2009/2010 - 2º SEMESTRE
TESTE DE ÁLGEBRA LINEAR (1303)
19 de Março de 2010

Grupo 1

1- Considere os seguintes 3 **pontos de** $\Re^3 : A = (a, 0, 0)$, $B = (0, a, 0)$ **e** $C = (0, 0, a)$ **com** $a \neq 0$ **real arbitrário**.

1.1- Calcule a distância de A **a** B. [**2/20**]

1.2- Encontre a equação Cartesiana do plano Π **que passa por** A, B **e** C.[**2/20**]

1.3- Determine a distância de Π **à origem**. [**2/20**]

Respostas

1.1- Formamos o vector $A - B = (a, -a, 0)$ e a distância pretendida é $\|A - B\| = \sqrt{2a^2} = |a|\sqrt{2}$.

1.2- Formamos os vectores $A - B = (a, -a, 0)$ e $A - C = (a, 0, -a)$ e procuramos um vector $v = (v_1, v_2, v_3)$ normal ao plano Π.

Terá que ser $< v, A - B >= 0$ e $< v, A - C >= 0$, ou seja, $av_1 - av_2 = 0$ e $av_1 - av_3 = 0$, ou ainda, $v_1 = v_2$ e $v_1 = v_3$. Como $v_1 = v_2 = v_3$ escolhemos o vector $v = (1, 1, 1)$.

Assim um ponto $x = (x_1, x_2, x_3)$ pertence a Π se e só se $< x - A, v >= 0$, ou seja $(x_1 - a) + x_2 + x_3 = 0$. Logo Π tem por equação cartesiana $x_1 + x_2 + x_3 = a$.

1.3- Se $\bar{0} = (0, 0, 0)$ designar a origem a distância pretendida é $d = | < \bar{0} - A, v > |/\|v\| = |a|/\sqrt{3}$.

2009/2010 - 2º SEMESTRE
TESTE DE ÁLGEBRA LINEAR (1303)
19 de Março de 2010

Grupo 2

2- Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -5 & 4 \\ 4 & -3 & 8 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$ **e** $C = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ **e calcule, sempre que possível, o seguinte:**

2.1- AB [**1/20**]
2.2- BA [**1/20**]
2.3- $(B^T B)^{-1}$ [**2/20**]
2.4- $C^T B$ [**1/20**]
2.5- CC^T[**1/20**]
2.6- $(C^T AC)^{-1}$[**2/20**]

Respostas

2.1- $AB = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -5 & 4 \\ 4 & -3 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 15 \\ 12 & 8 \\ 28 & 52 \end{bmatrix}$

2.2- BA não faz sentido pois as dimensões são imcompativeis.

2.3- $(B^T B)^{-1} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} \right)^{-1} = \begin{bmatrix} 10 & 23 \\ 23 & 69 \end{bmatrix}^{-1}$.. Temos que $\det \begin{bmatrix} 10 & 23 \\ 23 & 69 \end{bmatrix} = 161 \neq 0$ logo a inversa existe. Vamos agora fazer o cálculo usando eliminação de Gauss:

$$\begin{bmatrix} 10 & 23 & 1 & 0 \\ 23 & 69 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 23/10 & 1/10 & 0 \\ 23 & 69 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 23/10 & 1/10 & 0 \\ 0 & 161/10 & -23/10 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\to \begin{bmatrix} 1 & 23/10 & 1/10 & 0 \\ 0 & 1 & -1/7 & 10/161 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & 1 & -1/7 & 10/161 \end{bmatrix}:$$

Logo teremos $\begin{bmatrix} 10 & 23 \\ 23 & 69 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 3/7 & -1/7 \\ -1/7 & 10/161 \end{bmatrix}$. Observe que o cálculo era imediato usando $A^{-1} = [Adj(A)]^T/|A|$.

2.4- $C^TB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 31 \end{bmatrix}$

2.5- $CC^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$

2.6- Temos $C^TA = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -5 & 4 \\ 4 & -3 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & -21 & 35 \end{bmatrix}$. Temos então

$C^TAC = \begin{bmatrix} 13 & -21 & 35 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = [76]$. Assim $(C^TAC)^{-1} = [1/76]$

2009/2010 - 2º SEMESTRE
TESTE DE ÁLGEBRA LINEAR (1303)
19 de Março de 2010

Grupo 3

3- Recorde que uma matriz A, $(n \times n)$, **diz-se anti-simétrica se** $A = -A^T$.

3.1- Dada uma matriz A, $(n \times n)$, **diga (justificando) quanto vale** $|\alpha A|$ **em função de** $|A|$ **para qualquer** α **real**. [**2/20**]

3.2- Considere a seguinte matriz anti-simétrica $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$ **e calcule o seu determinante**. [**2/20**]

3.3- Agora mostre que se uma matriz A, $(n \times n)$, **for anti-simétrica e** n **for impar tem-se sempre** $|A| = 0$. [**2/20**]

Respostas

3.1- Sabemos que se multiplicarmos uma fila de A por α o seu determinante vem multiplicado por esse número. Como A é $(n \times n)$ teremos $|\alpha A| = \alpha^n |A|$.

3.2- $\det \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{bmatrix} = -\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ -3 & -2 & 0 \end{bmatrix} = -\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 6 \end{bmatrix} =$

$= -\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$

3.3- Como A é anti-simétrica temos $A = -A^T$. Logo (usando a alinea 3.1) teremos $|A| = (-1)^n |A^T| = (-1)^n |A|$. Se n é impar vem $|A| = -|A|$ logo $|A| = 0$.