



Escola Secundária de D. Pedro V
Matemática Aplicada às Ciências Sociais
Texto de Apoio nº

Ano: Turma:

Data: / /

Assunto: Árvores

- ❖ **Definição:** Árvores são grafos conexos que não têm circuitos.

- ❖ **Propriedade 1:**
 - Se um grafo é uma árvore então existe um só caminho entre qualquer par de vértices.
 - Reciprocamente, se houver um único caminho que ligue dois quaisquer vértices, então o grafo é uma árvore.

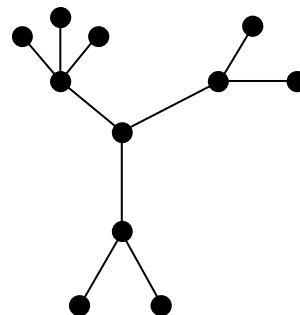
- ❖ **Propriedade 2:**
 - Numa árvore cada aresta é uma ponte.
 - Reciprocamente, se cada aresta de um grafo conexo é uma ponte, então o grafo é uma árvore

- ❖ **Propriedade 3:** Uma árvore com n vértices tem $n-1$ arestas.

- ❖ **Propriedade 4:** Um grafo conexo com n vértices e $n-1$ arestas é uma árvore.

❖ **Exemplo:**

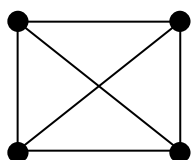
O grafo T é uma árvore



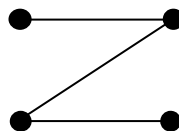
Grafo T

- ❖ Uma árvore que contenha todos os vértices de um grafo chama-se **árvore abrangente** ou **árvore geradora** desse grafo.

❖ **Exemplo:** O grafo H é uma árvore abrangente ou geradora do grafo G



Grafo G



Grafo H (subgrafo de G)

❖ Uma **árvore abrangente mínima** de um grafo pesado é uma árvore abrangente com custo mínimo.

❖ **Algoritmo do Avaro ou de Kruskal para encontrar a árvore abrangente mínima:**

1. Escolhem-se as duas arestas com o menor peso;
2. Escolhe-se a aresta seguinte com o menor peso, desde que esta não feche um caminho;
3. Repete-se o ponto anterior até que todos os vértices façam parte da árvore;
4. Se houver empate na escolha de arestas, selecciona-se aleatoriamente.

Nota: Este algoritmo é uma variação do algoritmo do peso das arestas estudado anteriormente, mas aplicado às árvores. Surpreendentemente e ao contrário do algoritmo do peso das arestas que não nos garante o menor circuito, **a aplicação do algoritmo de Kruskal garante-nos que a árvore abrangente encontrada é a mínima.**

❖ **Algoritmo de Prim para encontrar a árvore abrangente mínima**

1. Escolhe-se um vértice inicial;
2. Selecciona-se o vértice mais próximo de modo que não feche um caminho;
3. Se houver empate na escolha de arestas, selecciona-se aleatoriamente.

Nota: este algoritmo pode chegar a uma situação que fecha um caminho. Há duas soluções possíveis: ou começa-se por outro vértice ou modifica-se o método para procurar em cada fase o vértice mais próximo de alguns dos vértices já considerados (sempre sem fechar caminhos).