2010/2011 - 1º SEMESTRE
TESTE DE ÁLGEBRA LINEAR (1303)
12 de Novembro de 2010

1- Considere os segintes vectores de $\Re^3$: $u = (-1,3,4)$ e $v = (2,1,-1)$. Calcule o seguinte:

1.1- $||u||$. [2/20]
1.2- O coseno do ângulo entre u e v. [2/20]
1.3- Um valor de x que torne $(x,-3,5)$ perpendicular a u. [2/20]
1.4- Um vector não nulo perpendicular a u e v. [2/20]

Respostas

1.1 $||u|| = \sqrt{1+9+16} = \sqrt{26}$
1.2 Seja θ o ângulo entre u e v. Temos
$\cos\theta =< u,v > /(||u|| \times ||v||) = (-2+3-4)/(\sqrt{26}\sqrt{6}) = -3/\sqrt{156}$
1.3 $0 =< (-1,3,4),(x,-3,5) >= -x-9+20$ logo $x = 11$
1.4 Para o vector (x,y,z) ser perpendicular a u e v temos: $-x+3y+4z = 0$ e $2x+y-z = 0$. Fazendo, por exemplo, $x = 1$ vem $3y+4z = 1$ e $y-z = -2$ ou seja $y = z-2$ e $3(z-2)+4z = 1$logo $y = -1$e $z = 1$. Assim o vector $(x,y,z) = (1,-1,1)$ é uma solução.

2010/2011 - 1º SEMESTRE
TESTE DE ÁLGEBRA LINEAR (1303)
12 de Novembro de 2010

2- Sejam A e B duas matrizes $(n \times n)$. Diga se as igualdades seguintes são verdadeiras. Se sim dê uma prova, se não dê um contra-exemplo e uma condição para que a igualdade se verifique. Sugestão: pense primeiro no caso particular $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.

2.1- $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$. [3/20]

2.2- $A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$. [3/20]

Respostas

2.1 $(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2$. Logo a igualdade só é vàlida se A e B comutarem $(AB = BA)$. As matrizes da sugestão dão um contra-exemplo pois não comutam.

2.2 $(A+B)(A-B) = A^2 - AB + BA - B^2$. Logo a igualdade só é vàlida se A e B comutarem $(AB = BA)$. De novo as matrizes da sugestão dão um contra-exemplo pois não comutam.

2010/2011 - 1º SEMESTRE
TESTE DE ÁLGEBRA LINEAR (1303)
12 de Novembro de 2010

3- Considere as matrizes $A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ e

$$A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

3.1- Determine os valores dos determinantes $|A_2|$, $|A_3|$ e $|A_4|$. Repare que se verificam as igualdades $|A_3| = |A_2|$ e $|A_4| = -|A_3|$. [2/20]

3.2- Considere agora o caso geral de uma matriz A_n, $(n \times n)$, cujos elementos a_{ij} valem 1 se $i + j = n + 1$ e 0 em todos os outros casos, isto é, todos os elementos valem 0 excepto os da *diagonal secundária* que valem 1. Calcule $|A_n|$. [4/20]

Respostas

3.1 $\det\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = -1$, $\det\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = -\det\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = -1$

$$\det\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = -\det\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 1$$

Verificam-se então as igualdades $|A_3| = |A_2|$ e $|A_4| = -|A_3|$.

3.2 Considere agora o caso geral de uma matriz A_n, $(n \times n)$, cujos elementos a_{ij} valem 1 se $i + j = n + 1$ e 0 em todos os outros casos, isto é, todos os elementos valem 0 excepto os da *diagonal secundária* que valem 1. Para a transformarmos na identidade fazendo, como anteriormente, trocas de colunas (ou linhas) teremos:

- Se n for *par* $n/2$ trocas logo, neste caso $|A_n| = (-1)^{n/2}$
- Se n for *impar* $(n-1)/2$ trocas (pois a coluna central fica fixa) logo, neste caso $|A_n| = (-1)^{(n-1)/2}$