Nova SBE

Nova School of Business and Economics

Semestre de Primavera 2011/2012

Cálculo II

Teste Intermédio, 13 de Abril de 2012

1. *O teste é constituído por* ***cinco grupos****.*

2. *O teste* ***não pode ser desagrafado****,* ***sob pena de anulação automática do mesmo****.*

3. *Responda a cada questão nas folhas correspondentes* ***(pode e deve usar os versos das respetivas folhas para as suas respostas)****.*

4. *Não é permitido o uso de calculadoras, e todos os telemóveis têm de ser desligados!*

5. ***Não se esqueça de identificar todas as folhas: folhas não identificadas não serão corrigidas****!*

6. *Não serão feitos esclarecimentos individuais sobre as questões durante o teste.*

7. *A duração do teste é de* ***2h30m****. Bom trabalho!*

João Bravo Furtado

Filipa Gomes

José Miguel Costa

Sílvia Guerra

N^o____ Nome__________________________________GRUPO 1

____

1. Considere a seguinte série:

$$3(x+1)^5 - 3(x+1)^8 + 3(x+1)^{11} - 3(x+1)^{14} + \ldots$$

   (a) *(0,75 val.)* Escreva a série na forma $A(x) \sum_{n \geq p} (R(x))^n$, indicando o valor de p, bem como as expressões de $A(x)$ e de $R(x)$.

   (b) *(1,25 val.)* Determine, justificando, o conjunto de valores de x para os quais a série converge. Calcule a soma da série, $S(x)$, num valor genérico, x, desse conjunto.

Nº____ Nome________________________________GRUPO 1

Nº____ Nome________________________________GRUPO 2

____

2. Considere a função $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = \frac{\sqrt{x^2+y^2-4}}{\exp\left(\frac{x+y-4}{y-x^2-1}\right)}$$

   a. *(1,5 val.)* Determine analiticamente o domínio de f, D_f, e represente-o geometricamente.

   Nota Importante: As alíneas seguintes serão cotadas de acordo com a representação geométrica de D_f que apresentou em a.

   b. *(1,75 val.)* Defina, analiticamente, o interior, o derivado, e a fronteira de D_f.

   c. *(1,25 val.)* Indique, justificando, se D_f é um conjunto aberto, fechado, conexo por arcos, ou limitado.

Nº____ Nome________________________________GRUPO 2

Nº____ Nome________________________________GRUPO 2

Nº____ Nome________________________________GRUPO 3

____

3. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida da seguinte forma:

$$f(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y)), \quad \text{onde}$$

$$f_1(x,y) = \begin{cases} x + \frac{\sin(xy^3)}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}, \text{ e } f_2(x,y) = x^2y - 5y.$$

a. *(1,25 val.)* Calcule $\nabla f_1(0,0)$.

b. *(2 val.)* Mostre que f_1 é diferenciável em $(0,0)$.

(**Observação**: Lembre-se que $|\sin(x)| \leq |x|, \forall x \in \mathbb{R}$.)

c. *(0,75 val.)* Será f diferenciável em $\mathbb{R}^2$? E contínua? Justifique as suas respostas.

d. *(0,75 val.)* É possível garantir-se a existência da **derivada direcional de f no ponto** $(0,0)$, **segundo o vetor genérico** $u = (u_1, u_2) \neq (0,0)$? Justifique.

e. *(1,25 val.)* Calcule, se existir, $f'_{(2,1)}(0,0)$. Justifique os cálculos que efetuar.

Nº____ Nome________________________________GRUPO 3

Nº____ Nome________________________________GRUPO 3

N^o____ Nome________________________________GRUPO 4

____

4. Considere a função $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida da seguinte forma:

$$f(x, y) = \cos(3x)e^y$$

   a. *(1,5 val.)* Calcule o polinómio de Taylor de 2^a ordem, $P_2(x, y)$, que aproxima a função f numa vizinhança do ponto $(0, 1)$.

   b. Aproveite os cálculos que efetuou em **a**. para:

      i. *(0,75 val.)* Indicar, justificando, o valor de

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{\cos(3x)e^y - e - e(y-1) - \frac{1}{2}\left(-9ex^2 + e(y-1)^2\right)}{\sqrt{x^2 + (y-1)^2}};$$

      ii. *(0,75 val.)* Calcular, justificando, a **derivada dirigida**, segundo a **direção e sentido de crescimento máximo** de f no ponto $(0, 1)$.

Nº____ Nome____GRUPO 4

____

Nº____ Nome________________________________GRUPO 4

____

N^o____ Nome____GRUPO 5

____

5. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de classe $C^2(\mathbb{R}^2)$. Considere a função composta

$$h(x,y) = f(u,v),$$

onde

$$(u,v) = g(x,y) = \left(2x^2, \frac{y^3}{x}\right).$$

Fixe o ponto $(x,y) = (1,1)$ e admita que $\frac{\partial f}{\partial u}(2,1) = 1$ e $\frac{\partial f}{\partial v}(2,1) = 4$.

a. Mostre - justificando adequadamente as suas respostas -, que:

   i. *(1,25 val.)* $\frac{\partial h}{\partial y}(1,1) = 12$.

   ii. *(1,25 val.)* $\frac{\partial^2 h}{\partial y \partial x}(1,1) = -12 + 12\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}(2,1) - 3\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(2,1)$.

b. Admita ainda que a função f é homogénea de grau 3.

   i. *(0,75 val.)* Prove, por definição, que h é uma função homogénea de grau 6.

   ii. *(1,25 val.)* Sabendo que $\frac{\partial h}{\partial x}(1,1) = 0$, mostre que $h(2,2) = 2^7 = 128$. Justifique.

Nº____ Nome________________________________GRUPO 5

Nº____ Nome________________________________GRUPO 5

___