Nova SBE

Nova School of Business and Economics

Semestre de Primavera 2011/2012

Cálculo II

Exame de 1^a Época, 30 de Maio de 2012

(Para alunos que não realizaram o teste intermédio)

1. *O exame é constituído por* ***seis grupos****.*

2. *O exame* ***não pode ser desagrafado****,* ***sob pena de anulação automática do mesmo****.*

3. *Responda a cada questão nas folhas correspondentes* ***(pode e deve usar os versos das respetivas folhas para as suas respostas)****.*

4. *Não é permitido o uso de calculadoras, e todos os telemóveis têm de ser desligados!*

5. ***Não se esqueça de identificar todas as folhas: folhas não identificadas não serão corrigidas****!*

6. *Não serão feitos esclarecimentos individuais sobre as questões durante o exame.*

7. *A duração do exame é de* ***2h45m****. Bom trabalho!*

João Bravo Furtado

Filipa Gomes

José Miguel Costa

Sílvia Guerra

Nº____ Nome________________________________ GRUPO 0

(Tempo indicativo: 20 min.)

---

0. *(2,5 val.)* Considere a função $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por:

$$f(x,y) = \left(\ln(1-y), \sqrt{y-(x-1)^2}\right)$$

e o conjunto A definido por:

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y) \in D_f \vee (-1 \leq y \leq 0 \wedge |x| \leq 2) \vee (x,y) = (0,2)\right\}.$$

a. *(0,75 val.)* Determine analiticamente o conjunto A, e represente-o geometricamente.

Nota Importante: As alíneas seguintes serão cotadas de acordo com a representação geométrica de A que apresentou em a.

b. *(1 val.)* Defina analiticamente, o interior, o derivado, e a fronteira de A.

c. *(0,75 val.)* Indique, justificando, se $A \setminus \{(0,2)\}$ é um conjunto aberto, fechado, conexo por arcos, ou limitado.

Nº____ Nome________________________________GRUPO 0

Nº____ Nome________________________________GRUPO 1

(Tempo indicativo: 25 min.)

---

1. *(4,25 val.)* Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida da seguinte forma:

$$f(x,y) = \begin{cases} \sin(y - x^2), & y \geq x^2 \\ \frac{y^3 - x^6}{x^2 + y^2}, & y < x^2 \end{cases}$$

   a. *(0,5 val.)* Mostre que f é contínua em $(x,y) = (a,a^2)$, ou seja, nos pontos da parábola $y = x^2$, com $a \neq 0$.

   b. *(1,25 val.)* Mostre que f é contínua em $(0,0)$. Indique, justificando, o domínio de continuidade de f.

   c. *(0,75 val.)* Calcule, se existirem, $f'_x(0,0)$ e $f'_y(0,0)$.

   d. *(1 val.)* Mostre que f não é diferenciável em $(0,0)$.

   e. *(0,75 val.)* Calcule, se existir, $f'_{(1,-1)}(0, \frac{\pi}{4})$. Justifique os cálculos que efetuar.

Nº____ Nome________________________________GRUPO 1

____

Nº____ Nome________________________________GRUPO 1

Nº____ Nome________________________________ GRUPO 1

Nº____ Nome________________________________GRUPO 2

(Tempo indicativo: 15 min.)

---

2. *(2,75 val.)* Seja $f(x, y)$ uma função de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$, de classe C^2, homogénea de grau 3, com $\nabla f(2, 2) = [4 \quad -8]$.

   a. *(1,25 val.)* Mostre que $\nabla f(1, 1) = [1 \quad -2]$ e calcule $f(1, 1)$. Justifique os cálculos que efetuar.

   b. *(1,5 val.)* Sabendo que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1, 1) = 0$, calcule o polinómio de Taylor de segunda ordem que aproxima f numa vizinhança do ponto $(1, 1)$. Justifique os cálculos que efetuar.

Nº____ Nome________________________________GRUPO 2

N^o____ Nome________________________________GRUPO 3

(Tempo indicativo: 25 min.)

---

3. *(3,25 val.)* Seja $h(u,v)$ uma função de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$, de classe C^2, e considere a equação:

$$h(xy - z, z) = x - 2z$$

   a. *(1 val.)* Sabendo que $h(-1,1) = \frac{\partial h}{\partial u}(-1,1) = \frac{\partial h}{\partial v}(-1,1) = -1$, mostre que a equação acima permite garantir a existência de uma função $z(x,y)$, de classe C^1, definida de uma bola centrada em $(x_0, y_0) = (1,0)$ para uma vizinhança de $z_0 = 1$.

   b. *(1 val.)* Mostre que $\nabla z(1,0) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

   c. *(1,25 val.)* Sabendo que $\frac{\partial^2 h}{\partial u^2}(-1,1) = \frac{\partial^2 h}{\partial u \partial v}(-1,1)$, mostre que $\left(\frac{\partial h}{\partial u}\right)'_x (1,0) = 0$.

Nº____ Nome________________________________GRUPO 3

N^o____ Nome____________________________________GRUPO 4

(Tempo indicativo: 35 min.)

---

4. *(6 val.)* Um consumidor pretende maximizar a sua utilidade, $U(x,y) = 2\ln x + \sqrt{y}$, onde **x** é a quantidade consumida do **bem 1** e **y** é a quantidade consumida do **bem 2**.

   O preço de cada unidade do **bem 1** é **5** u.m. e o preço de cada unidade do **bem 2** é **4** u.m., e o consumidor tem um rendimento de **150** u.m.. Além disso, a quantidade consumida do **bem 2** tem que ser **pelo menos o dobro** da quantidade consumida do **bem 1**, e a quantidade consumida do **bem 1** não pode exceder **10** unidades.

   a. *(1 val.)* Formule o problema do consumidor, identificando claramente a função objectivo, as variáveis de decisão e as restrições do problema.

   b. *(1 val.)* Escreva as condições de Kuhn-Tucker associadas ao problema do consumidor.

   c. *(1,75 val.)* Encontre um ponto que satisfaça as condições de Kuhn-Tucker, tal que: **i**. Se esse ponto for um otimizante global do problema, a utilidade ótima do consumidor aumentaria se este pudesse consumir mais do que **10** unidades do **bem 1**; **ii**. Se esse ponto for um otimizante global do problema, então um aumento no rendimento do consumidor implicaria um aumento na sua utilidade ótima.

   d. *(1 val.)* Pode garantir, com recurso a algum(ns) resultado(s) geral(ais) que o ponto encontrado em **c**. é de facto o **otimizante global estrito** do problema? Justifique a sua resposta detalhadamente.

   e. *(1,25 val.)* Suponha que o preço do **bem 2** diminui para **3,8** u.m.. Quantifique o impacto aproximado que essa alteração de preço tem na utilidade ótima do consumidor.

Nº____ Nome________________________________GRUPO 4

Nº____ Nome________________________________GRUPO 4

Nº____ Nome________________________________GRUPO 4

____

N^o____ Nome__________________________________GRUPO 5

(Tempo indicativo: 20 min.)

---

5. *(1,25 val.)* Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 e seja $\mathbf{x}^*$ um ponto de estacionariedade de f. Prove que, se o diferencial de segunda ordem de f for definido positivo em $\mathbf{x}^*$, isto é, $\mathbf{u}^T H(\mathbf{x}^*)\mathbf{u} > 0$ para todo o $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, então f tem um mínimo local em $\mathbf{x}^*$.