

limites notáveis

$$\bullet \lim \left(1 + \frac{k}{x_n}\right)^{x_n} = e^k \quad \text{com } \lim x_n = \pm \infty$$

$$\bullet x_n \rightarrow 0$$

$$\begin{aligned} \lim \frac{\sin(x_n)}{x_n} &= \lim \frac{\arcsin(x_n)}{x_n} = \lim \frac{\operatorname{tg}(x_n)}{x_n} = \lim \frac{\operatorname{arctg}(x_n)}{x_n} \\ &= \lim \frac{e^{x_n} - 1}{x_n} = \lim \frac{\ln(x_n + 1)}{x_n} = 1 \end{aligned}$$

$$\rightarrow \text{sendo } \begin{aligned} x_n &= a_0 n^p + a_1 n^{p-1} + \dots + a_p \\ v_n &= b_0 n^q + b_1 n^{q-1} + \dots + b_q \end{aligned}$$

$$\bullet \lim \frac{x_n}{v_n} = \lim \frac{a_0 n^p}{b_0 n^q}$$

$$\bullet \lim x_n = \lim a_0 n^p$$

$$\bullet \lim \frac{x_n}{\sqrt{v_n}} = \lim \frac{a_0 n^p}{(b_0 n^q)^{1/2}}$$

Nota: Para levantar uma indeterminação do tipo $\sqrt{n^2+1} - n$ multiplica-se ambas as termos da fração pelo conjugado

$$\frac{(\sqrt{n^2+1}-n)(\sqrt{n^2+1}+n)}{\sqrt{n^2+1}+n}$$

Exemplo

$$\lim \frac{2n}{\sqrt{n^2+n-1}} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim \frac{\frac{2n}{n}}{\sqrt{\frac{n^2}{n^2} + \frac{n}{n^2} - \frac{1}{n^2}}} = \lim \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}}} = \frac{2}{\sqrt{1+0-0}} = \frac{2}{1} = 2$$

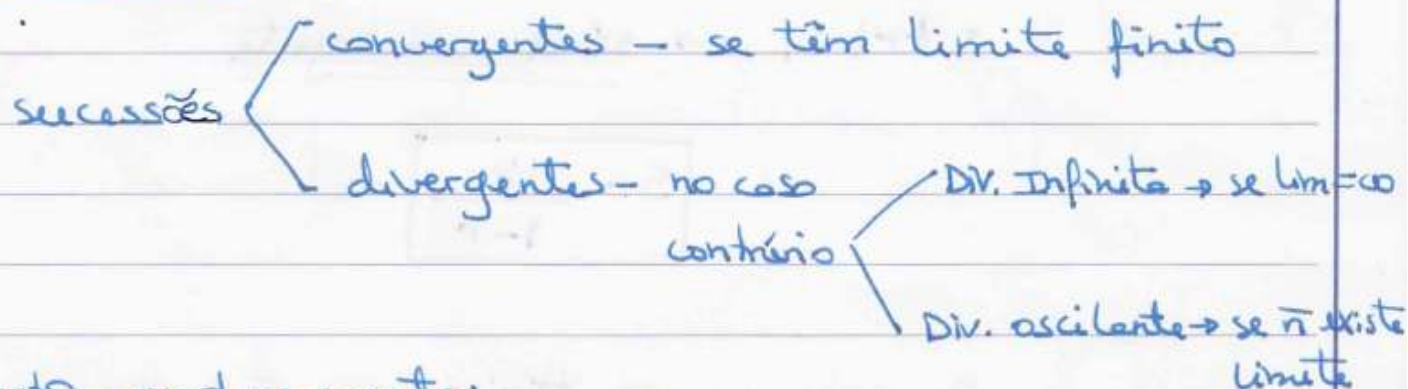
conclusão:

