2009/2010 -2º SEMESTRE- 2ª ÉPOCA
EXAME DE ÁLGEBRA LINEAR (1303)
16 de Junho de 2010

Grupo 1

1- Considere o conjunto $S \subset \Re^3$ **definido por**:

$$\mathbf{S} = \{(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) \in \mathfrak{R}^3 : \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3 = \mathbf{0}\}$$

1.1- Mostre que S **é um sub-espaço de** $\Re^3$. **Determine a dimensão de** S **exibindo uma base** B **de** S. [**1/20**]

1.2- Qual é o complemento ortogonal, $S^\perp$, **de** S? **Determine a dimensão de** $S^\perp$ **exibindo uma base** $B^\perp$ **de** $S^\perp$. [**2/20**]

1.3- Verifique que $B \cup B^\perp$ **é uma base de** $\Re^3$. **Agora mostre que se** S **for um sub-espaço de** $\Re^n$**se tem sempre** $\dim(S) + \dim(S^\perp) = n$. [**2/20**]

Respostas

1.1- Repare que $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ é a equação de um plano que passa pela origem e de vector normal $v = (1,1,1)$ e, portanto, é um sub-espaço de $\Re^3$ de dimensão 2. Uma base B de S é, por exemplo, $B = \{(1,0,-1),(0,1,-1)\}$.

1.2- $S^\perp$ é o sub-espaço gerado por $v = (1,1,1)$ portanto de dimensão 1. Uma base de $S^\perp$ é, por exemplo, $B^\perp = \{(1,1,1)\}$.

1.3- $B \cup B^\perp = \{(1,0,-1),(0,1,-1),(1,1,1)\}$. Uma vez que este conjunto tem 3 vectores para mostrar que se trata de uma base de $\Re^3$ basta verificar que $B \cup B^\perp$ é linearmente independente. Para tal formemos uma matriz tendo estes 3 vectores como linhas e verifiquemos que o seu determinante não é nulo.

$$\det\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = 3$$

Agora seja S um sub-espaço de $\Re^n$ e suponha que $\dim(S) = k$. Considere uma base ortonormada de S formada pelos vectores $v_1,...,v_k$ e, a partir dela, forme uma base ortonormada de $\Re^n$ $v_1,...,v_k,v_{k+1},...,v_n$. Claramente os vectores $v_{k+1},...,v_n$ estão em $S^\perp$ pois todos eles são ortogonais aos vectores $v_1,...,v_k$ e, portanto, ortogonais a todas as suas combinações lineares. Por outro lado os vectores $v_{k+1},...,v_n$ são linearmente independentes pois são mutuamente ortogonais. Para provar o resultado pretendido basta então mostrar que $Span\{v_{k+1},...,v_n\} = S^\perp$. Por absurdo imagine que existia um $x \in S^\perp$, *diferente do vector nulo*, que não era combinação linear de $v_{k+1},...,v_n$, isto é, que x tem uma componente nula segundo todos estes vectores. Uma vez que x também tem componentes nulas segundo $v_1,...,v_k$, pois é ortogonal a todos estes vectores, isto implicaria que x é o vector nulo o que é absurdo.

2009/2010 -2º SEMESTRE- 2ª ÉPOCA
EXAME DE ÁLGEBRA LINEAR (1303)
16 de Junho de 2010

Grupo 2

2- Considere o seguinte sistema de equações lineares:

$$\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2 = \mathbf{1}$$
$$\mathbf{x}_2+\mathbf{x}_3 = \mathbf{1}$$
$$\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_3 = \mathbf{1}$$

2.1- Mostre que o sistema tem soluções. **Será a solução única**? **Se sim diga porquê e qual**. [**2/20**]

2.2- O sistema anterior tem o segundo membro $(1,1,1)$. **Será que para um segundo membro arbitrário** (b_1,b_2,b_3) **consegue escrever directamente a solução aproveitando apenas os cálculos que já fez para resolver a alinea anterior**? [**3/20**]

Respostas

2.1- Como é usual formamos a matriz aumentada do sistema e calculamos o seu *rank*:

$$rank\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = rank\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = rank\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} = 3$$

logo o sistema tem soluções porque os *ranks* da matriz do sistema e da matriz aumentada são ambos iguais a 3. A solução é única uma vez que a matriz do sistema é (3×3) e tem *rank* 3. Para calcular a solução vamos prosseguir a eliminação até obter a *forma reduzida em escada por linhas*.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Assim a solução única é $(x_1,x_2,x_3) = (1/2,1/2,1/2)$.

2.2- Repare que para resolver o sistema efectuou as seguinte sequência de 5 operações elementares:

(a) multiplicou a 1ª linha por -1 e somou-a à 3ª.
(b) multiplicou a 2ª linha por +1 e somou-a à 3ª.
(c) dividiu a 3ª linha por 2.
(d) multiplicou a 3ª linha por -1 e somou-a à 2ª.
(e) multiplicou a 2ª linha por -1 e somou-a à 1ª.

