Escola Secundária de D. Pedro V

Matemática Aplicada às Ciências Sociais

Texto de Apoio nº ……….

Ano: ………. **Turma**: ………….   **Data**: ……. /……. /…….

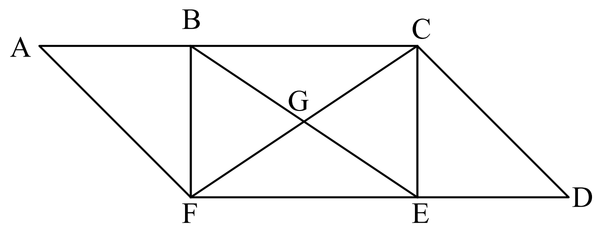
Assunto: Eulerização / Semieulerização

Nos problemas de grafos até agora estudados o objectivo é **percorrer todas as arestas de um grafo de uma só vez repetindo o menor número de arestas**.

1. Se o grafo for euleriano, isto é, admitir um **circuito de euler**, então **é possível percorrer todas as arestas de uma só vez sem repetir qualquer aresta do grafo**, começando e terminando no mesmo vértice.
   Uma condição necessária e suficiente para que um grafo seja euleriano é **ser conexo e todos os seus vértices serem de grau par** (Teorema de Euler);

Exemplo:

O grafo é conexo e todos os seus vértices são de grau par, logo é um grafo euleriano (admite um circuito de euler). Assim, **é possível percorrer todas as arestas do grafo de uma só vez sem repetir qualquer aresta**, começando e terminando no mesmo vértice.

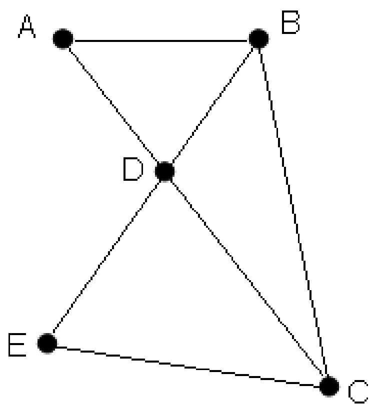


Percurso possível: **A B C D E C G F E G B F A**

2. Se o grafo admitir um **caminho de euler**, então também **é possível percorrer todas as arestas de uma só vez sem repetir qualquer aresta**, começando num vértice de grau ímpar e terminando noutro vértice de grau impar.
   Uma condição necessária e suficiente para que um grafo admita um caminho de euler é **ser conexo e no máximo dois dos seus vértices serem de grau ímpar** (Teorema do caminho de euler) – esse percurso começa num dos vértices de grau ímpar e termina no outro.

Exemplo:

O grafo é conexo e tem apenas dois vértices de grau ímpar – B e C – logo admite um caminho de euler. Assim, **é possível percorrer todas as arestas do grafo de uma só vez sem repetir qualquer aresta**, começando num vértice de grau ímpar e terminando no outro.



Percurso possível: **B A D E C D B C**

3. Se o grafo **<u>não admitir</u> circuitos de euler** (não é euleriano) **<u>nem admitir</u> caminhos de euler** então **não é possível percorrer todas as arestas do grafo de uma só vez sem repetir pelo menos uma delas**.

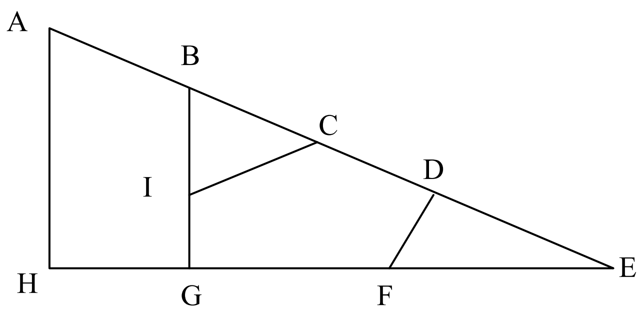
   <u>O objectivo será então encontrar um percurso que percorra todas as arestas do grafo no qual se repita o menor número de arestas.</u>

   Para encontrar as arestas que se têm de repetir utiliza-se o processo de EULERIZAÇÃO (se se pretende um circuito – voltar ao ponto de partida) ou de SEMIEULERIZAÇÃO (se se pretende um caminho – não voltar ao ponto de partida).

