integra o contorno aparente horizontal – o vértice B , que é invisível (bem como todas as arestas que nele convergem), por ser o vértice de menor cota da pirâmide. A aresta lateral $[DV]$ é visível, pois D é o vértice de maior cota do sólido. Note que, em projecção horizontal, são invisíveis a base e as faces laterais $[ABV]$ e $[BCV]$.

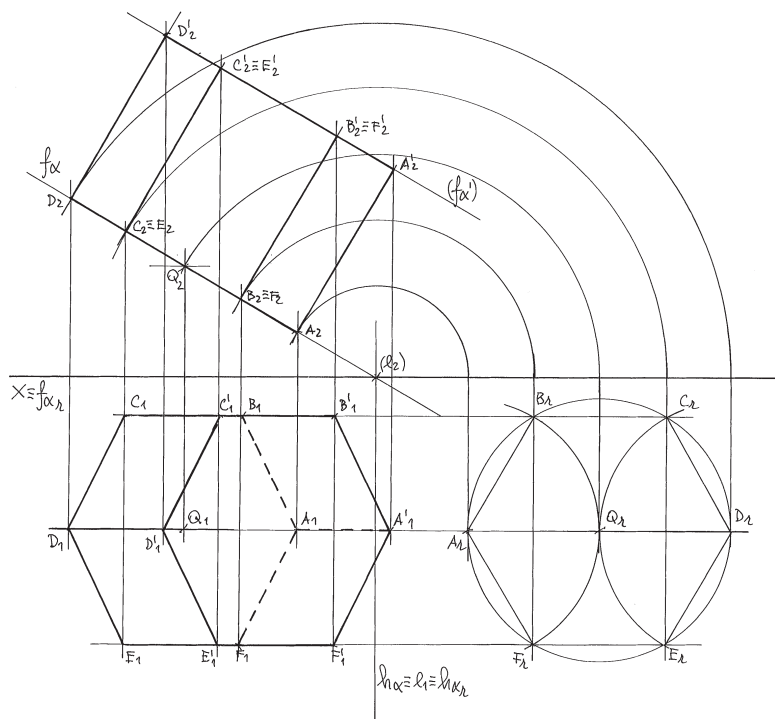


763. Relatório

Em primeiro lugar, representou-se o plano α , pelos seus traços, e o ponto Q , pelas suas projecções, pertencente ao plano. Para obter as projecções do hexágono $[ABCDEF]$, da base referida no enunciado, foi necessário recorrer a um rebatimento, pois o plano α não é paralelo a nenhum dos planos de projecção (ver exercício 731). Na construção do hexágono, em rebatimento, teve-se em conta que duas das faces laterais estão contidas em planos frontais (de frente), o que só é possível se o hexágono tiver dois lados paralelos ao Plano Frontal de Projecção (paralelos a f_α , em rebatimento) – dois lados contidos em rectas frontais (de frente). A altura de um prisma é a distância entre os planos das duas bases, medida perpendicularmente aos planos – o plano α' , representado apenas pelo seu traço frontal (razão pela qual se assinalou esse traço entre parêntesis), é o plano da outra base do prisma e está a 5 cm (a altura do sólido) do plano α , garantindo que o prisma se situa no espaço do 1º Diedro, como é pedido no enunciado. O prisma é regular, pelo que as suas arestas laterais são ortogonais aos planos das bases – estão contidas em rectas frontais (de frente), cujas projecções frontais são perpendiculares a f_α . O hexágono $[A'B'C'D'E'F']$ é a outra base do sólido – os vértices A' , B' , C' , D' , E' e F' são os pontos de intersecção das rectas suportes das arestas laterais com o plano α' (intersecção de rectas não projectantes com planos projectantes – ver exercício 432). A partir das projecções de todos os vértices do sólido, desenharam-se os seus contornos aparentes. O **contorno aparente frontal** é $[A_2A_2'F_2'E_2'D_2D_2E_2F_2]$. Em projecção frontal, todas as arestas invisíveis do prisma estão ocultas por arestas visíveis, pelo que, em projecção frontal, não há quaisquer invisibilidades a assinalar. O **contorno aparente horizontal** é $[A_1'B_1'C_1'C_1D_1E_1E_1F_1]$. Em projecção horizontal, existem dois vértices que não integram o contorno aparente – o vértice D' , que é visível (é o vértice de maior cota), bem como todas as arestas que nele convergem, e o vértice A , que é invisível (é o vértice de menor cota), bem como todas as arestas que nele convergem. A base $[ABCDEF]$ (a base de menor cota) e as faces laterais $[AA'B'B]$, $[BB'C'C]$, $[AA'F'F]$ e $[EE'F'F]$ são invisíveis, em projecção horizontal. Note que, em projecção horizontal, as arestas da base $[A'B'C'D'E'F']$ são **necessariamente** paralelas às arestas correspondentes da base $[ABCDEF]$.

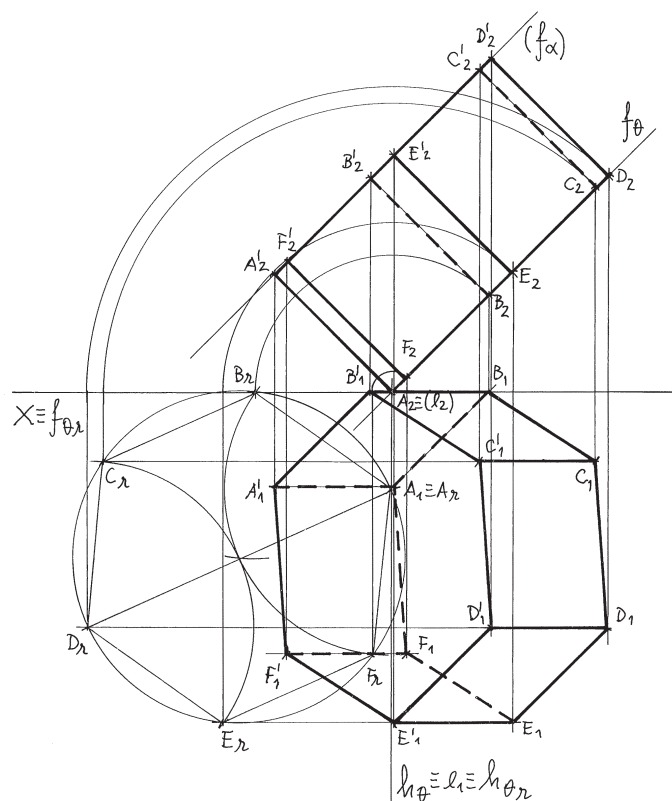
(Continua na página seguinte)

763. Resolução

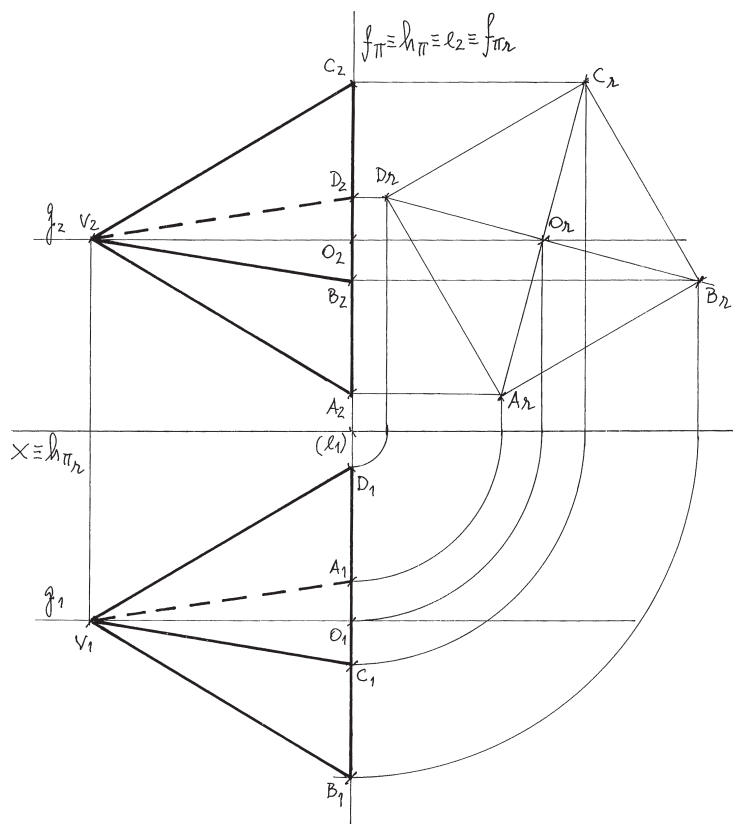


764.