Repare ainda que todas estas operações são independentes dos valores do segundo membro. Assim, para obter a solução para um segundo membro arbitrário (b_1,b_2,b_3) basta aplicar-lhe esta sequência de operações:

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 - b_1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 - b_1 + b_2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ (b_3 - b_1 + b_2)/2 \end{bmatrix} \to$$

$$\to \begin{bmatrix} b_1 \\ (b_1 - b_3 + b_2)/2 \\ (b_3 - b_1 + b_2)/2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} (b_3 - b_2 + b_1)/2 \\ (b_1 - b_3 + b_2)/2 \\ (b_3 - b_1 + b_2)/2 \end{bmatrix}$$

Logo a solução é:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (b_3 - b_2 + b_1)/2 \\ (b_1 - b_3 + b_2)/2 \\ (b_3 - b_1 + b_2)/2 \end{bmatrix}$$

Se pensar bem vai reparar que aplicar esta sequência de operações ao segundo membro é equivalente a multiplicá-lo pela inversa da matriz do sistema, pois esta sequência de operações elementares transforma a matriz do sistema na identidade!

2009/2010 -2º SEMESTRE- 2ª ÉPOCA
EXAME DE ÁLGEBRA LINEAR (1303)
16 de Junho de 2010

Grupo 3

3- Considere as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 4 \\ 10 & 8 & 7 \end{bmatrix} \text{ e } C = \begin{bmatrix} 10 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Observe que B **pode ser obtida a partir de** A **invertendo a ordem das suas colunas e que** C **pode ser obtida a partir de** A **invertendo a ordem das suas colunas e linhas**.

3.1- Comece por calcular os determinantes de A, B **e** C. [**1/20**]

3.2- Considere agora uma matriz arbitrária A, $(n \times n)$, **e a matriz** B **obtida a partir de** A **invertendo a ordem das suas colunas**. **Relacione** $|A|$ **com** $|B|$. [**2/20**]

3.3- Considere por fim uma matriz arbitrária A, $(n \times n)$, **e a matriz** C **obtida a partir de** A **invertendo a ordem das suas colunas e linhas**. **Relacione** $|A|$ **com** $|C|$. [**2/20**]

Respostas

3.1-

$$\det(A) = \det\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -11 \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = -3$$

Como B é obtida de A trocando a 1ª com a 3ª coluna vem $\det(B) = -\det(A) = 3$

Como C é obtida de B trocando a 1ª com a 3ª linha vem

$$\det(C) = -\det(B) = -3 = \det(A)$$

3.2- Considere agora uma matriz arbitrária A, $(n \times n)$. Para inverter a ordem das suas colunas $\begin{bmatrix} A^1 & A^2 & \cdots & A^{n-1} & A^n \end{bmatrix}$ tem que trocar a primeira com a última (A^1 com A^n), a segunda com a penúltima (A^2 com A^{n-1}), e assim por diante. Se n for *par* fará $k = n/2$ trocas de colunas. Se n for *impar* (como no exemplo da alinea anterior) fará $k = (n-1)/2$ trocas uma vez que a coluna central ficará *fixa*. Assim teremos $\det(B) = (-1)^k \det(A)$, com o valor de k definido anteriormente.

3.3- Repare que o número de trocas de linhas que é necessário efectuar para inverter a ordem das linhas de uma matriz quadrada é igual ao número, k, de trocas de colunas nessesário para inverter a ordem das suas colunas. Assim, se *inverter a ordem das colunas e das linhas* de uma matriz quadrada fará $2k$ trocas de filas paralelas. Como $2k$ é sempre par teremos $\det(C) = \det(A)$.

2009/2010 -2º SEMESTRE- 2ª ÉPOCA
EXAME DE ÁLGEBRA LINEAR (1303)
16 de Junho de 2010

Grupo 4

4- Considere as matrizes reais e simétricas $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ **e** $B = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$.

4.1- Verifique que A, B **e** $A+B$ **são semi-definidas positivas.[2/20]**

4.2- Agora mostre que se A **e** B **são matrizes** $(n \times n)$ **reais, simétricas e semi-definidas positivas então a matriz** $A+B$ **também é real, simétrica e semi-definida positiva. [3/20]**

Respostas

4.1- Calculemos os valores próprios de A: $\det\begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{bmatrix} = (2-\lambda)^2 - 1 = 0$. As raizes são 1 e 3, logo A é definida positiva e, portanto, também semi-definida positiva.

Calculemos os valores próprios de B: $\det\begin{bmatrix} 5-\lambda & 3 \\ 3 & 5-\lambda \end{bmatrix} = (5-\lambda)^2 - 9 = 0$. As raizes são 2 e 8, logo B é definida positiva e, portanto, também semi-definida positiva.

Calculemos os valores próprios de $A+B$: $\det\begin{bmatrix} 7-\lambda & 4 \\ 4 & 7-\lambda \end{bmatrix} = (7-\lambda)^2 - 16 = 0$. As raizes são 3 e 11, logo $A+B$ é definida positiva e, portanto, também semi-definida positiva.

4.2- Claro que se A e B são reais $A+B$ também o é.

Se A e B são simétricas temos $A^T = A$ e $B^T = B$. Como $(A+B)^T = A^T + B^T = A+B$ concluimos que $A+B$ também é simétrica.

Se A é semi-definida positiva temos $x^T A x \geq 0$ para todo o x. Se B é semi-definida positiva temos $x^T B x \geq 0$ para todo o x. Se somarmos, membro a membro, estas desigualdades vem $x^T A x + x^T B x \geq 0$ para todo o x. Mas isto é equivalente a $x^T (A+B) x \geq 0$ para todo o x o que mostra que $A+B$ também é semi-definida positiva.