$$\lim \frac{2n}{\sqrt{n^2+n-1}} = \lim \frac{2n}{n}$$

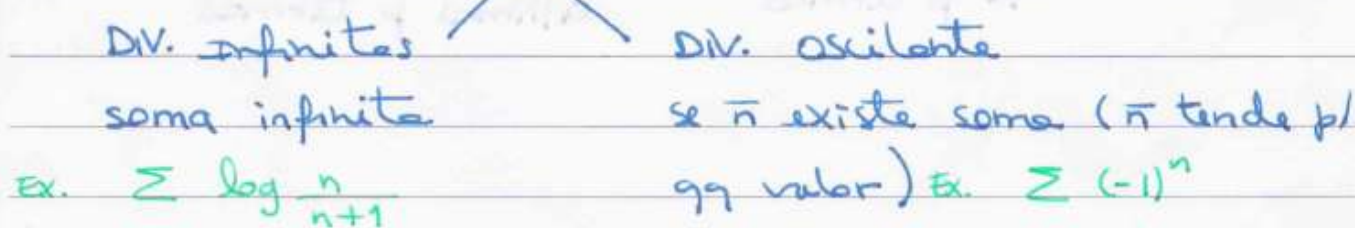
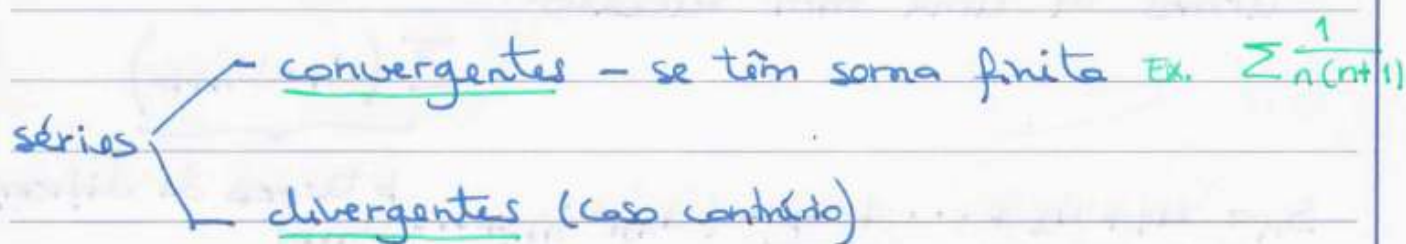
classificação das séries

Uma vez q̄ a soma da série é calculada através do limite de uma sucessão a classificação das séries vai ser feita de um modo análogo ao das classificações das sucessões.

Recordando



ento, analogamente:



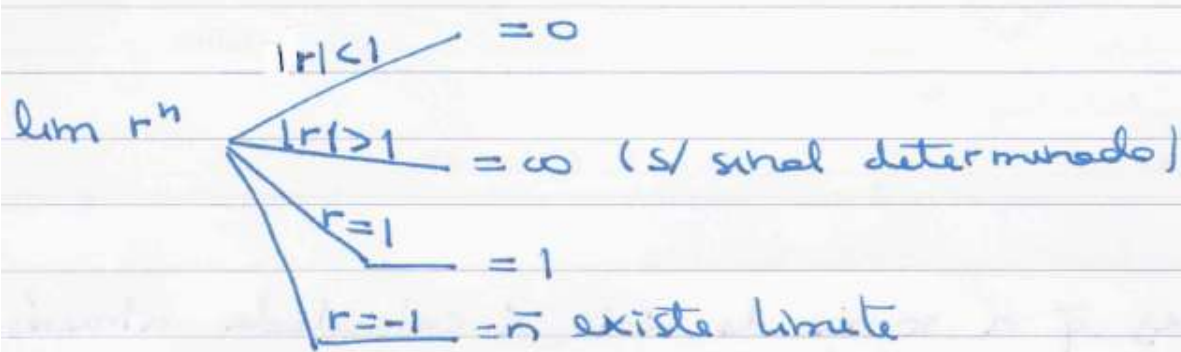
• séries geométricas - \bar{n} é mais do q̄ a soma dos termos de uma progressão geométrica

$$S_n = U_1 \frac{1-r^n}{1-r}$$

soma da série

$$S = \lim S_n = \lim U_1 \frac{1-r^n}{1-r}$$

Para calcular este limite há q calcular $\lim r^n$



concluindo • $|r| > 1 \rightarrow$ série divergente
(pq a soma dá infinito ou pq n tem soma)

• $|r| < 1 \rightarrow$ série convergente

$$S = \frac{U_1}{1-r}$$

↓ soma

• Séries de Mengoli - são séries em q o termo geral da série é dado pela diferença entre dois termos de uma mm sucessão