Em primeiro lugar, representou-se o plano θ , pelos seus traços, o ponto A , pelas suas projecções, pertencente ao plano (A é um ponto de h_θ , pois tem cota nula). Em seguida, determinaram-se as projecções do ponto B , de acordo com os raciocínios expostos no relatório do exercício 741. O plano θ não é paralelo a nenhum dos planos de projecção, pelo que, para a construção das projecções do hexágono $[ABCDEF]$, é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar – optou-se pelo rebatimento do plano θ para o Plano Horizontal de Projecção (ver exercício 741). Sobre a determinação das projecções do sólido, ver exercício anterior e respectivo relatório. O **contorno aparente frontal** é $[A_2A'_2F'_2E'_2D'_2D_2E_2F_2]$. Em projecção frontal, as arestas laterais $[BB']$ e $[CC']$ são invisíveis, pois são as arestas laterais de menor afastamento do sólido. As arestas laterais $[FF']$ e $[EE']$ são visíveis, em projecção frontal, pois são as arestas laterais de maior afastamento do sólido. As arestas das bases que são invisíveis em projecção frontal estão ocultas por arestas que são visíveis. O **contorno aparente horizontal** é $[A'_1B'_1B_1C_1D_1E'_1E_1F'_1]$. Em projecção horizontal, existem quatro vértices que não integram o contorno aparente – os vértices D' e C' , que são visíveis (são os vértices de maior cota), bem como todas as arestas que neles convergem, e os vértices A e F , que são invisíveis (são os vértices de menor cota), bem como todas as arestas que neles convergem. A base $[ABCDEF]$ (a base de menor cota) e as faces laterais $[AA'B'B]$, $[AA'F'F]$ e $[EE'F'F]$ são invisíveis, em projecção horizontal. Note que, em projecção horizontal, as arestas da base $[A'B'C'D'E'F']$ são **necessariamente** paralelas às arestas correspondentes da base $[ABCDEF]$.



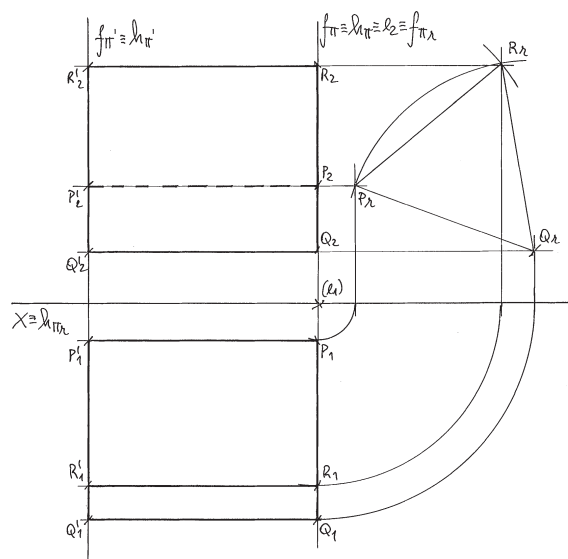
766.



Em primeiro lugar, representou-se o plano de perfil π , pelos seus traços, e o ponto **A**, pelas suas projecções, pertencente ao plano. É dado o comprimento do lado do triângulo e o ângulo que o lado **[AB]**, do quadrado, faz com o Plano Horizontal de Projecção – este ângulo é igual ao ângulo que o lado **[AB]** faz com h_π (ver exercício 705). Esse ângulo existe **no espaço**, na superfície do plano – sugere-se a visualização da situação. Tendo em conta que o quadrado está contido num plano perfil, não se projecta em V.G. em nenhum dos planos de projecção, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. Recorreu-se ao rebatimento do plano π para o Plano Horizontal de Projecção, para construir o quadrado em V.G., em rebatimento – a charneira é h_π . Rebateu-se o plano, obtendo-se **A_r** – a partir de **A_r** mediu-se o ângulo de 30° com h_π , sendo que existem duas hipóteses para medir o ângulo dado. No entanto, em apenas uma delas (a hipótese apresentada) se garante que ponto **B** tenha cota superior a **A** (na outra hipótese, o ponto **B** não se situaria no espaço do 1.^o Diedro). Sobre o lado do ângulo e a partir de **A_r**, mediram-se os 6 cm (a medida do lado), obtendo-se **B_r**, o que nos possibilitou a construção do quadrado em V.G., em rebatimento. Em seguida inverteu-se o rebatimento, conforme exposto no relatório do exercício 734, o que nos permitiu determinar as projecções do quadrado. Note que se determinaram as projecções do ponto **O**, o centro do quadrado, por ser o ponto por onde passa a recta suporte do eixo do sólido. A pirâmide é **regular**, pelo que o seu eixo é ortogonal ao plano π – está contido numa recta fronto-horizontal **g**. Como a pirâmide é **regular**, a sua altura corresponde ao comprimento do seu eixo, que se projecta em verdadeira grandeza nos dois planos de projecção. Assim, a partir das projecções de **O** mediram-se os 7 cm (a altura da pirâmide), obtendo-se as projecções de **V**, o vértice da pirâmide, sobre as projecções homónimas da recta **g** (note que se garantiu que o vértice se situa à esquerda da base). A partir das projecções de todos os vértices do sólido, desenharam-se os seus contornos aparentes e representaram-se as invisibilidades existentes (ver exercício anterior e respectivo relatório).

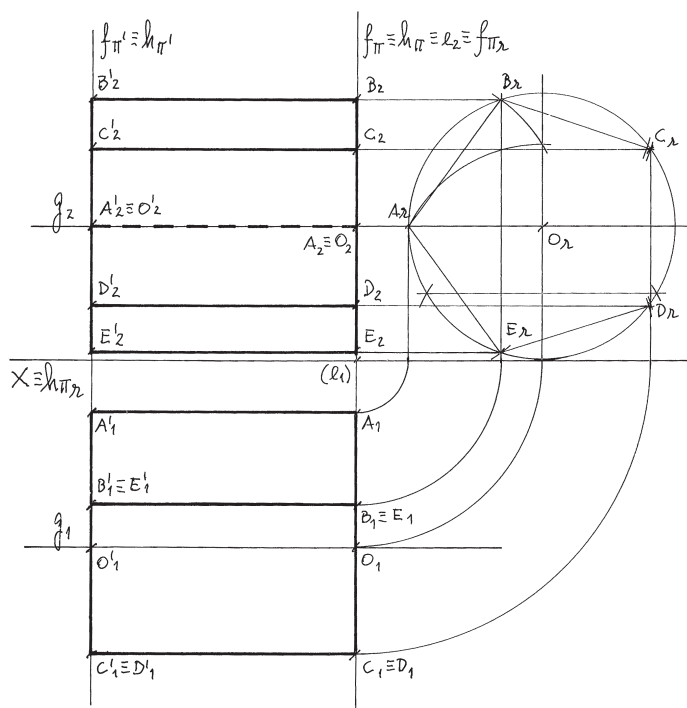
767.

Em primeiro lugar, representou-se o plano π , pelos seus traços, e o ponto P , pertencente ao plano, pelas suas projecções. Sobre a construção das projecções do triângulo $[PQR]$, ver exercício 735 e respectivo relatório. Em seguida, representou-se o plano π' , o plano que contém a base mais à esquerda do sólido – a distância do plano π' ao plano π é 6 cm (a altura do sólido). O prisma é **regular**, pelo que as suas arestas laterais estão contidas em rectas ortogonais ao plano π – rectas fronto-horizontais. Os vértices do triângulo $[P'Q'R']$, o triângulo da base mais à esquerda do sólido, determinaram-se a partir dos pontos de intersecção do plano π' com as rectas suportes das arestas laterais do sólido (intersecção de rectas não projectantes com planos projectantes – ver exercício 432). A partir das projecções de todos os vértices do prisma, desenharam-se os seus contornos aparentes. O **contorno aparente frontal** é $[Q_2R_2R'_2Q'_2]$. Em projecção frontal, os vértices P e P' não pertencem ao contorno aparente, e são invisíveis (por serem os vértices de menor afastamento do sólido), bem como todas as arestas que neles convergem. A aresta lateral $[PP']$ é, assim, invisível (por ser a aresta de menor afastamento). As arestas das bases que são invisíveis em projecção frontal estão ocultas por arestas visíveis. A única face visível em projecção frontal é a face $[QQ'R'R]$. O **contorno aparente horizontal** é $[P_1R_1Q_1Q'_1R'_1P'_1]$. Em projecção horizontal, a aresta $[RR']$ é visível, por ser a aresta de maior cota do sólido. Em projecção horizontal, as arestas das bases que são invisíveis estão ocultas por arestas visíveis, pelo que, em projecção horizontal, não há invisibilidades a assinalar.



