2010/2011 - 1º SEMESTRE- 2ª ÉPOCA
EXAME DE ÁLGEBRA LINEAR (1303)
26 de Janeiro de 2011

Grupo 1

1- Para cada uma das seguintes afirmações diga, justificando, se é verdadeira ou falsa.

1.1- $S = \{(x,x,x) : x \in \Re\}$ é um subespaço de $\Re^3$de dimensão 3. [1/20]

1.2- O subespaço de $\Re^3$ gerado por $V = \{(1,2,1),(2,2,1)\}$ é $S = \{(a+2b, 2a+2b, a+b) : a,b \in \Re\}$. [1/20]

1.3- Se P e Q são subespaços de $\Re^3$ e $P \subseteq Q$ então $\dim(P) \leq \dim(Q)$. [1/20]

1.4- Se P e Q são subespaços de $\Re^3$ e $\dim(P) \leq \dim(Q)$ então $P \subseteq Q$. [1/20]

1.5- Se $\{x,y,z\}$ é uma base de $\Re^3$ e w é um vector arbitrário de $\Re^3$ então $\{w+x,y,z\}$ também é uma base de $\Re^3$. [1/20]

Respostas

1.1- Claro que S é um subespaço de $\Re^3$ mas a sua dimensão é 1 e não 3. Uma base de S é o vector $(1,1,1)$.

1.2- Se fizermos todas as combinações lineares dos elementos de V obtemos $a(1,2,1) + b(2,2,1) = (a+2b, 2a+2b, a+b)$ com a e b reais arbitrários. Logo S é o subespaço gerado por V.

1.3- Se $P \subseteq Q$ as bases de Q têm pelo menos tantos vectores quantos os das bases de P logo temos $\dim(P) \leq \dim(Q)$.

1.4- Isto é claramente falso bastando tomar, como contra-exemplo, P como o eixo dos zz e Q como o plano XOY.

1.5- Evidentemente falso. Tome $w = -x$ e recorde que nenhuma base pode conter o vector nulo.

2010/2011 - 1º SEMESTRE- 2ª ÉPOCA
EXAME DE ÁLGEBRA LINEAR (1303)
26 de Janeiro de 2011

Grupo 2

2. Considere o seguinte sistema de equações lineares dependente do parâmetro real θ:

$$x + 2y - z + 5w = \theta$$
$$x + y + z = 5$$
$$x - 2w = 7$$
$$x + y + w = 4$$

2.1- Para que valor(es) de θ o sistema tem soluções? [2/20]

2.2- Para o(s) valor(es) de θ determinado(s) na alinea anterior encontre a solução geral do sistema. [3/20]

Respostas

2.1- Comecemos por calcular o *rank* da matriz aumentada.

$$rank\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 & \theta \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & -2 & 7 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} = rank\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 & \theta \\ 0 & -1 & 2 & -5 & 5-\theta \\ 0 & -2 & 1 & -7 & 7-\theta \\ 0 & -1 & 1 & -4 & 4-\theta \end{bmatrix} =$$

$$rank\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 & \theta \\ 0 & -1 & 2 & -5 & 5-\theta \\ 0 & 0 & -3 & 3 & \theta-3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = rank\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 & \theta \\ 0 & -1 & 2 & -5 & 5-\theta \\ 0 & 0 & -1 & 1 & (\theta-3)/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\theta/3 \end{bmatrix}$$

Logo o sistema só tem soluções se $\theta = 0$, valor que faz com que os *ranks* da matriz do sistema e da matriz aumentada sejam ambos iguais a 3.

2.2- Para $\theta = 0$ prosseguimos a eliminação de Gauss até obter a *forma reduzida em escada por linhas*:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Logo temos o seguinte sistema equivalente:

$$
\begin{aligned}
x - 2w &= 7 \\
y + 3w &= -3 \\
z - w &= 1
\end{aligned}
$$

Temos 3 variáveis básicas (x, y, z) e uma variável livre w. A solução particular que se obtem fazendo $w = 0$ é $(x, y, z, w) = (7, -3, 1, 0)$.