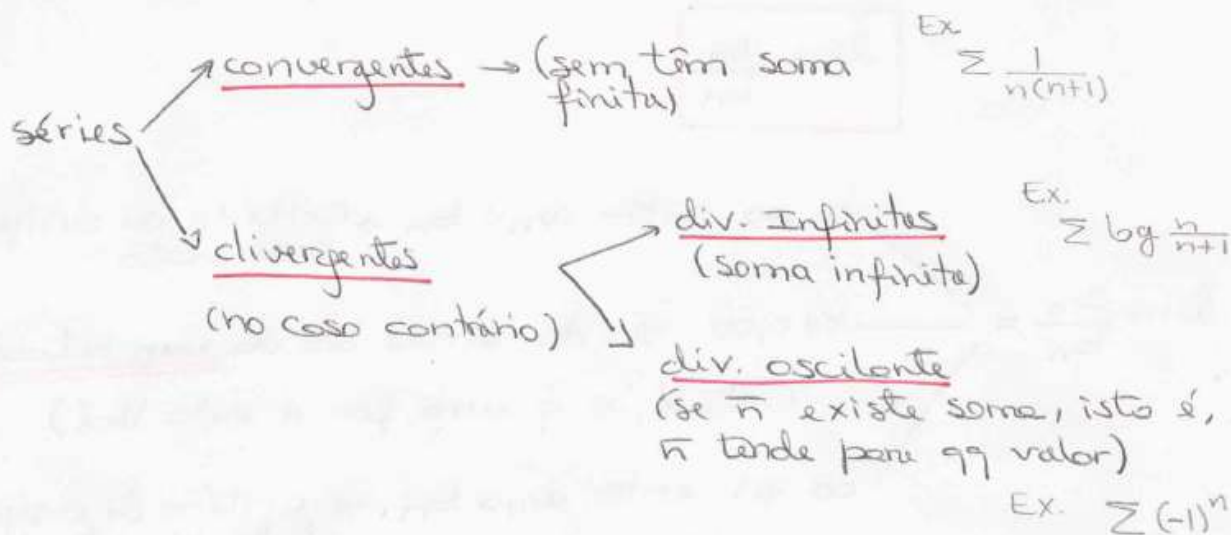
$$\sum (U_n - U_{n+p})$$

$$S_n = \underbrace{u_1 + u_2 + \dots + u_p}_{1^{\text{os}} p \text{ termos}} - \underbrace{(u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{n+p})}_{\text{últimos } p \text{ termos}} \quad \begin{array}{l} p \text{ termos de diferença} \\ \end{array}$$

soma da série

$$S = \lim S_n$$

• Séries Numéricas



É condição necessária de convergência de uma série $\sum u_n$ q o seu termo geral seja um infinitésimo

$$\sum U_n \text{ conv.} \Rightarrow \lim U_n = 0$$

$$\lim U_n \neq 0 \Rightarrow \sum U_n \text{ Diverg.}$$

$$\lim U_n = 0 \Rightarrow \sum U_n ? \text{ nada se pode concluir}$$

→ critério I - critério de comparação - sob a forma de desigualdade

Dadas duas séries de termos $\sum a_n$ e $\sum b_n$ não negativos:

Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ não negativos:

Se $a_n \leq b_n$

- $\sum a_n \text{ Div} \Rightarrow \sum b_n \text{ Div}$
- $\sum a_n \text{ conv.} \Rightarrow \sum b_n ?$
- $\sum b_n \text{ Div} \Rightarrow \sum a_n ?$
- $\sum b_n \text{ conv.} \Rightarrow \sum a_n \text{ conv.}$

Nota: nada se pode concluir para as setas azuis.

Para $\sum b_n \text{ conv.} \Rightarrow \sum a_n \text{ conv.}$, se $\sum b_n = \text{valor finito}$.

→ Critério II - critério de comparação - sob a forma de quociente

Dadas duas séries positivas $\sum a_n$ e $\sum b_n$ calcula-se

$$\lim \frac{a_n}{b_n}$$

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \begin{cases} 0 \Leftrightarrow \text{Então } a_n < b_n \rightarrow \text{Critério de desigualdade visto} \\ k \neq 0, \infty \Rightarrow \text{As séries são de mesma natureza (isto é, o q uma for a outra tb é)} \\ \infty \Leftrightarrow \text{então } a_n > b_n \rightarrow \text{critério de desigualdade já visto} \end{cases}$$

Do conceito de limite vem q $\lim \frac{a_n}{b_n} = k \Leftrightarrow$

$$k - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < k + \varepsilon$$

↓
infinitésimo

$$k - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} \Leftrightarrow (k - \varepsilon) b_n < a_n$$

(o denominador é positivo)
pelo q, por ex. $\sum a_n \text{ conv.} \Rightarrow$
 $\Rightarrow \sum (k - \varepsilon) b_n \text{ conv.} \Rightarrow \sum b_n \text{ conv.}$

...

