2009/2010 - 1º SEMESTRE- 2ª ÉPOCA
EXAME DE ÁLGEBRA LINEAR (1303)
22 de Janeiro de 2010

Grupo 1

1- Considere o seguinte sistema de equações lineares nas variáveis x, y, z:

$$x + 3y + z = 1$$
$$-4x - 9y + 2z = -1$$
$$-3y - 6z = -3$$

1.1- Mostre que o sistema tem soluções. [2/20]
1.2- Calcule a solução geral do sistema. [3/20]

Respostas

1.1- Formemos, como é habitual, a matriz aumentada do sistema e calculemos o seu *rank*:

$$rank\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ -4 & -9 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & -6 & -3 \end{bmatrix} = rank\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & 3 \\ 0 & -3 & -6 & -3 \end{bmatrix} = rank\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 2$$

logo, como os *ranks* da matriz original e da matriz aumentada são ambos iguais a 2, o sistema tem soluções.

1.2- Vamos prosseguir a eliminação de Gauss até atingirmos a *forma reduzida em escada por linhas*:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Logo temos o sistema reduzido

$$x - 5z = -2$$
$$y + 2z = 1$$

onde z é uma variável livre sendo uma solução particular $(x, y, z) = (-2, 1, 0)$. O sistema homogénio associado é:

$$x - 5z = 0$$
$$y + 2z = 0$$

e uma base para o espaço vectorial das suas soluções é $(5, -2, 1)$. Assim a solução geral do sistema é:

$$(x, y, z) = (-2, 1, 0) + \lambda(5, -2, 1)$$

com λ real arbitrário.

2009/2010 - 1º SEMESTRE- 2ª ÉPOCA
EXAME DE ÁLGEBRA LINEAR (1303)
22 de Janeiro de 2010

Grupo 2

2- Recorde que uma matriz quadrada U é dita *triângular superior* se $u_{ij} = 0$ para todo o $i > j$, isto é, se todos os seus elementos abaixo da diagonal principal são nulos.

2.**1**- Se A e B forem duas matrizes $(n \times n)$ triângulares superiores mostre que o produto AB também o é. [2/20]

2.**2**- Se A e B forem duas matrizes $(n \times n)$ triângulares superiores quais são os elementos diagonais de AB? E os de BA?. [2/20]

2.**3**- Recorde agora que uma matriz quadrada L é dita *triângular inferior* se $l_{ij} = 0$ para todo o $i < j$. Será que o produto de duas matrizes triângulares inferiores é ainda triângular inferior? [1/20]

Respostas

2.**1**- Os elementos de AB abaixo da diagonal são obtidos fazendo o produto interno da linha i de A pela coluna j de B, $< A_i, B^j >$, para $i > j$.

Como A é triângular superior todos os elementos de A_i que antecedem o $i-ésimo$ elemento são nulos. Como B é triângular superior também são nulos todos os elementos de B^j que se seguem ao $j-ésimo$ elemento.. Ora isto significa que, para $i > j$, todos os produtos internos $< A_i, B^j >$ se anulam e que, portanto, AB também é triângular superior.

2.**2**- O $i-ésimo$ elemento diagonal de AB é obtido fazendo o produto interno da linha i de A pela coluna i de B, $< A_i, B^i >$, para $i = 1, \ldots, n$.

Como A é triângular superior todos os elementos de A_i que antecedem o $i-ésimo$ elemento são nulos. Como B é triângular superior também são nulos todos os elementos de B^i que se seguem ao $i-ésimo$ elemento.. Ora isto significa que todos os produtos internos $< A_i, B^i >$ se resumem ao produto $a_{ii}b_{ii}$ e que, portanto, o $i-ésimo$ elemento diagonal de AB é $a_{ii}b_{ii}$. Este facto implica que os elementos diagonais de AB e BA são os mesmos.