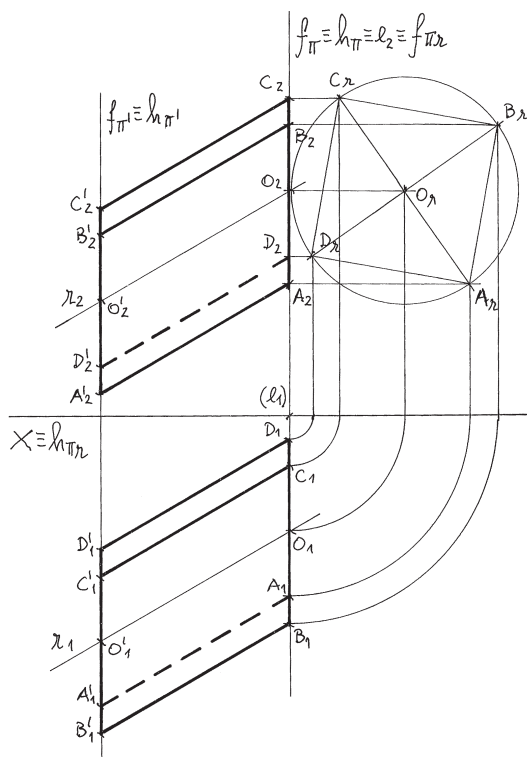
768.

Em primeiro lugar, representou-se, pelas suas projecções, a recta fronto-horizontal g que contém o eixo do sólido e o plano π , o plano de perfil que contém a base mais à direita do sólido. Em seguida, determinou-se o ponto O , o centro da circunferência circunscrita à base mais à direita do prisma – O é o ponto de intersecção de g com π . Para obter as projecções do pentágono $[ABCDE]$, da base mais à direita do sólido, foi necessário recorrer a um processo geométrico auxiliar, pois o plano π não é paralelo a nenhum dos planos de projecção. Optou-se por rebater o plano π para o Plano Frontal de Projecção (a charneira foi f_π) para a construção do pentágono em V.G., em rebatimento, conforme exposto no relatório do exercício 734, após o que se inverteu o rebatimento, obtendo-se em seguida as projecções do polígono. Note que se atendeu, na construção do pentágono, a que uma das faces visíveis (em projecção frontal) do prisma está contida num plano frontal (de frente) – tal só é possível se o lado de maior afastamento do pentágono for vertical, o que definiu imediatamente a posição da figura no espaço. Sobre a construção das projecções do sólido, ver exercício anterior e respectivo relatório. O **contorno aparente frontal** é $[B_2C_2D_2E_2D'_2C'_2B'_2]$. Em projecção frontal, os vértices A e A' não pertencem ao contorno aparente, e são invisíveis (por serem os vértices de menor afastamento do sólido), bem como todas as arestas que neles convergem. A aresta lateral $[AA']$ é, assim, invisível (por ser a aresta de menor afastamento). As arestas das bases que são invisíveis em projecção frontal estão ocultas por arestas visíveis. As faces visíveis em projecção frontal são as faces $[BB'C'C]$, $[DD'E'E]$ e $[CC'D'D]$, sendo esta última a face que está contida num plano frontal (de frente). O **contorno aparente horizontal** é $[P_1R_1Q_1Q'_1R'_1P'_1]$. Em projecção horizontal, as arestas do sólido que são invisíveis estão ocultas por arestas visíveis, pelo que, em projecção horizontal, não há invisibilidades a assinalar.



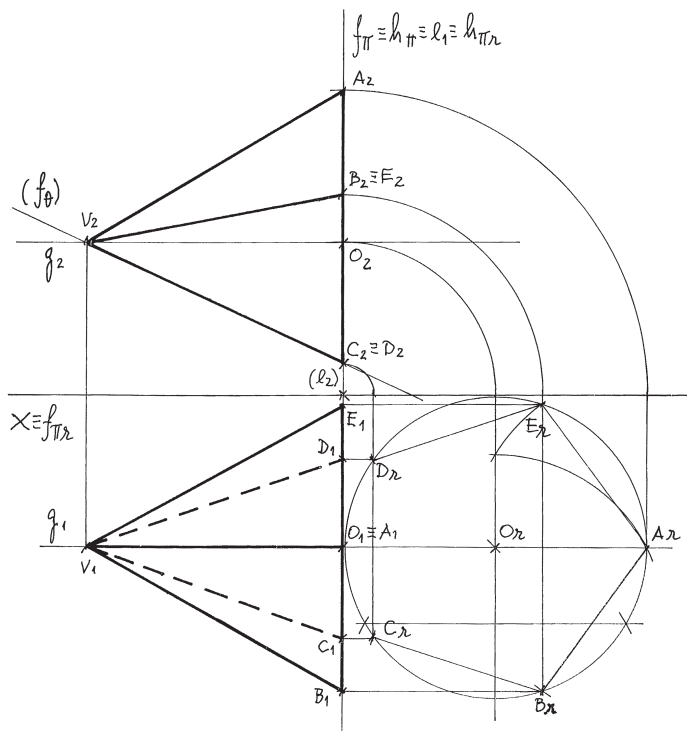
769.

Em primeiro lugar, representou-se o plano π , pelos seus traços, e o ponto O , pertencente ao plano, pelas suas projecções. Os dados do enunciado permitem-nos, ainda, localizar a projecção frontal do ponto A , em função da sua cota, não nos sendo dado o seu afastamento. Para obter as projecções do quadrado $[ABCD]$, da base mais à direita do sólido, foi necessário recorrer a um processo geométrico auxiliar, pois o plano π não é paralelo a nenhum dos planos de projecção. Rebateu-se o plano π para o Plano Frontal de Projecção (a charneira foi f_{π}), obtendo-se O_r e a referência de A_r (o rebatimento de A processa-se num plano horizontal, pois a charneira é vertical, pelo que se sabe, à partida, que A_r e A_2 têm a mesma cota). Em rebatimento, com centro em O_r , em V.G., desenhou-se a circunferência circunscrita ao quadrado, com 3,5 cm de raio – A_r é o ponto dessa circunferência que tem a cota de A_2 e afastamento superior a O (está mais distante de f_{π} do que O_r). A partir de O_r e A_r construiu-se o quadrado em rebatimento, em V.G., após o que se inverteu o rebatimento (ver exercício 734), obtendo-se as projecções do polígono. Em seguida, representou-se o plano π' , o plano que contém a base mais à esquerda do sólido (a distância do plano π' ao plano π é 5 cm, que é a altura do sólido) e representou-se a recta r , a recta suporte do eixo do sólido, pelas suas projecções. O' é o centro da base mais à esquerda do prisma e é o ponto de intersecção da recta r com o plano π' . Em seguida determinaram-se os pontos A' , B' , C' e D' , os vértices da base mais à esquerda do prisma – aqueles são os pontos de intersecção do plano π' com as rectas suportes das arestas laterais do sólido, que são paralelas à recta r . A partir das projecções de todos os vértices do prisma, desenharam-se os seus contornos aparentes. O **contorno aparente frontal** é $[A_2B_2C_2C'_2B'_2A'_2]$. Em projecção frontal, os vértices D e D' não pertencem ao contorno aparente, e são invisíveis (por serem os vértices de menor afastamento do sólido), bem como todas as arestas que neles convergem. A aresta lateral $[DD']$ é, assim, invisível (por ser a aresta de menor afastamento). A aresta lateral $[BB']$ é visível, pois B e B' são os vértices de maior afastamento do sólido. As arestas das bases que são invisíveis em projecção frontal estão ocultas por arestas visíveis. O **contorno aparente horizontal** é $[B_1C_1D_1D'_1C'_1B'_1]$. Em projecção horizontal, a aresta $[CC']$ é visível, por ser a aresta lateral de maior cota do sólido, e a aresta lateral $[AA']$ é invisível, por ser a aresta lateral de menor cota do prisma. Em projecção horizontal, as arestas das bases que são invisíveis estão ocultas por arestas visíveis.



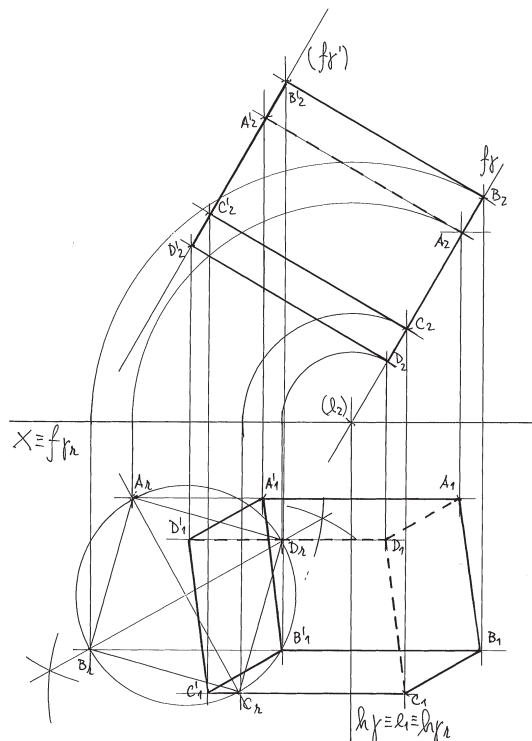
770.