- série de Dirichlet

$$\sum \frac{1}{n^\alpha} \begin{cases} \alpha \leq 1 & \text{DIV} \\ \alpha > 1 & \text{conv.} \end{cases}$$

- série de Bertrand

$$\sum \frac{1}{n^\alpha (\log n)^\beta} \begin{cases} \alpha < 1 & \text{DIV} \\ \alpha = 1 & \begin{cases} \beta \leq 1 & \text{DIV.} \\ \beta > 1 & \text{conv.} \end{cases} \\ \alpha > 1 & \text{conv.} \end{cases}$$

• No caso geral qdo tiver:

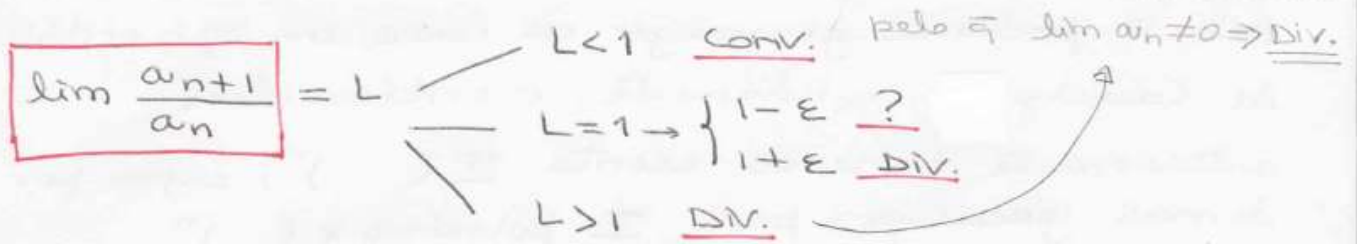
$$\sum \frac{\text{Polinómio de grau } K}{\text{Polinómio de grau } R} \text{ compara-se c/ } \sum \frac{1}{n^{R-K}}$$

→ critério III - **critério de D'Alembert** -

Este critério é "auto-suficiente" isto é, n precisa de comparar com qq outra série

consiste em calcular

• se $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \Leftrightarrow$
 $a_{n+1} > a_n$ então os termos são crescentes



será fundamentalmente utilizado em casos em q o termo geral da série seja um produto de n valores.

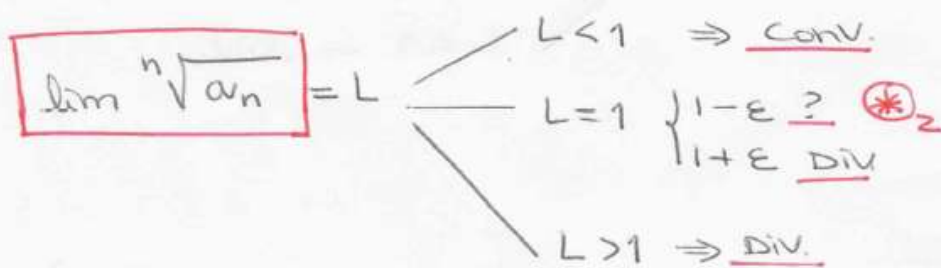
- \sum exponenciais
- \sum factoriais

de outros produtos

→ critério IV - **critério de Cauchy** -

seja a série de termos positivos $\sum a_n$

O critério de Cauchy é, como o critério de D'Alembert, um critério "auto-suficiente" isto é, utiliza unicamente o termo geral da série e consiste em calcular:



Atendendo ao limite a calcular deve ser, mediante q o critério é indicado qdo a série é do tipo $\sum ()^n$ pois ao calcular $\lim \sqrt[n]{a_n}$ o índice do radical e o expoente do termo geral "contam" obtendo-se um limite simples.

