2010/2011 - 1º SEMESTRE- 1ª ÉPOCA
EXAME DE ÁLGEBRA LINEAR (1303)
7 de Janeiro de 2011
Grupo 1

1- Determine, justificando, quais dos seguintes 5 sub-conjuntos de $\Re^4$ são sub-espaços vectoriais.

1.1- $S_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \Re^4 : x_1 + x_2 = x_4 + x_3\}$. [1/20]

1.2- $S_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \Re^4 : x_1 + x_2 = 1\}$. [1/20]

1.3- $S_3 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \Re^4 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0\}$. [1/20]

1.4- $S_4 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \Re^4 : x_1 = x_2^2\}$. [1/20]

1.5- $S_5 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \Re^4 : x_1 = -x_2, x_4 = x_3\}$. [1/20]

Respostas

1.1- S_1 é o plano de $\Re^4$ que passa pela origem e de vector normal $v = (1, 1, -1, -1)$. É portanto um sub-espaço de $\Re^4$.

1.2- S_2 não contem a origem logo não é sub-espaço.

1.3- S_3 contem apenas a origem logo é sub-espaço.

1.4- S_4 não é fechado para a multipicação por reais. Com efeito $(1, 1, 0, 0) \in S_4$ mas $(10, 10, 0, 0) \notin S_4$. Logo S_4 não é sub-espaço.

1.5- Os vectores de S_5 são da forma $(a, -a, b, b)$ com a e b reais arbitrários. É imediato verificar que este tipo de vectores é fechado para a soma e para a multiplicação por números reais. Logo S_5 é um sub-espaço.

2010/2011 - 1º SEMESTRE- 1ª ÉPOCA
EXAME DE ÁLGEBRA LINEAR (1303)
7 de Janeiro de 2011

Grupo 2

2. Considere $A = \begin{bmatrix} -3 & -8 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -4 \\ 0 & 1 & 5 \\ -1 & -6 & 5 \end{bmatrix}$ e $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$.

2.1- Verifique que se tem $Ax = Bx$.[1/20]

2.2- Use a alinea anterior para descobrir uma matriz (3×3) que contenha x no seu espaço nulo. [3/20]

Respostas

2.1- $$Ax = \begin{bmatrix} -3 & -8 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ 27 \\ 12 \end{bmatrix}$$

$$Bx = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -4 \\ 0 & 1 & 5 \\ -1 & -6 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ 27 \\ 12 \end{bmatrix}.$$

2.2- Como temos $Ax = Bx$ vem $(A - B)x = 0$.

Assim $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$ pertence ao espaço nulo de

$$A - B = \begin{bmatrix} -3 & -8 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 5 & -4 \\ 0 & 1 & 5 \\ -1 & -6 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -13 & 6 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 9 & -4 \end{bmatrix}$$

2010/2011 - 1º SEMESTRE- 1ª ÉPOCA
EXAME DE ÁLGEBRA LINEAR (1303)
7 de Janeiro de 2011

Grupo 3

3.1- Calcule o determinante da matriz $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$. [1/20]

3.2- Mostre que se A for uma matriz (3×3) cujos elementos valem 1 ou -1 (tal como a matriz da alínea anterior) então o seu determinante é sempre um *número inteiro par*. [2/20]

3.3- Será que o resultado anterior continua válido se A for uma matriz $(n \times n)$, com $n > 3$, cujos elementos valem 1 ou -1? [2/20]

Respostas

3.1- $$\det\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} = -4$$

3.3- O determinante de uma matriz (3×3) é a soma dos seus $3! = 6$ termos afectados dos respectivos sinais. Cada uma dessas parcelas vale 1 ou -1. Cada par de parcelas valendo 1 e -1, se existir, pode ser removido da soma. Uma vez removidos todos estes pares de parcelas restarão um número par de parcelas, porque $3! = 6$ é par, todas com o mesmo sinal. Logo o determinante é um número par.

3.3- Se A for uma matriz $(n \times n)$ o raciocínio é o mesmo pois o número de termos, $n!$, é par e cada um deles vale 1 ou -1.

2010/2011 - 1º SEMESTRE- 1ª ÉPOCA
EXAME DE ÁLGEBRA LINEAR (1303)
7 de Janeiro de 2011

Grupo 4

4. Recorde que o *traço* de uma matriz quadrada C, designado por $tr(C)$, é a soma dos seus elementos diagonais. Por exemplo, o traço de $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, é $1 + 3 = 4$. Recorde ainda que uma matriz C diz-se *simétrica* se $C == C^T$.

4.1- Mostre que dadas duas matrizes *simétricas* $(n \times n)$, A e B, temos sempre $tr(AB) = tr(BA)$. (Nota: este resultado é verdadeiro mesmo quando as matrizes não são simétricas mas neste caso particular é mais ”fácil” de fazer a prova) [2/20]

4.2- Calcule os valores próprios de $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ e verifique que a sua soma é igual ao $tr(C)$. [1/20]

4.3- Mostre agora que se C for uma matriz $(n \times n)$ *real e simétrica* o traço de C é sempre igual à soma dos seus valores próprios. (Nota: este resultado é verdadeiro mesmo quando a matriz C não é real e simétrica mas neste caso particular é ”fácil” de provar se usar o facto de se ter $tr(AB) = tr(BA)$ mesmo quando as matrizes A e B não são simétricas). [3/20]

Respostas

4.1- Repare que se A é simétrica a sua linha i é igual à coluna i, isto é temos $A_i = A^i$. Do mesmo modo, sendo B simétrica temos também $B_i = B^i$.

O i-ésimo elemento diagonal de AB é $< A_i, B^i >=< A^i, B_i >=< B_i, A^i >$ que é o i-ésimo elemento diagonal de BA. Isto é, as elementos diagonais de AB são os mesmos que os elementos diagonais de BA, logo $tr(AB) = tr(BA)$.

4.2- O polinómio caracteristico é $\det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 3-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)(3-\lambda) - 4 = 0$ cujas raizes são $\lambda = 2 + \sqrt{5}, \lambda = 2 - \sqrt{5}$.

Claro que temos $tr(C) = 1 + 3 = 4 = 2 + \sqrt{5} + 2 - \sqrt{5}$.

4.3- Se C é real e simétrica é diagonalizável e temos $\Lambda = B^{-1}CB$ onde B é uma matriz cujas colunas são uma base de vectores próprios de C e Λ é uma matriz diagonal contendo, na diagonal, os valores próprios $\lambda_1 ... \lambda_n$ de C.

Temos então $\lambda_1 + ... + \lambda_n = tr(\Lambda) = tr(B^{-1}CB) = tr(BB^{-1}C) = tr(C)$.