Em primeiro lugar, representou-se o plano π , pelos seus traços. Em seguida, para obter as projecções do pentágono da base, recorreu-se ao rebatimento do plano π para o Plano Horizontal de Projecção (a charneira foi h_{π}). Em rebatimento, determinou-se O_r , equidistante de f_{π} e de h_{π} – O é o centro da circunferência circunscrita ao pentágono, que tem 4 cm de raio e é tangente aos dois planos de projecção, pelo que O tem de estar a 4 cm dos traços do plano (ver exercício 757). Para construir o pentágono em V.G., em rebatimento, foi necessário determinar a posição do polígono no referencial – a face lateral inferior (de menor cota) da pirâmide está contida num plano projectante frontal (de topo), e uma vez que a face lateral contém um lado da base, esse lado tem **necessariamente** de ser de topo. Assim, o **lado inferior** do pentágono (o lado mais próximo de h_{π}) é de topo. Este raciocínio permitiu-nos construir o pentágono em V.G., em rebatimento, após o que se inverteu o rebatimento e se obtiveram as suas projecções. A recta g , fronto-horizontal, é a recta suporte do eixo da pirâmide – ver exercício 766. Note que não nos é dada a altura da pirâmide, sendo essa a dificuldade do exercício. Assim há que representar o plano θ , o plano de topo (projectante frontal) que contém a face lateral de menor cota da pirâmide – o plano θ faz um diedro de 25° (a.e.) com o Plano Horizontal de Projecção e contém o lado $[CD]$ do pentágono. Representou-se o plano θ apenas pelo seu traço frontal (razão pela qual esse traço se assinalou entre parêntesis). O vértice da pirâmide pertence simultaneamente ao plano θ (que contém uma face lateral da pirâmide) e ao eixo do sólido, pelo que V é o ponto de intersecção do plano θ com a recta g . A partir das projecções de todos os vértices do sólido, desenharam-se os seus contornos aparentes. O **contorno aparente frontal** é $[A_2B_2C_2V_2]$. Em projecção frontal, as arestas do sólido que são invisíveis estão ocultas por arestas visíveis, pelo que, em projecção frontal, não há invisibilidades a assinalar. O **contorno aparente horizontal** é $[A_1B_1V_1E_1]$. Os vértices C e D são invisíveis em projecção horizontal (por serem os vértices de menor cota), bem como todas as arestas que neles convergem. Assim, as arestas laterais $[CV]$ e $[DV]$ são invisíveis em projecção horizontal. As arestas da base que são invisíveis em projecção horizontal estão ocultas por arestas visíveis.



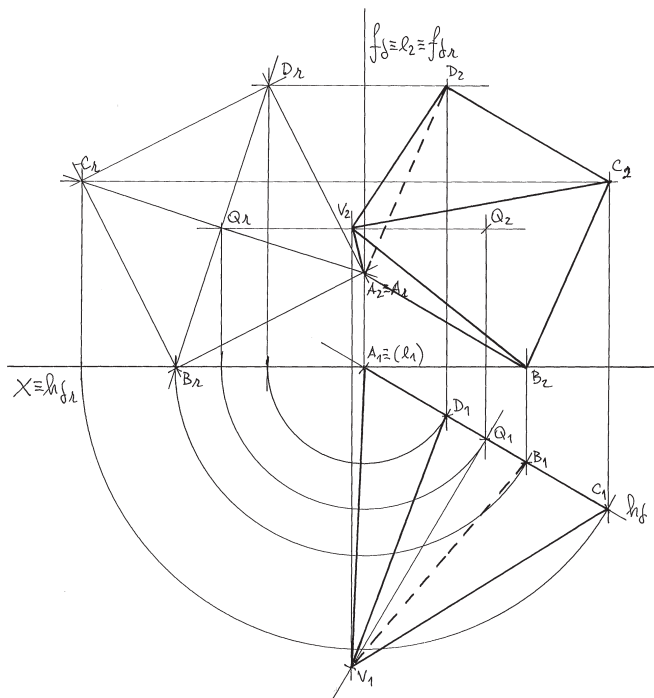
771.

Em primeiro lugar, representou-se o plano γ , pelos seus traços, e o ponto A , pertencente ao plano, pelas suas projecções. Sobre a construção das projecções do quadrado da base, ver relatório do exercício 749. Sobre a construção das projecções do prisma, ver relatório do exercício 763. O plano γ' é o plano paralelo a γ que contém a base de maior cota do sólido – o quadrado $[A'B'C'D']$. Note que se o quadrado $[ABCD]$ fosse a base de maior cota do sólido, o quadrado $[A'B'C'D']$ seria a base de menor cota e o sólido não se situaria no espaço do 1^a Diedro. A partir das projecções de todos os vértices do sólido, desenharam-se os seus contornos aparentes. O **contorno aparente frontal** é $[B_2C_2D_2D'_2C'_2B'_2]$. Em projecção frontal, os vértices A e A' não pertencem ao contorno aparente, e são invisíveis (por serem os vértices de menor afastamento do sólido), bem como todas as arestas que neles convergem. A aresta lateral $[AA']$ é, assim, invisível (por ser a aresta de menor afastamento). As arestas das bases que são invisíveis em projecção frontal estão ocultas por arestas visíveis. A aresta lateral $[CC']$ é visível, por ser a aresta de maior afastamento do sólido. O **contorno aparente horizontal** é $[A_1B_1C_1C'_1B'_1A'_1]$. Em projecção horizontal, existem dois vértices que não integram o contorno aparente – o vértice B' , que é visível (é o vértice de maior cota), bem como todas as arestas que nele convergem, e o vértice D , que é invisível (é o vértice de menor cota), bem como todas as arestas que nele convergem. Note que, em projecção horizontal, a base superior é visível e a base inferior é invisível. Note ainda que, em projecção horizontal, as arestas da base $[A'B'C'D']$ são **necessariamente** paralelas às arestas correspondentes da base $[ABCD]$.



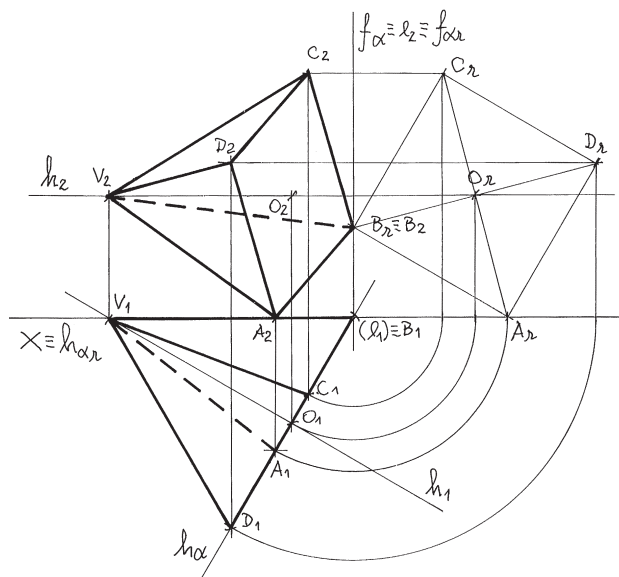
772.

O ponto **A** situa-se no **SPFS**, pelo que tem afastamento nulo (tem 2,5 cm de cota) – é um ponto do Plano Frontal de Projectação e pertence a f_δ . O ponto **B** situa-se no **SPHA**, pelo que tem cota nula e afastamento positivo – é um ponto do Plano Horizontal de Projectação e pertence a h_δ . Assim, em primeiro lugar representou-se o plano δ , pelos seus traços, e o ponto **A**, pelas suas projecções, pertencente ao plano. Sabe-se que o segmento **[AB]** tem as suas projecções paralelas entre si, e uma vez que o plano δ é projectante horizontal, sabe-se, também, que **[A₁B₁]** se situa sobre h_δ . Assim, **[A₂B₂]** é **necessariamente** paralelo a h_δ – conduzindo, por **A₂**, uma paralela a h_δ , determinou-se **B₂** sobre o eixo **X** (**B** é um ponto de h_δ), o que nos permitiu determinar as duas projecções de **B** (**B₁** situa-se sobre h_δ). A partir das projecções de **A** e **B**, e uma vez que o quadrado não se projecta em V.G. em nenhum dos planos de projecção (o plano δ não é paralelo a nenhum dos planos de projecção), é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar. Optou-se pelo rebatimento do plano δ para o Plano Frontal de Projectação (a charneira é f_δ), o que nos permitiu a construção do quadrado em V.G., em rebatimento, após o que se inverteu o rebatimento e se obtiveram as projecções do polígono. Sobre a construção das projecções da pirâmide, seus contornos aparentes e invisibilidades, ver exercício 755 e respectivo relatório.