O sistema homógeneo associado é

$$
\begin{aligned}
x - 2w &= 0 \\
y + 3w &= 0 \\
z - w &= 0
\end{aligned}
$$

O espaço nulo tem dimensão 1 e uma sua base é $(x, y, z, w) = (2, -3, 1, 1)$.

Logo a solução geral é

$(x, y, z, w) = (7, -3, 1, 0) + \lambda(2, -3, 1, 1) = (7 + 2\lambda, -3 - 3\lambda, 1 + \lambda, \lambda)$ com λ real arbitrário.

2010/2011 - 1º SEMESTRE- 2ª ÉPOCA
EXAME DE ÁLGEBRA LINEAR (1303)
26 de Janeiro de 2011

Grupo 3

3.1- Verifique que $\det\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} 1 & -0.2 & 0.03 \\ 30 & 2 & -0.2 \\ 100 & -10 & 1 \end{bmatrix}$. [1/20]

3.2- Considere uma matriz , (3×3), $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ e, para $\theta \neq 0$, construa a matriz $B = \begin{bmatrix} a & b\theta^{-1} & c\theta^{-2} \\ d\theta & e & f\theta^{-1} \\ g\theta^2 & h\theta & i \end{bmatrix}$. Repare que é o caso das matrizes da alinea anterior com $\theta = 10$. Mostre que se tem sempre $|A| = |B|$. [2/20]

3.3- Mostre agora que se A for uma matriz $(n \times n)$ e B for obtida de A multiplicando cada um dos seus elementos por θ^{i-j} (com $\theta \neq 0$, i e j designando os indíces de linha e coluna do elemento em questão) então tem-se sempre $|A| = |B|$. [2/20]

Respostas

3.1-

$$\det\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 8 & -11 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} 8 & -11 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = -16 + 11 = -5$$

$$\det\begin{bmatrix} 1 & -0.2 & 0.03 \\ 30 & 2 & -0.2 \\ 100 & -10 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -0.2 & 0.03 \\ 0 & 8 & -1.1 \\ 0 & 10 & -2 \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} 8 & -1.1 \\ 10 & -2 \end{bmatrix} = -5$$

3.2- A resposta à alinea 3.3 engloba esta alinea como caso particular.

3.3- A cada termo de A, $a_{1j_1}a_{2j_2}...a_{nj_n}$, corresponde, em B, o termo $\theta^{1-j_1}a_{1j_1}\theta^{2-j_2}a_{2j_2}...\theta^{n-j_n}a_{nj_n} = \theta^{r-s}a_{1j_1}a_{2j_2}...a_{nj_n}$ com $r = 1+2+...+n$ e $s = j_1 + j_2 + ... + j_n$. Repare agora que a sequência $j_1, j_2, ..., j_n$ é uma permutação da sequência $1, 2, ..., n$ logo temos $r = s$ o que segnifica que os termos de A e de B são os mesmos.

2010/2011 - 1º SEMESTRE- 2ª ÉPOCA
EXAME DE ÁLGEBRA LINEAR (1303)
26 de Janeiro de 2011

Grupo 4

4. Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

4.1- Verifique que A e $C = B^{-1}AB$ têm os mesmos valores próprios. [2/20]

4.2- Agora considere o caso geral de duas matrizes A e B, ambas $(n \times n)$, com $|B| \neq 0$. Mostre que as matrizes A e $C = B^{-1}AB$ têm sempre os mesmos valores próprios. [3/20]

Respostas

4.1- Calculemos os valores próprios de A. O polinómio caracteristico é:

$\det\begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 4-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)(4-\lambda) - 4 = 0$ cujas raizes são 0 e 5.

Para $C = B^{-1}AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$ o polinómio caracteristico é:

$\det\begin{bmatrix} 6-\lambda & 2 \\ -3 & -1-\lambda \end{bmatrix} = (6-\lambda)(-1-\lambda) + 6 = 0$ cujas raizes também são 0 e 5.

4.2- Basta mostrar que A e C têm o mesmo polinómio caracteristico. Com efeito temos:

$|C - \lambda I| = |B^{-1}AB - \lambda B^{-1}IB| = |B^{-1}(A - \lambda I)B| = |B^{-1}| \times |A - \lambda I| \times |B| = |A - \lambda I|$