Das teoremas sobre limites de sucessões é possível provar
q $\lim \sqrt[n]{\text{polinómio}} = 1$, isto é'

$$\lim \sqrt[n]{2n^2 + 5n + 3} = 1$$

pelos q podemos generalizar as casas em q o critério
de Cauchy é', nitidamente, o critério ideal
anteriormente tinhamos escrito $\sum ()^n$, agora po-
demos generalizar para $\sum \text{polinómio} \times ()^n$

Voltemos ao critério de Cauchy

O q fazer no caso \otimes_2 ? \rightarrow Aplique-se a condição
necessária de convergência
isto é', se $\lim a_n = 0$

Recorde-se q dada a série $\sum a_n$ se $\lim a_n \neq 0 \Rightarrow \text{DIV}$
se $\lim a_n = 0$ nada
se pode concluir

Exemplo:

$$\sum \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n \quad \lim \sqrt[n]{\underbrace{\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n}_{a_n}} = \lim \frac{n+1}{n+2} = 1 - \varepsilon ?$$

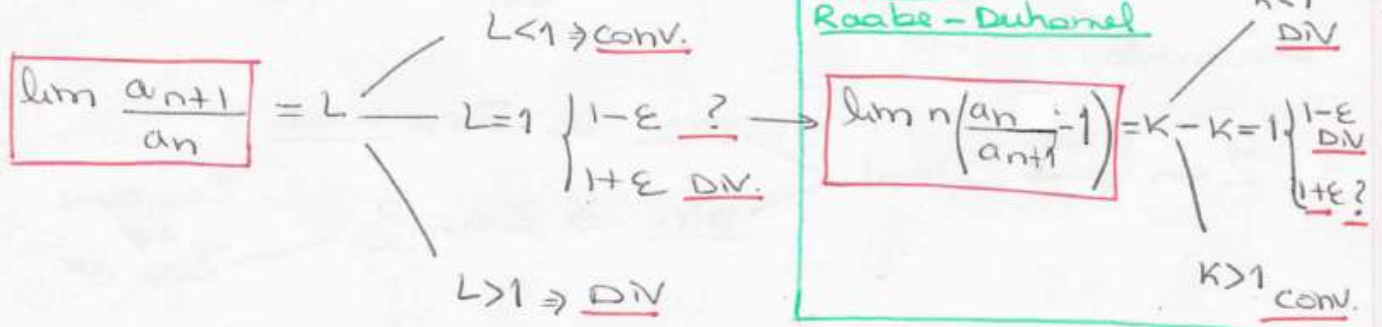
Estude-se o termo geral da série

$$\begin{aligned} \lim \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n &= \lim \left(1 - \frac{1}{n+2}\right)^n = \lim \left[1 + \frac{-1}{n+2}\right]^{\frac{n}{n+2}} \\ &= e^{-1} = \frac{1}{e} \neq 0 \Rightarrow \text{DIV} \end{aligned}$$

Resumidamente:

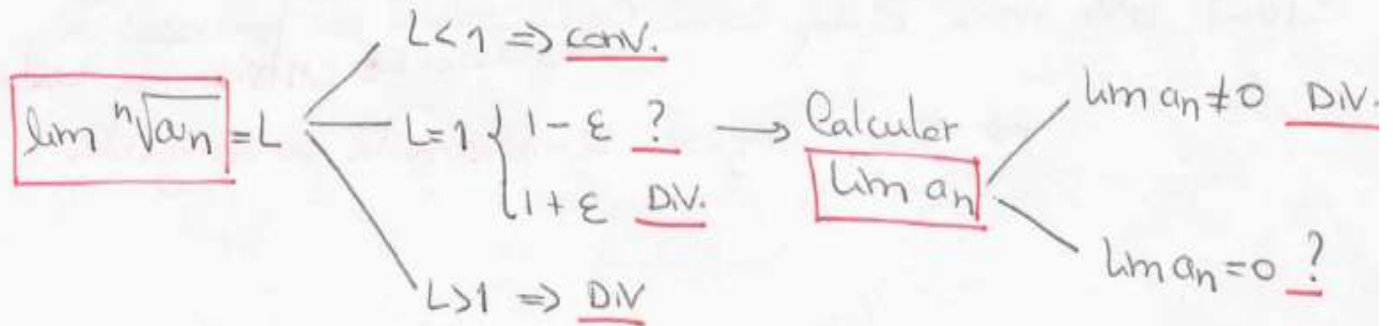
- critério de D'Alembert

$\sum a_n$ ATENÇÃO: ESTE NÃO SAI!



- critério de Cauchy

$\sum a_n$



• séries de termos negativos

Seja $\sum a_n$ com $a_n < 0$

aplicando-se os critérios já vistos para as séries de termos positivos à série $\sum (-a_n)$

- se a série $\sum (-a_n)$ for DIV. (soma = ∞) a série dada $\sum a_n$ é DIV. (soma = $-\infty$)

- se a série $\sum (-a_n)$ for conv. (soma = valor finito = K) a série $\sum a_n$ é conv. (soma = valor finito = $-K$).