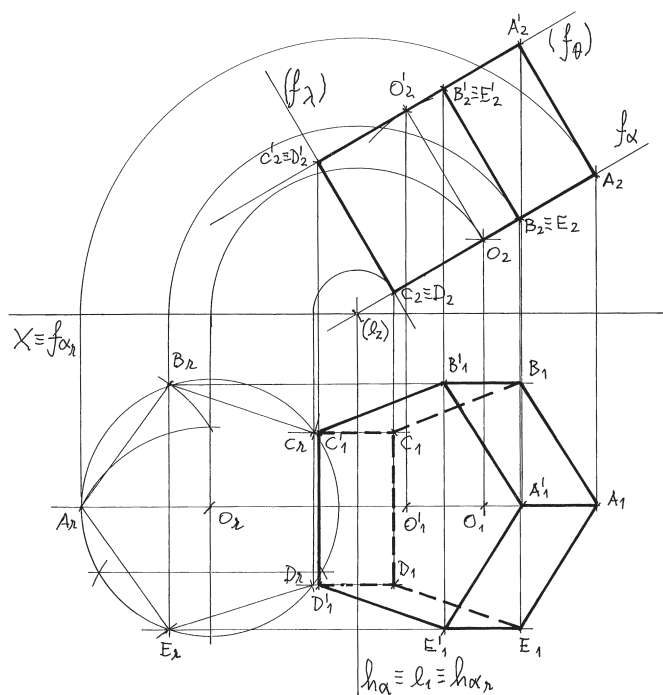
773.

Em primeiro lugar, representou-se o plano α , pelos seus traços, e o ponto **A**, pelas suas projecções, pertencente ao plano (**A** é um ponto de h_α , pois tem cota nula). O ponto **B** tem afastamento nulo, pelo que **B** é **necessariamente** um ponto de f_α . É dado o ângulo que o lado **[AB]** faz com f_α – este ângulo existe no espaço, na superfície do plano (ver exercício 732). Uma vez que o quadrado está contido num plano vertical, nem o quadrado nem o ângulo dado se projectam em V.G. em nenhum dos planos de projecção. É necessário, pois, o recurso a um processo geométrico auxiliar – rebateteu-se o plano α para o Plano Frontal de Projectação, obtendo **A_r**. Em rebatimento, em V.G., a partir de **A_r**, mediu-se o ângulo de 30° com h_α , obtendo-se **B_r** sobre f_α (recorde que **B** é um ponto de f_α). A partir de **A_r** e **B_r**, construiu-se o quadrado em V.G., em rebatimento, após o que se inverteu o rebatimento e se obtiveram as projecções do polígono. Sobre a construção das projecções da pirâmide, ver exercício 756 e respectivo relatório. A partir das projecções de todos os vértices do sólido, desenharam-se os seus contornos aparentes. O **contorno aparente frontal** é **[A₂B₂C₂V₂]**. O único vértice que não integra o contorno aparente frontal é **D**, que é visível (é o vértice de maior afastamento do sólido), bem como todas as arestas que nele convergem. A base do sólido é visível e as faces laterais **[ABV]** e **[BCV]** são invisíveis, pelo que a aresta lateral **[BV]** é invisível, em projecção frontal. O **contorno aparente horizontal** é **[B₁C₁D₁V₁]**. Em projecção horizontal, as arestas da base que são invisíveis estão ocultas pelas arestas visíveis. A aresta lateral **[CV]** é visível (**C** é o vértice de maior cota), e a aresta lateral **[AV]** é invisível (**A** é o vértice de menor cota), em projecção horizontal.



774.

Em primeiro lugar, representou-se o plano α , pelos seus traços, e o ponto Q , pertencente ao plano, pelas suas projecções. O plano α não é paralelo a nenhum dos planos de projecção, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar para a construção das projecções do pentágono $[ABCDE]$ da base inferior do sólido – recorreu-se ao rebatimento do plano α para o Plano Horizontal de Projecção (a charneira foi h_α). Para construir o pentágono em V.G., em rebatimento, foi necessário determinar a posição do polígono no referencial – uma das faces laterais invisíveis do prisma (uma das faces inferiores) está contida num plano projectante frontal (de topo), e uma vez que qualquer face lateral contém um lado da base, o lado do pentágono que está contido nessa face tem **necessariamente** de ser de topo. Assim, o **lado inferior** do pentágono (o lado mais próximo de h_α) é de topo. Este raciocínio permitiu-nos construir o pentágono em V.G., em rebatimento, após o que se inverteu o rebatimento e se obtiveram as suas projecções. O plano λ , representado apenas pelo seu traço frontal, é plano de topo (projectante frontal), que contém a face lateral referida. O plano θ , paralelo a α e representado apenas pelo seu traço frontal (razão pela qual se assinalou esse traço entre parêntesis), é o plano que contém a base superior do sólido. A distância entre os dois planos, medida perpendicularmente aos dois planos, é a altura do sólido, que não nos é dado. No entanto, é referido que as faces laterais são quadrados, pelo que a altura do prisma é igual à medida do lado do pentágono, que está em V.G. em rebatimento. Assim, a distância entre os dois planos é igual a $A_r B_r = A_r E_r = B_r C_r = C_r D_r = D_r E_r$. As rectas suportes do eixo e das arestas laterais do sólido são ortogonais aos planos das bases (são rectas frontais) e os vértices da base superior são os pontos de intersecção do plano dessa base com a rectas suportes das arestas laterais do sólido (ver exercício 763 e respectivo relatório). A partir das projecções de todos os vértices do sólido, desenharam-se os seus contornos aparentes. O **contorno aparente frontal** é $[A_2 E_2 D_2 D'_2 E'_2 A'_2]$. Em projecção frontal, as arestas invisíveis do sólido estão todas ocultas por arestas que são visíveis, pelo que não há quaisquer invisibilidades a assinalar. O **contorno aparente horizontal** é $[A_1 B_1 B'_1 C'_1 D'_1 E'_1]$. Em projecção horizontal, existem três vértices que não integram o contorno aparente – os vértices C e D , que são invisíveis (são os vértices de menor cota), bem como todas as arestas que neles convergem, e o vértice A' , que é visível (é o vértice de maior cota), bem como todas as arestas que nele convergem. Note que, em projecção horizontal, a base superior é visível e a base inferior é invisível. Note ainda que, em projecção horizontal, as arestas da base $[A'B'C'D'E']$ são **necessariamente** paralelas às arestas correspondentes da base $[ABCDE]$.



11

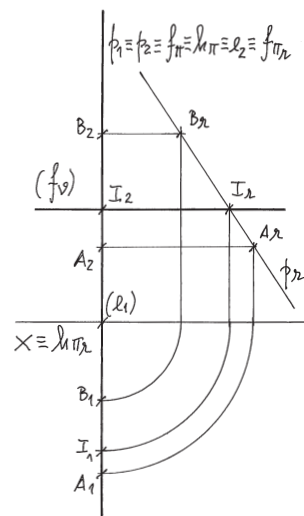
INTERSECÇÃO DE RECTAS DE PERFIL COM PLANOS

775.

A abordagem diferenciada das situações de intersecções de rectas de perfil com planos explica-se pela especificidade da resolução dessas situações. De facto, embora se mantendo os métodos de resolução estudados ao nível das **intersecções de rectas com planos**, nas intersecções de rectas de perfil com **planos** é a **resolução** em si que apresenta uma especificidade própria e que justifica uma abordagem diferenciada.

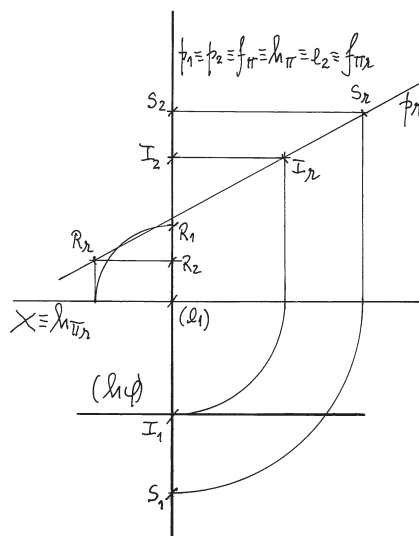
776.