2.**3**- A afirmação é verdadeira. Para o provar pode fazer um raciocínio semelhante ao de 2.1. Em alternativa repare que se $AB = U$, com A, B, U triângulares superiores, então $(AB)^T = U^T$ ou seja $B^TA^T = U^T$ com B^T, A^T, U^T triângulares inferiores.

2009/2010 - 1º SEMESTRE- 2ª ÉPOCA
EXAME DE ÁLGEBRA LINEAR (1303)
22 de Janeiro de 2010

Grupo 3

3- Considere as matrizes $A_1 = [1]$, $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{bmatrix}$, $A_3 = \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{bmatrix}$.

3.1- Calcule os determinantes de A_1e A_2. [1/20]

3.2- Agora mostre (sem recorrer à regra de Sarrus!) que o determinante de A_3 vale $(c-a)(c-b)(b-a)$. Este determinante é conhecido pelo *determinante de Vandermonde* (3×3). [3/20]

Respostas

3.1- É trivial verificar que $\det(A_1) = 1$ e $\det(A_2) = b - a$.

3.2- Para calcular $\det(A_3)$ proceda do seguinte modo:

Primeiro subtraia a primeira linha às duas seguintes obtendo

$$\det(A_3) = \det\begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 \\ 1 & c & c^2 \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 \\ 0 & c-a & c^2-a^2 \end{bmatrix}$$

Agora faça o desenvolvimento de Laplace pela primeira coluna e obterá:

$\det(A_3) = (b-a)(c^2-a^2) - (c-a)(b^2-a^2) = (b-a)(c-a)(c-b)$

2009/2010 - 1º SEMESTRE- 2ª ÉPOCA
EXAME DE ÁLGEBRA LINEAR (1303)
22 de Janeiro de 2010

Grupo 4

4- Considere a matriz $A = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 3 & 8 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ e os vectores
$v_1 = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $w = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

4.1- Mostre que v_1, v_2, v_3 são vectores próprios de A. [1/20]

4.2- Seja x um vector de $\Re^3$. Porque é que têm de existir constantes c_1, c_2, c_3 tais que $x = c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3$? [2/20]

4-3- Imagine agora que x tem componentes não negativas e somando 1, isto é, $x = (x_1, x_2, x_3) \geq (0,0,0)$ e $x_1 + x_2 + x_3 = 1$. Calcule $< w, x >$ e mostre que, neste caso, $c_1 = 1$. [3/20]

Respostas

4.1- $Av_1 = \frac{1}{100}\begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 3 & 8 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{10} \\ \frac{6}{10} \\ \frac{1}{10} \end{bmatrix} = v_1$ logo o valor próprio associado é $\lambda_1 = 1$

$Av_2 = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 3 & 8 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}v_2$ logo o valor próprio associado é $\lambda_2 = 1/2$

$Av_3 = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 3 & 8 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} \\ 0 \\ \frac{1}{5} \end{bmatrix} = \frac{1}{5}v_3$ logo o valor próprio associado é $\lambda_3 = 1/5$

4.2- Como os valores próprios são todos distintos os vectores próprios associados são linearmente independentes e, portanto, formam uma base de $\Re^3$. Consequentemente qualquer $x \in \Re^3$ se escreve, de uma maneira única, na forma $x = c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3$.

4.**3**- Teremos:

$$x = c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3 = c_1 \begin{bmatrix} \frac{3}{10} \\ \frac{6}{10} \\ \frac{1}{10} \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{10}c_1 + c_2 - c_3 \\ \frac{6}{10}c_1 - 3c_2 \\ \frac{1}{10}c_1 + 2c_2 + c_3 \end{bmatrix}$$

Logo $< w, x >= \frac{3}{10}c_1 + c_2 - c_3 + \frac{6}{10}c_1 - 3c_2 + \frac{1}{10}c_1 + 2c_2 + c_3 = c_1$

Por outro lado, como x tem componentes não negativas e somando 1, teremos $< w, x >= 1$. Logo $c_1 = 1$.