2009/2010 - 1º SEMESTRE- 1ª ÉPOCA
TESTE DE ÁLGEBRA LINEAR (1303)
PROVA A
4 de Novembro de 2009

Grupo 1

1. Considere o espaço vectorial real , $A_{n \times n}$, formado por todas as matrizes $(n \times n)$ de coeficientes reais. Diga, justificando, quais dos seguintes conjuntos são subespaços de $A_{n \times n}$.

1.1- As matrizes simétricas $(n \times n)$. Recorde que A é simétrica se $A = A^T$.

1.2- As matrizes $(n \times n)$ cujo determinante é diferente de zero.

1.3- As matrizes $(n \times n)$ que comutam com uma dada matriz $M \in A_{n \times n}$.

1.4- As matrizes $M \in A_{n \times n}$ tais que $M^2 = M$.

Respostas

1.1 Se A é simétrica kA também o é: $(kA)^T = k(A)^T = kA$.
A soma de matrizes simétricas também é simètrica: $(A+B)^T = A^T + B^T = A + B$
Logo trata-se de um subespaço de $A_{n \times n}$.

1.2 Obviamente que não é subespaço de $A_{n \times n}$. Basta pensar em I_n e $-I_n$, ambas com o determinante diferente de 0, e a sua soma é a matriz nula cujo determinante é 0.

1.3 Se A comuta com M, ou seja se $AM = MA$, então kA também comuta:

$$(kA)M = k(AM) = k(MA) = M(kA).$$

Se A e B comutam com M então a sua soma também comuta:

$$(A+B)M = AM + BM = MA + MB = M(A+B)$$

Logo trata-se de um subespaço de $A_{n \times n}$.

1.4 Obviamente que não é subespaço de $A_{n \times n}$: $(kM)^2 = k^2M^2 = k^2M \neq kM$ a não ser que

$k = 1$.

2009/2010 - 1º SEMESTRE- 1ª ÉPOCA
TESTE DE ÁLGEBRA LINEAR (1303)
PROVA A
4 de Novembro de 2009

Grupo 2

2. Encontre, se existir, uma matriz X tal que $X = AX + B$ onde:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

Será a solução única, caso exista? Porquê?

Resposta

2 $X = AX + B \Rightarrow X - AX = B \Rightarrow (I - A)X = B$

A matriz $I - A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ tem inversa pois $det(I - A) = 1$. Essa inversa é fácil de calcular por eliminação de Gauss:

$$\left[\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

logo

$$(I - A)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Então:

$$(I - A)X = B \Rightarrow X = (I - A)^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}. = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

A solução é única pois a inversa de $I - A$ é única.

2009/2010 - 1º SEMESTRE- 1ª ÉPOCA
TESTE DE ÁLGEBRA LINEAR (1303)
PROVA A
4 de Novembro de 2009

Grupo 3

3. Considere as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \text{ e } P = A(A^TA)^{-1}A^T = \begin{bmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{5}{6} \end{bmatrix}.$$

A matriz P é chamada uma matriz de projecção. (Vai encontrar alguns ”bichos” destes em Econometria)

3.1- Calcule P^{100}. Não são necessários quaisquer cálculos aritméticos!

3.2- O que é que pode dizer (de novo sem fazer cálculos aritméticos) sobre o determinante de P? Justifique a resposta.

Respostas

3.1 Repare que

$P^2 = [A(A^TA)^{-1}A^T][A(A^TA)^{-1}A^T] = A(A^TA)^{-1}A^TA(A^TA)^{-1}A^T = A(A^TA)^{-1}A^T = P$

Daqui decorre imediatamente que

$$P^{100} = P = \begin{bmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{5}{6} \end{bmatrix}$$

3.2 Como $P = P^2$ vem que $\det(P) = [\det(P)]^2$ o que implica que $\det(P)$ só pode valer 0 ou 1.

Com efeito, no exemplo acima, cálculos simples mostram que temos:

$$\det(P) = \det\begin{bmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{5}{6} \end{bmatrix} = 0$$