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **A** e **B** e a recta **p**, pelas suas projecções (em função dos dados), e o plano v , pelo seu traço frontal. O ponto de intersecção de uma recta com um plano é um ponto que pertence, simultaneamente, à recta e ao plano – o ponto **I** (o ponto de intersecção da recta **p** com o plano v) tem, assim, de pertencer à recta **p** e ao plano v (ver exercício 433). Para que o ponto pertença ao plano v , que é **projectante frontal**, **I**₂ tem de se situar sobre (**f**_v). Para que o ponto pertença à recta, as projecções do ponto têm de pertencer às projecções homónimas da recta. Assim, **I**₂ tem de se situar simultaneamente sobre **p**₂ e sobre (**f**_v) – **I**₂ é, assim, o ponto de concorrência de **p**₂ com (**f**_v). O problema do exercício consiste, agora, na determinação de **I**₁, pois a recta de perfil e a **única** recta que não verifica o **Critério de Reversibilidade**, ou seja, em que a condição para que um ponto pertença a uma recta é **condição necessária mas não suficiente** para que o ponto pertença, efectivamente, à recta. Há, pois, que recorrer a um processo geométrico auxiliar – optou-se pelo rebatimento do plano π , o plano de perfil que contém a recta. Rebateu-se o plano π para o Plano Frontal de Projectação (a charneira foi **f**_r, que é uma recta vertical, pelo que os arcos do rebatimento estão contidos em plano horizontais), obtendo **A**_r, **B**_r e **p**_r. O arco do rebatimento de **I** está contido no próprio plano v (o plano horizontal que passa por **I**), o que nos permite determinar **I**_r sobre **p**_r, invertendo o rebatimento (ver exercício 702), determinou-se **I**₁ sobre **p**₁.



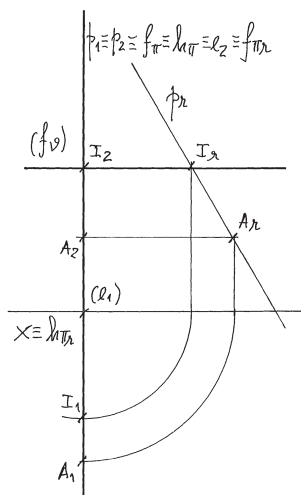
777.

Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **R** e **S** e a recta **p**, pelas suas projecções (em função dos dados) e o plano φ , pelo seu traço horizontal. O ponto **I** (o ponto de intersecção da recta **p** com o plano φ) tem de pertencer simultaneamente à recta **p** e ao plano φ (ver exercício 434). Para que o ponto pertença ao plano φ , que é **projectante horizontal**, **I**₁ tem de se situar sobre (**h** _{φ}). Para que o ponto pertença à recta, as projecções do ponto têm de pertencer às projecções homónimas da recta. Assim, **I**₁ tem de se situar simultaneamente sobre **p**₁ e sobre (**h** _{φ}) – **I**₁ é o ponto de concorrência de **p**₁ com (**h** _{φ}). A recta de perfil é a **única** recta que não verifica o **Critério de Reversibilidade**, pelo que é necessário o recurso a um processo geométrico auxiliar para a determinação de **I**₂ – optou-se pelo rebatimento do plano π , o plano de perfil que contém a recta. Rebateu-se o plano π para o Plano Frontal de Projectação (a charneira foi **f** _{π} , que é uma recta vertical, pelo que os arcos do rebatimento estão contidos em plano horizontais), obtendo **R**_r, **S**_r e **p**_r. O arco do rebatimento de **I** permitiu-nos transportar a referência do ponto **I** para **p**_r, onde se situa **I**_r. O arco do rebatimento de **I** está contido num plano horizontal (de nível), pelo que **I**₂ tem a mesma cota de **I**_r, o que nos permite determinar **I**₂ sobre **p**₂.

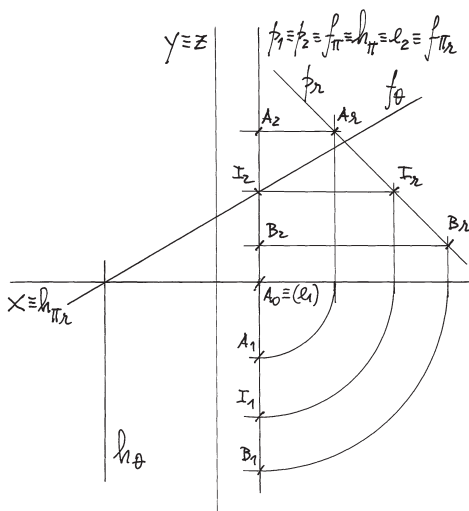


778.

Ver exercício 776 e respectivo relatório. Note que a recta p está definida, nesta situação, por um ponto e uma direcção – o ângulo que a recta p faz com o Plano Frontal de Projectão é igual ao ângulo que a recta p faz com f_{π} que está, em V.G., no ângulo que p_r faz com f_{π_r} (ver exercício 706).

**780.**

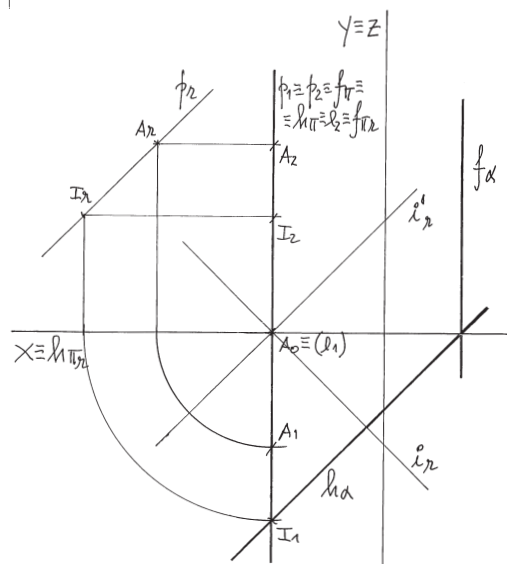
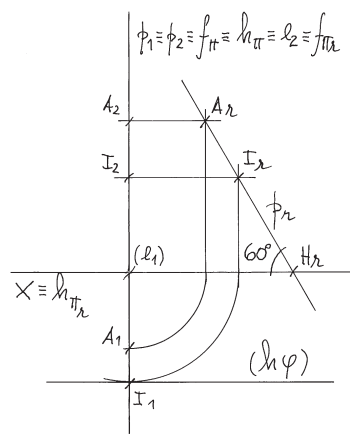
Ver exercício 776 e respectivo relatório. Note que o plano θ é **projectante frontal**, pelo que a situação deste exercício é idêntica à do exercício 776.

**781.**

Ver exercício 777 e respectivo relatório. Note que a recta p está definida, nesta situação, por um ponto e uma direcção – é paralela ao $\beta_{2/4}$, o que significa que faz, com os traços do plano, ângulos de 45° (os planos bissectores fazem, ambos, diedros de 45° com os dois planos de projecção). Para se definir a recta, recorreu-se à representação, em rebatimento das rectas de intersecção do plano de perfil com o $\beta_{1/3}$ e o $\beta_{2/4}$ – as rectas i e i' , respectivamente (ver exercício 709). Note que não se representaram as projecções das rectas i e i' – estas representaram-se directamente em rebatimento (as rectas i_r e i'_r). Note que as rectas i_r e i'_r são as bissectrizes dos quatro ângulos rectos formados entre f_{π_r} e h_{π_r} . A distinção entre uma (i_r) e a outra (i'_r) faz-se principalmente por perceber que, sendo a recta i_r , em rebatimento, a recta de intersecção de π com o $\beta_{1/3}$, e sendo A um ponto do 1° Diedro, a recta i_r tem **necessariamente** de passar pelo quadrante do plano onde se situa A_r . A recta p , em rebatimento (p_r) tem de passar por A_r e ser paralela a i'_r . Note que, em função do exposto, se poderia dispensar a representação das rectas i_r e i'_r – havendo duas bissectrizes para os quatro ângulos rectos formados entre f_{π_r} e h_{π_r} , a recta p_r teria de ser paralela àquela que não passasse pelo quadrante no qual se situa A_r .

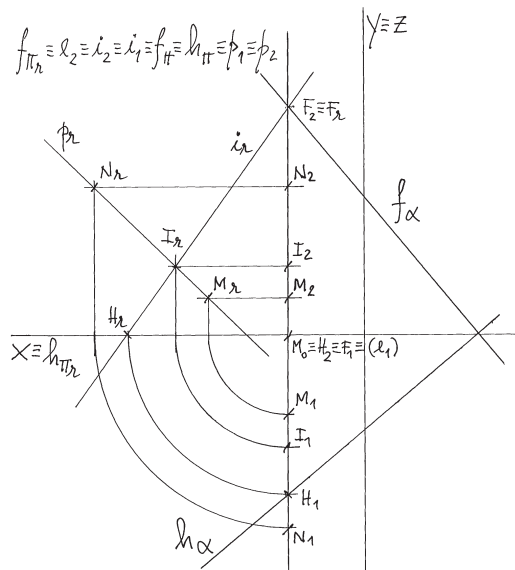
779.