EULERIZAÇÃO	SEMIEULERIZAÇÃO
Processo que consiste em acrescentar arestas, por <u>duplicação das já existentes</u>, para que o grafo resultante seja euleriano, isto é, para que o grafo resultante seja conexo e tenha só vértices de grau par.	Processo idêntico à Eulerização – consiste em acrescentar arestas, por <u>duplicação das já existentes</u>, para que o grafo resultante admita um caminho de euler, isto é, para que o grafo resultante seja conexo e tenha somente dois vértices de grau ímpar.
Faz-se quando se pretende começar e terminar um percurso no mesmo vértice.	Faz-se quando não é necessário começar e terminar o percurso no mesmo vértice.
As arestas acrescentadas, por duplicação das existentes, correspondem às arestas que se têm de repetir no grafo inicial, para que se consiga percorrer todas as arestas do grafo, começando e terminando no mesmo vértice.	As arestas acrescentadas, por duplicação das existentes, correspondem às arestas que se têm de repetir no grafo inicial, para que se consiga percorrer todas as arestas do grafo, começando num dos vértices de grau ímpar e terminando no outro.

Exemplo:

O grafo não admite circuito de euler nem caminho de euler uma vez que apresenta mais do que dois vértices de grau ímpar – B, C, D, F, G e I (6 vértices de grau ímpar).



1) **Quantas vezes é necessário levantar o lápis para desenhar o grafo de uma só vez?**

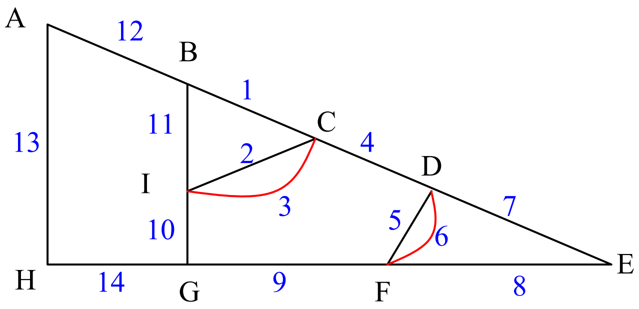
Resolução:

Para desenhar o grafo de uma só vez, sem nunca levantar o lápis, seria necessário que o grafo admitisse um caminho de euler, mas, como já vimos, este grafo não admite caminhos de euler.

Assim, vamos proceder à semieulerização do grafo (uma vez que não é necessário voltar ao ponto de partida) para vermos quantas arestas são necessárias repetir para percorrer todas as arestas do grafo de uma só vez.

Por exemplo, se duplicarmos as arestas CI e DF obtemos um grafo somente com dois vértices de grau ímpar – o B e o G, admitindo por isso um caminho de euler (já que é um grafo conexo). Logo, neste novo grafo, é possível percorrer todas as arestas sem repetir nenhuma delas, vejamos um percurso possível:

B C I C D F D E F G I B A H G



Pretendia-se saber quantas vezes seria necessário levantar o lápis para desenhar o grafo inicial de uma só vez. Ora, as arestas duplicadas **IC** **(3)** e **FD** **(6)** correspondem aos locais onde é necessário levantar o lápis para que não se passe novamente o lápis por cima das arestas CI **(2)** e DF **(5)** desenhadas anteriormente. Portanto, é necessário **levantar o lápis <u>duas</u> vezes** para desenhar o grafo inicial de uma só vez.

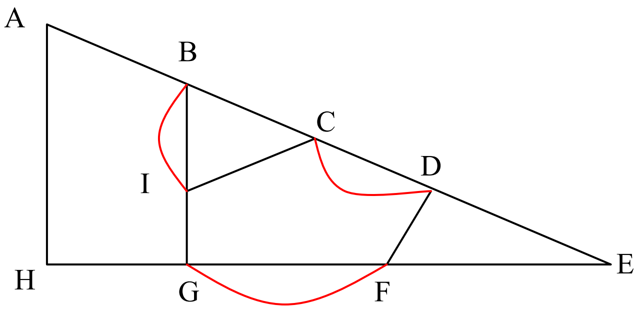
2) **Construa um percurso que comece e termine no vértice A e percorra todas as arestas do grafo de uma só vez, repetindo o menor número de arestas.**

Resolução:

Como já vimos o grafo não admite um circuito de euler, logo é impossível começar em A, percorrer todas as arestas do grafo de uma só vez e terminar em A, sem repetir arestas.

Assim, vamos proceder à eulerização do grafo para sabermos quantas arestas são necessárias repetir para percorrer todas as arestas do grafo de uma só vez e voltar ao ponto de partida.

Ao duplicarmos as arestas BI, CD e GF obtemos um novo grafo em que todos os seus vértices são de grau par, logo admite um circuito de euler (já que é conexo). Portanto, neste novo grafo (obtido após a eulerização do grafo inicial) é possível percorrer todas as arestas de uma só vez, começando e terminando no vértice A. Vejamos um percurso possível:



A B I B C D E F D C I G F G H A

Relativamente ao grafo inicial podemos dizer que este percurso começa e termina no vértice A, percorre todas as arestas do grafo repetindo 3 delas: as arestas BI, CD e GF (que correspondem às arestas acrescentadas na eulerização do grafo).