Nova SBE

Nova School of Business and Economics

Semestre de Primavera 2011/2012

Cálculo II

Exame de 2^a Época, 22 de Junho de 2012

(Para alunos que não realizaram o teste intermédio)

1. *O exame é constituído por* ***seis grupos****.*

2. *O exame* ***não pode ser desagrafado****,* ***sob pena de anulação automática do mesmo****.*

3. *Responda a cada questão nas folhas correspondentes* ***(pode e deve usar os versos das respetivas folhas para as suas respostas)****.*

4. *Não é permitido o uso de calculadoras, e todos os telemóveis têm de ser desligados!*

5. ***Não se esqueça de identificar todas as folhas: folhas não identificadas não serão corrigidas****!*

6. *Não serão feitos esclarecimentos individuais sobre as questões durante o exame.*

7. *A duração do exame é de* ***2h45m****. Bom trabalho!*

João Bravo Furtado

Filipa Gomes

José Miguel Costa

Sílvia Guerra

Nº____ Nome________________________________GRUPO 0

(Tempo indicativo: 20 min.)

---

0. *(2,25 val.)* Considere a função $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = \frac{x+y-3}{\sqrt{1-x^2-(y-3)^2}}$$

e o conjunto A definido por:

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y) \in D_f \vee (y = 2 \wedge |x| < 3) \vee 0 < y < 1\right\}$$

a. *(0,75 val.)* Determine analiticamente o conjunto A, e represente-o geometricamente.

Nota Importante: As alíneas seguintes serão cotadas de acordo com a representação geométrica de A que apresentou em a.

b. *(0,75 val.)* Defina analiticamente o derivado e a fronteira de A.

c. *(0,75 val.)* Indique, justificando, se A é um conjunto aberto, fechado, ou limitado.

Nº____ Nome________________________________GRUPO 0

N^o____ Nome________________________________GRUPO 1

(Tempo indicativo: 25 min.)

1. *(4,25 val.)* Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida da seguinte forma:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^3}{(x-1)^2+y^2}, & x < 1 \\ y, & x \geq 1 \end{cases}$$

   a. *(0,5 val.)* Mostre que f é contínua em $(x,y) = (1,b)$, ou seja, em qualquer ponto da reta $x = 1$, com $b \neq 0$.

   b. *(1,25 val.)* Mostre que f é contínua em $(1,0)$. Indique, justificando, o domínio de continuidade de f.

   c. *(1,25 val.)* Calcule, se existirem, $f'_x(1,b)$ e $f'_y(1,b)$, para todo o $b \in \mathbb{R}$.

   d. *(1,25 val.)* Mostre que f não é diferenciável em $(1,0)$.

Nº____ Nome________________________________GRUPO 1

N^o____ Nome________________________________GRUPO 1

Nº____ Nome________________________________GRUPO 1

N^o____ Nome___________________________________GRUPO 2

(Tempo indicativo: 20 min.)

---

2. *(3 val.)* Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1, com $g'(1) = 1$. Considere a função $F(x,y)$, tal que:

$$F(x,y) = (x^2 + g(xy), x^3 - yg(x^2))$$

   a. *(1,5 val.)* Mostre que se $g(1) \neq -\frac{1}{3}$, então é possível garantir que a função F admite inversa local, diferenciável, numa vizinhança do ponto $(x,y) = (1,1)$. Justifique cuidadosamente a sua resposta.

   b. Seja $g(1) = 1$.

      i. *(0,75 val.)* Calcule $JF^{-1}(2,0)$, isto é, a matriz jacobiana da função inversa de F no ponto $(2,0)$.

      ii. *(0,75 val.)* Admita ainda que g é uma função homogénea. Encontre o grau de homogeneidade de g, α, justificando a sua resposta.

Nº____ Nome________________________________GRUPO 2

N^o____ Nome________________________________GRUPO 3

(Tempo indicativo: 20 min.)