Ver exercício 777 e respectivo relatório. Note que a recta p está definida, nesta situação, por um ponto e uma direcção – o ângulo que a recta p faz com o Plano Horizontal de Projectão é igual ao ângulo que a recta p faz com h_{π} que está, em V.G., no ângulo que p_r faz com h_{π_r} (ver exercício 705).

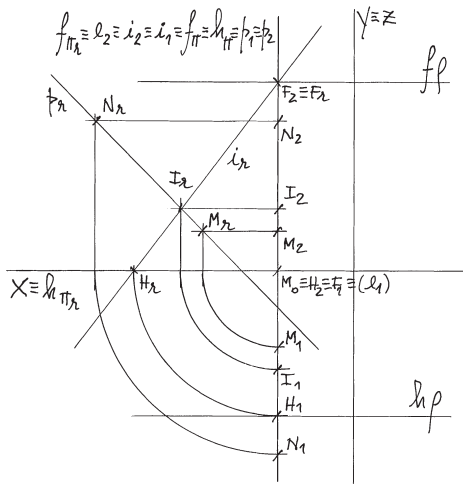


782.

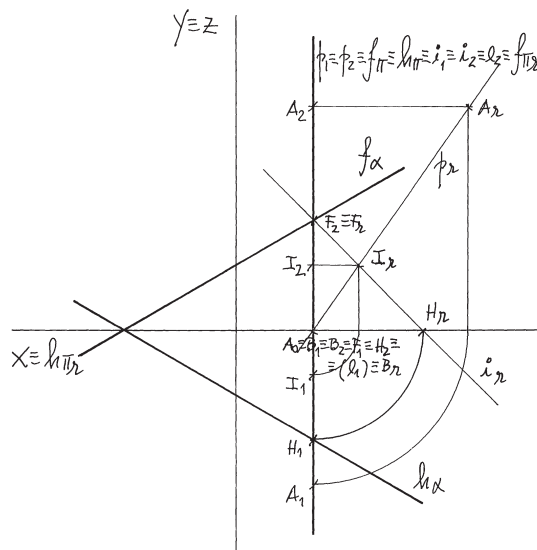
Em primeiro lugar, representaram-se os pontos **M** e **N** e a recta **p**, pelas suas projecções (em função dos dados), e o plano α , pelos seus traços. Nem a recta nem o plano são projectantes, pelo que é necessário o recurso ao **método geral da intersecção de rectas com planos**. 1. Por **p** conduziu-se um plano auxiliar π , de perfil (o plano π contém a recta). 2. Determinou-se a recta **i**, a recta de intersecção do plano π com o plano α (trata-se do caso geral da intersecção entre planos – a intersecção de dois planos definidos pelos seus traços) A recta **i** é uma recta de perfil comum aos dois planos e está definida pelos seus traços – **F** e **H**. 3. O ponto de intersecção (concorrência) das duas rectas é o ponto pedido – o ponto de intersecção da recta **p** com o plano α . Uma vez que se trata de duas rectas de perfil, o seu ponto de concorrência só pode ser determinado com o recurso a um processo geométrico auxiliar. Optou-se pelo rebatimento do plano π , o plano que contém as duas rectas. Rebateu-se o plano π para o Plano Frontal de Projecção (a charneira foi f_π) e determinaram-se as duas rectas em rebatimento – **p_r** está definida por **M_r** e **N_r** e **i_r** está definida por **F_r** (que é um ponto da charneira) e por **H_r**. O ponto **I_r** é o ponto de intersecção de **p_r** e **i_r** – invertendo-se o rebatimento, determinaram-se as projecções do ponto **I**. **I** é o ponto de intersecção da recta **p** com o plano α .

**783.**

Ver relatório do exercício anterior.

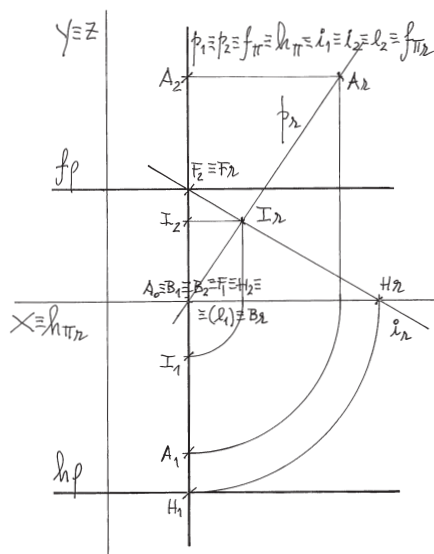
**784.**

A recta de perfil **p**, passante, está definida pelos pontos **A**, que é dado, e pelo ponto **B**, que é o seu ponto de concorrência com o eixo **X**. Assim, a recta **p** está definida por dois pontos, o que reduz na situação do exercício **782**, pelo que se aconselha o acompanhamento da resolução do exercício com a leitura do relatório daquele exercício.



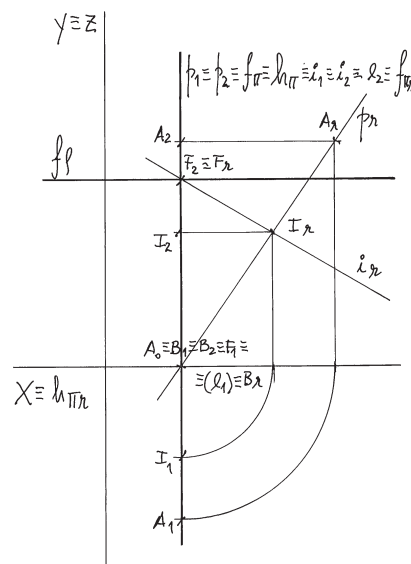
785.

Ver relatório do exercício anterior.



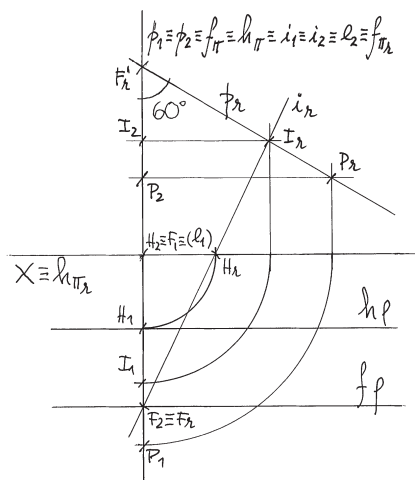
786.

Ver relatório do exercício **784**. O plano ρ , de rampa, nesta situação, está definido por uma recta (o seu traço frontal) e pela sua orientação – é dado o diedro entre o plano ρ e o Plano Horizontal de Projectão. Os raciocínios são exactamente os mesmos (ver relatório do exercício **782**), diferindo apenas no facto de, no ponto **2.**, a recta i , a recta de intersecção do plano π com o plano ρ , estar definida por um ponto (o seu traço frontal – **F**) e por uma direcção – a recta i fará um ângulo de 30° com o Plano Horizontal de Projectão, que é o mesmo que dizer que a recta p faz um ângulo de 30° com h_π . Esse ângulo representa-se em V.G., ao se efectuar o rebatimento do plano de perfil – i , passa por **F**, e faz, com h_π , um ângulo de 30° , garantindo-se que o seu traço horizontal tenha afastamento positivo (o traço horizontal do plano de rampa situa-se no **SPHA**, pelo que tem afastamento positivo). Note que não é necessária a representação do traço horizontal da recta, nem do traço horizontal do plano p .



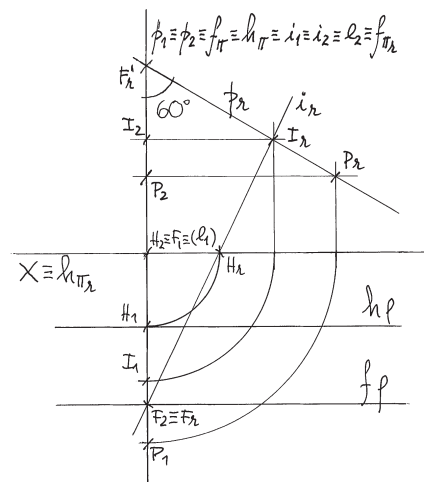
787.

Ver relatório do exercício **782**. Note que a recta p está definida, nesta situação, por um ponto e uma direcção – o ângulo que a recta p faz com o Plano Frontal de Projectão é igual ao ângulo que a recta p faz com \mathbf{f}_π que está, em V.G., no ângulo que p_r faz com \mathbf{f}_π (ver exercício **706**). Por outro lado, um facto que pode gerar confusão, é o facto de o traço frontal da recta i , a recta de intersecção do plano π com o plano ρ , ter cota negativa. Note que, no rebatimento efectuado, em que a charneira é \mathbf{f}_π , se minimiza a dificuldade que esse aspecto gera, pois \mathbf{F} é um ponto da charneira, pelo que é fixo (roda sobre si próprio – $\mathbf{F}_r = \mathbf{F}_2$).