• séries de termos positivo-negativos

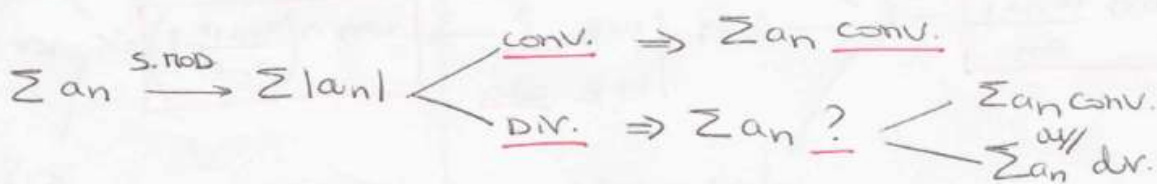
Dada uma série de termos positivo-negativos $\sum a_n$ formar-se a série modular (série dos módulos) $\sum |a_n|$

Teorema se: $\sum |a_n|$ conv. $\Rightarrow \sum a_n$ conv.

$\sum |a_n|$ div. $\Rightarrow \sum a_n$?

Uma vez q $a_n \leq |a_n|$, pois em valor absoluto a soma $\sum a_n$ será sempre menor q a soma $\sum |a_n|$.

Determinando:



$\sum |a_n|$ conv. $\Rightarrow \sum a_n$ diz-se **absolutamente convergente**

$\sum |a_n|$ DIV. mas $\sum a_n$ conv. (detectável por processos a estudar) \rightarrow **critério de Leibniz** \otimes_3
 $\Rightarrow \sum a_n$ diz-se **simplesmente convergente**

→ séries alternadas

são séries da forma $\sum (-1)^n a_n$ ou $\sum (-1)^{n+1} a_n$ c/ $a_n > 0$
↓ ↓
termos pares positivos termos ímpares positivos

os termos são alternados/ positivos e negativos:

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots$$

*₃ — critério de Leibniz — (séries alternadas)

Dada a série $\sum (-1)^n a_n$ ($a_n > 0$)

se a_n é decrescente e $\lim a_n = 0$ a série é conv.

— séries funcionais —

$$\sum a_n(x)$$

Ex.:

$$\sum x^n = x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots$$

— Dada uma série funcional se atribuirmos valores a x obtemos diferentes séries numéricas

Assim numa série funcional o \bar{x} se pretende e' determinar o — domínio de convergência da série —



o conjunto de valores de x p/ os quais a série é convergente

Dada a série funcional $\sum a_n(x)$ considera-se a série modular $\sum |a_n(x)|$

Aplicando o critério de D'Alembert (por ex.) :
(ou Cauchy conforme o caso)

$$\lim \frac{|a_{n+1}(x)|}{|a_n(x)|} = \varphi(x)$$

se $\varphi(x) < 1$ conv. (absolutamente pq é a série modular)

Resolvendo a inequação ir-se-d obter: $a < x < b$

intervalo de convergência



Há q ir estudar a série ^{inicial} nestes pontas p/ saber se a série é convergente ou divergente em $x=a$ e $x=b$.

Exemplo $\sum \frac{x^n}{n} \xrightarrow{\text{S.FOD}} \sum \frac{|x|^n}{n}$

crit. Cauchy $\lim \sqrt[n]{\frac{|x|^n}{n}} = |x|$

$|x| < 1 \Leftrightarrow x < 1 \wedge x > -1 \Leftrightarrow \boxed{-1 < x < 1}$
intervalo de convergência

$x=1: \sum \frac{x^n}{n} \rightarrow \sum \frac{1}{n} \underline{\underline{\text{Div}}}$

$x=-1: \sum \frac{(-1)^n}{n} \xrightarrow{\text{S.FOD}} \sum \frac{1}{n} \text{ Div}$

critério de Leibniz
 $\frac{1}{n}$ decresce \Rightarrow Conv.
 $\lim \frac{1}{n} = 0$
(simp. conv.)

Logo, o domínio de convergência será: $-1 < x < 1$

Assim a passagem do intervalo de convergência p/ o domínio de convergência consiste unicamente em estudar se o intervalo é aberto ou fechado.

