2012/2013 - 1º SEMESTRE
TESTE DE ÁLGEBRA LINEAR (1303)
03 de Novembro de 2012

Grupo 1

1- Considere os seguintes pontos de $\Re^3$: $a = (1,2,2), b = (-1,1,4)$

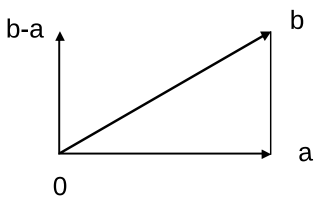
1.1- Mostre que o triângulo que tem por vértices a, b **e a origem é um triângulo rectângulo isosceles**. [**2/20**]

1.2- Encontre a equação Cartesiana do plano desse triângulo. **Será um sub-espaço de** $\Re^3$? **Se sim exiba uma base**. [**2/20**]

1.3- Qual a distância desse plano ao ponto $c = (1,1,1)$? [**2/20**]

Respostas

1.1 Considere a seguinte figura



Repare que o coseno do ângulo dos vectores a e b é dado por $\frac{<a,b>}{\|a\|\times\|b\|} = \frac{-1+2+8}{\sqrt{9}\,\sqrt{18}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ logo o ângulo é $\pi/4$.

Por outro lado o ângulo que b faz com o outro lado do triângulo é igual ao ângulo que o vector b faz com o vector $b-a = (-2,-1,2)$ cujo coseno vale $\frac{<b-a,b>}{\|b-a\|\times\|b\|} = \frac{-1+2+8}{\sqrt{9}\,\sqrt{18}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ logo o ângulo também é $\pi/4$.

1.2 Vamos procurar um vector $n = (x,y,z)$ normal ao plano do triângulo. Para n ser normal a a teremos $x+2y+2z = 0$.

Para n ser normal a b teremos $-x+y+4z = 0$. Como não estamos interessados no comprimento de n podemos fixar $z = 1$ obtendo o sistema $x+2y = -2$ e $-x+y = -4$ cuja solução nos dá $n = (2,-2.1)$.

Assim o plano pretendido passa pela origem $(0,0,0)$ e tem n por vector normal logo a sua equação Cartesiana é $2x-2y+z = 0$.

Como se trata de um plano que passa pela origem é um sub-espaço e uma sua base é dada pelos vectores a e b pois eles são claramente independentes.

1.3 A distância do plano definido pelo ponto $x_0 = (0,0,0)$ e de vector normal $n = (2,-2.1)$ ao ponto $y = (1,1,1)$ é dada por $d = |< n, y-x_0 >|/\|n\| = 1/\sqrt{9} = 1/3$.

2012/2013 - 1º SEMESTRE
TESTE DE ÁLGEBRA LINEAR (1303)
03 de Novembro de 2012

Grupo 2

2.1- Considere as seguintes matrizes:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Sempre que possível calcule:
2.1.1 $AB + C$. [**0.5/20**]
2.1.1 $A + C^T$. [**0.5/20**]
2.1.1 CD. [**0.5/20**]
2.1.1 DD^T. [**0.5/20**]
2.2- Encontre uma matriz A **que satisfaça a seguinte igualdade:**

$$\left(5A^T + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}\right)^T = 3A + \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}^{-1}$$

A matriz que calculou será a única que responde à questão? [**2/20**]
2.3- Considere duas matrizes quadradas inversiveis A **e** B **tais que:**

$$(AB)^{-1} = 2A^{-1}$$

Calcule B. [**2/20**]

Respostas

2.1
2.1.1 A matriz AB é 2×3 logo não pode ser somada com C que é 3×2.

2.1.2 $A + C^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}^T =$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

2.1.3 C é 3×2 logo não pode ser multiplicada por D que é 3×1.

2.1.4 $DD^T = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

2.2 Repare que o primeio membro é dado por

$$\left(5A^T + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}\right)^T = 5A + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}^T = 5A + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

assim teremos $5A + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = 3A + \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}^{-1}$ ou seja

$$A = \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}^{-1} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -2 \end{bmatrix}$$

2.3 $(AB)^{-1} = 2A^{-1}$ implica $B^{-1}A^{--1} = 2A^{-1}$ logo $B^{-1} = 2I$ e portanto $B = \frac{1}{2}I$.

2012/2013 - 1º SEMESTRE
TESTE DE ÁLGEBRA LINEAR (1303)
03 de Novembro de 2012

Grupo 3

3.1- Calcule $\det\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{bmatrix}$ [**2/20**]

3.2- Mostre que se x **e** y **forem vectores-linha** $(1 \times n)$ **arbitrários temos sempre** $\det(x^T y) = 0$. **Sugestão: comeće por observar o que se passa num caso particular, por exemplo, tome** $x = (1,2)$ **e** $y = (3,4)$. **Em seguida ataque o problema geral**. [**3/20**]

3.3- Se $a \neq b$ **forem reais arbitrários determine os valores de** x **para os quais se tem**
$\det\begin{bmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \end{bmatrix} = 0$. [**3/20**]

Respostas

3.1 $\det\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -11 \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = -3$

3.2 Repare que se $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ as linhas da matriz $x^T y$ são os vectores $x_1 y, x_2 y, \ldots, x_n y$ que são proporcionais, logo a matriz $x^T y$ tem o determinante igual a zero.

3.3

$$\det\begin{bmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & a-x & a^2-x^2 \\ 0 & b-x & b^2-x^2 \end{bmatrix} = (a-x)(b^2-x^2) - (b-x)(a^2-x^2) =$$

$$= (a-x)(b-x)(b+x) - (b-x)(a-x)(a+x) = (a-x)(b-x)(b-a)$$

Ora, como $a \neq b$, os únicos valores de x que anulam o determinante são $x = a$ e $x = b$.