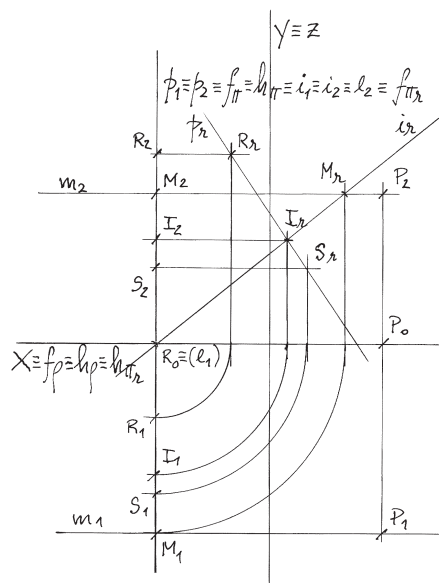


787.

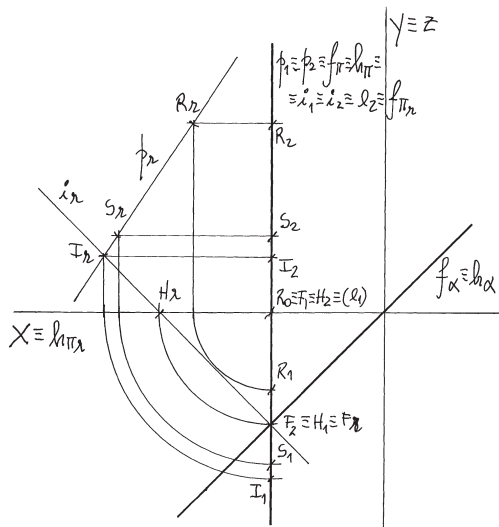
Ver relatório do exercício **782**. Note que a recta p está definida, nesta situação, por um ponto e uma direcção – o ângulo que a recta p faz com o Plano Frontal de Projectão é igual ao ângulo que a recta p faz com f_π que está, em V.G., no ângulo que p_r faz com f_π (ver exercício **706**). Por outro lado, um facto que pode gerar confusão, é o facto de o traço frontal da recta i , a recta de intersecção do plano π com o plano ρ , ter cota negativa. Note que, no rebatimento efectuado, em que a charneira é f_π , se minora a dificuldade que esse aspecto gera, pois F é um ponto da charneira, pelo que é fixo (roda sobre si próprio – $F_r = F_2$).

**788.**

Este exercício é idêntico ao exercício **782**, mas, em virtude de o plano dado ser um plano passante, optou-se refazer o relatório adaptado a esta situação, em vez de remeter para o relatório daquele exercício. Assim, em primeiro lugar representaram-se os pontos R e S e a recta p , pelas suas projecções (em função dos dados), e o plano ρ , pelos seus traços (que estão coincidentes no eixo X) e pelo ponto P . Nem a recta nem o plano são projectantes, pelo que é necessário o recurso ao **método geral da intersecção de rectas com planos**. 1. Por p conduziu-se um plano auxiliar π , de perfil (o plano π contém a recta). 2. Determinou-se a recta i , a recta de intersecção do plano π com o plano ρ . A recta i é uma recta de perfil que pertence ao plano passante (é uma **recta de perfil passante**), da qual temos imediatamente um ponto – seu ponto de concorrência com o eixo X . Necessitamos de outro ponto para definir a recta. Recorreu-se a uma recta auxiliar do plano ρ – a recta m , fronto-horizontal e passando por P . As rectas m e p são coplanares (pertencem, ambas, ao plano ρ) e não são paralelas, pelo que são concorrentes, pelo que existe um ponto de concorrência – o ponto M . A recta i está definida por dois pontos – o seu ponto de concorrência com o eixo X e o ponto M . 3. O ponto de intersecção (concorrência) das duas rectas é o ponto pedido – o ponto de intersecção da recta p com o plano ρ . Uma vez que se trata de duas rectas de perfil, o seu ponto de concorrência só pode ser determinado com o recurso a um processo geométrico auxiliar. Optou-se pelo rebatimento do plano π , o plano que contém as duas rectas. Rebateu-se o plano π para o Plano Frontal de Projectão (a charneira foi f_π) e determinaram-se as duas rectas em rebatimento – p_r está definida por R_r e S_r e i_r está definida por M_r e pelo seu ponto de concorrência com o eixo X (que é fixo, pois é um ponto da charneira). O ponto I_r é o ponto de intersecção de p_r e i_r – invertendo-se o rebatimento, determinaram-se as projecções do ponto I . I é o ponto de intersecção da recta p com o plano ρ .

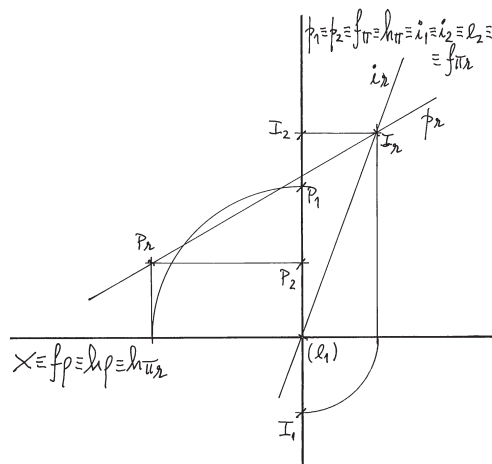
**789.**

Ver relatório do exercício **782**. Neste exercício, à semelhança da situação do exercício **787**, uma situação que pode gerar confusão é o facto de o traço frontal da recta i , a recta de intersecção do plano π com o plano α , ter cota negativa. Note que, no rebatimento efectuado, em que a charneira é f_π , se minora a dificuldade que esse aspecto gera, pois F é um ponto da charneira, pelo que é fixo (roda sobre si próprio – $F_r = F_2$).



792.

Este exercício é idêntico ao exercício 782, mas, em virtude de o plano dado ser um plano passante, definido por uma recta e a sua orientação, optou-se refazer o relatório adaptado a esta situação, em vez de remeter para o relatório daquele exercício. Note que, nesta situação, a recta p está definida por um ponto e uma direcção, e o plano p está definido por uma recta e a sua orientação. Assim, em primeiro lugar representaram-se o ponto P e a recta p , pelas suas projecções (em função dos dados), e o plano p , pelos seus traços (que estão coincidentes no eixo X). Nem a recta nem o plano são projectantes, pelo que é necessário o recurso ao **método geral da intersecção de rectas com planos**. 1. Por p conduziu-se um plano auxiliar π , de perfil (o plano π contém a recta). 2. Determinou-se a recta i , a recta de intersecção do plano π com o plano p . A recta i é uma recta de perfil que pertence ao plano passante (é uma **recta de perfil passante**), da qual temos imediatamente um ponto – seu ponto de concorrência com o eixo X . Sabemos também a direcção da recta i – a recta i faz, com o Plano Frontal de Projectação, um ângulo de 20° (é igual ao diedro formado entre o plano p e o Plano Frontal de Projectação). Assim, a recta i está definida por um ponto e uma direcção. 3. O ponto de intersecção (concorrência) das duas rectas é o ponto pedido – o ponto de intersecção da recta p com o plano p . Uma vez que se trata de duas rectas de perfil, o seu ponto de concorrência só pode ser determinado com o recurso a um process geométrico auxiliar. Optou-se pelo rebatimento do plano π , o plano que contém as duas rectas. Rebateu-se o plano π para o Plano Frontal de Projectação (a charneira foi f_π) e determinaram-se as duas rectas em rebatimento – p_r está definida por P_r e pelo ângulo que faz com h_π (ver exercício 705) e i_r está definida pelo seu ponto de concorrência com o eixo X (que é fixo, pois é um ponto da charneira) e pelo ângulo que faz com f_π (ver exercício 706). No rebatimento do ponto P há que ter em conta que P tem afastamento negativo, pelo que a projecção horizontal do arco do seu rebatimento se situa no SPHP. O ponto I_r é o ponto de intersecção de p_r e i_r – invertendo-se o rebatimento, determinaram-se as projecções do ponto I . I é o ponto de intersecção da recta p com o plano p .



793.

Em primeiro lugar representou-se o plano α , pelas projecções das duas rectas que o definem (em função dos dados), e o plano φ , pelo seu traço horizontal. Em seguida, para determinar a recta de intersecção entre os dois planos, sem recorrer aos traços do plano α , há que determinar os pontos de intersecção do plano φ (que é projectante horizontal) com as duas rectas que definem o plano (ver exercício 493). O ponto de intersecção do plano φ com a recta h é o ponto A (ver exercício 434). O ponto de intersecção do plano φ com a recta p é o ponto B (ver exercício 777). A recta de intersecção dos dois planos está definida por dois pontos – A e B .