— série de Mac-Laurin —

Em particular se o desenvolvimento é feito no ponto $x=0$ ($a=0$) virá:

$$f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f'''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \dots$$

Veja um exemplo:

a) Desenvolva em série de Mac-Laurin a função $f(x) = e^x$

$$f(x) = e^x \rightarrow f(0) = 1$$

$$f'(x) = e^x \rightarrow f'(0) = 1$$

$$f''(x) = e^x \rightarrow f''(0) = 1$$

$$\vdots$$
$$f^{(n)}(x) = e^x \rightarrow f^{(n)}(0) = 1$$

substituindo:

$$\text{então } e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

no domínio?

$$\sum \frac{x^n}{n!} \xrightarrow{\text{S. RAB}} \sum \frac{|x|^n}{n!} \rightarrow \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{|x|^n}{n!}} =$$

$$= \lim \frac{|x|^{n+1} n!}{|x|^n \cdot (n+1)!} = |x| \lim \frac{1}{n+1} = 0 < 1 \text{ sempre conv. } (\Leftrightarrow)$$

$$-\infty < x < +\infty$$

b) Desenvolva em série de Mac-Laurin $f(x) = \log(1+x)$

$$f(x) = \log(1+x) \rightarrow f(0) = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} \rightarrow f'(0) = 1$$

$$f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} \rightarrow f''(0) = -1$$

$$f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3} \rightarrow f'''(0) = 2$$

$$f^{IV}(x) = -\frac{6}{(1+x)^4} \rightarrow f^{IV}(0) = -6$$

...

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} \frac{(n-1)!}{(1+x)^n} \rightarrow f^{(n)}(0) = (-1)^{n+1} (n-1)!$$

e substituindo vem:

$$\log(1+x) = 0 + x \cdot 1 + \frac{x^2}{2}(-1) + \frac{x^3}{3!} \cdot 2 + \dots + \frac{x^n}{n!} (-1)^{n+1} (n-1)! + \dots$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \dots$$

$$\sum (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \xrightarrow{\text{s.rod}} \sum \frac{|x|^n}{n} \rightarrow \lim^n \sqrt[n]{\frac{|x|^n}{n}} = |x|$$

$$|x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$$

$$x = 1 \rightarrow \sum \frac{(-1)^{n+1}}{n} \xrightarrow{\text{s.rod}} \sum \frac{1}{n} \text{ Div} \quad \begin{array}{l} \text{critério de Leibniz} \\ \frac{1}{n} \text{ decresce} \\ \lim \frac{1}{n} = 0 \end{array} \Rightarrow \underline{\underline{\text{Conv}}}$$

$$x = -1 \rightarrow \sum \frac{(-1)^{n+1} (-1)^n}{n} = \sum \frac{(-1)^{2n+1}}{n} = \sum \frac{1}{n} \cdot \underbrace{(-1)^{2n}}_1 = -\sum \frac{1}{n} \quad \underline{\underline{\text{Div}}}$$

e o desenvolvimento é válido para $\underline{\underline{-1 < x < 1}}$

- Desenvolvimento do Binômio -

$$f(x) = (1+x)^k \quad k \in \mathbb{R}$$

$$f'(x) = k(1+x)^{k-1} \quad f'(0) = k$$

$$f''(x) = k(k-1)(1+x)^{k-2} \quad f''(0) = k(k-1)$$

...

$$f^n(x) = k(k-1) \dots (k-n+1)(1+x)^{k-n} \quad f^n(0) = k(k-1) \dots (k-n+1)$$

$$(1+x)^k = 1 + kx + \frac{k(k-1)}{2} x^2 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!} x^3 + \dots + \frac{k(k-1) \dots (k-n+1) x^n}{n!} + \dots$$

$$\text{INT. CONV.} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{k(k-1) \dots (k-n+1)(k-n)}{(n+1)!}}{\frac{k(k-1) \dots (k-n+1)}{n!}} \frac{|x|^{n+1}}{|x|^n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|k-n|}{n+1} |x| = |x| \quad \text{Conv.} \quad -1 < x < 1$$

A conv. ou div. em $x = \pm 1$ depende do valor de k .

Conclusões dos desenvolvimentos em série com a verificação de um recesso extremamente importante

- $\text{sen } x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots \quad -\infty < x < +\infty$
- $\text{cos } x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots \quad -\infty < x < +\infty$
- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad -\infty < x < +\infty$