---

3. *(2,75 val.)* Considere a equação:

$$yz + e^{x+z} = 1$$

a. *(1 val.)* Mostre que a equação acima permite escrever z como função de (x, y), isto é, $z(x, y)$, numa vizinhança do ponto $(x, y, z) = (0, 0, 0)$.

b. *(0,75 val.)* Mostre que $\nabla z(0, 0) = [-1 \quad 0]$.

c. *(1 val.)* Sabendo que $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(0, 0) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(0, 0) = 0$, mostre que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{z(x,y)+x-xy}{x^2+y^2} = 0$.

Nº____ Nome________________________________GRUPO 3

Nº____ Nome________________________________GRUPO 4

(Tempo indicativo: 35 min.)

---

4. *(6,25 val.)* Suponha que um determinado fundo de pensões está interessado em ter na sua carteira de ativos títulos de dívida soberana de 3 países: Alemanha, Portugal, e Grécia. A **proporção** de cada um destes ativos é representada por A, P, e G, respetivamente. Naturalmente, a soma destas proporções tem de ser **igual a 1**.

   No contexto de incerteza atual, o fundo pretende **minimizar o risco** da sua carteira, medido pela **variância**. Estima-se que os títulos alemães não têm risco, e que a variância dos títulos portugueses e gregos é 1 e 9, respetivamente. Existe ainda uma correlação positiva entre a rentabilidade dos títulos portugueses e gregos, estimando-se uma covariância de 2. Assim, a **variância da carteira** é dada por $P^2 + 2PG + 9G^2$.

   Atualmente, a taxa de rentabilidade esperada de cada um dos títulos alemães, portugueses, e gregos é 1, 8, e 15, respetivamente, pelo que a **rentabilidade esperada da carteira** é dada por $A + 8P + 15G$. Assuma que os detentores do fundo consideram que a rentabilidade esperada **nunca poderá ser inferior a 4**.

   Por imposição legal, a **proporção dos títulos portugueses terá que ser pelo menos 0.5**, e a **proporção dos títulos gregos não poderá exceder 0.2**. Existe ainda uma outra restrição legal, que **impede que as proporções tomem valores negativos**.

   a. *(1,25 val.)* Formule o problema do fundo de pensões, identificando claramente a função objetivo, variáveis de decisão e as restrições do problema.

   b. *(1,5 val.)* Escreva as condições de Kuhn-Tucker associadas ao problema do fundo de pensões. (**Sugestão:** *Sempre que possível, isto é, para qualquer restrição de igualdade que possa existir, utilize o método de substituição para eliminar variáveis e/ou restrições de igualdade do problema.*)

   c. *(0,75 val.)* Verifique que as condições de Kuhn-Tucker são necessárias e suficientes para encontrar um **óptimo global estrito** do problema.

d. *(1,75 val.)* Verifique que, **no ótimo**, a carteira **não terá qualquer título de dívida grega**, e que **a proporção de títulos de dívida portuguesa será igual ao limite mínimo estabelecido por lei**. Calcule esse otimizante (não se esqueça de calcular os valores dos multiplicadores de Lagrange associados às restrições que não eliminou em **b**.).

e. *(1 val.)* Suponha agora que uma agência de rating diminuiu de forma significativa a notação de risco dos títulos portugueses, de forma que a variância destes títulos diminuiu para 0.75 (assuma que nenhum outro parâmetro do problema foi afetado). Qual será o impacto aproximado deste evento na variância da carteira ótima?

Nº____ Nome________________________________GRUPO 4

Nº____ Nome________________________________GRUPO 4

Nº____ Nome________________________________GRUPO 4

N^o____ Nome____ GRUPO 5

(Tempo indicativo: 20 min.)

---

5. *(1,5 val.)* Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 e seja $f(\mathbf{x}^*)$ um mínimo local de f. Prove que, então:

   a. *(1 val.)* $\nabla f(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$.

   b. *(0,5 val.)* A matriz hessiana de f avaliada em $\mathbf{x}^*$ é necessariamente semi-definida positiva. Isto é, $\mathbf{u}^T H(\mathbf{x}^*)\mathbf{u} \geq 0$, para todo o $\mathbf{u}$.