Limites notáveis

- $\lim \left(1+\frac{K}{u_n}\right)^{u_n} = e^K$ com $\lim u_n = \pm\infty$

- $u_n \to 0$

$$\lim \frac{\operatorname{sen}(u_n)}{u_n} = \lim \frac{\operatorname{arcsen}(u_n)}{u_n} = \lim \frac{\operatorname{tg}(u_n)}{u_n} = \lim \frac{\operatorname{arctg}(u_n)}{u_n}$$

$$= \lim \frac{e^{u_n}-1}{u_n} = \lim \frac{\ln(u_n+1)}{u_n} = 1$$

→ sendo $u_n = a_0 n^p + a_1 n^{p-1} + \cdots + a_p$ e
$v_n = b_0 n^q + b_1 n^{q-1} + \cdots + b_q$

- $\lim \frac{u_n}{v_n} = \lim \frac{a_0 n^p}{b_0 n^q}$

- $\lim u_n = \lim a_0 n^p$

- $\lim \frac{u_n}{\sqrt{v_n}} = \lim \frac{a_0 n^p}{(b_0 n^q)^{1/2}}$

Nota: Para levantar uma indeterminação do tipo $\sqrt{n^2+1} - n$ multiplica-se ambos os termos da fracção pelo conjugado

$$\frac{(\sqrt{n^2+1}-n)(\sqrt{n^2+1}+n)}{\sqrt{n^2+1}+n}$$

Exemplo

$$\lim \frac{2n}{\sqrt{n^2+n-1}} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim \frac{\frac{2n}{n}}{\sqrt{\frac{n^2}{n^2}+\frac{n}{n^2}-\frac{1}{n^2}}} = \lim \frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}} = \frac{2}{\sqrt{1+0-0}} = \frac{2}{1} = 2$$

Conclusão:

$$\lim \frac{2n}{\sqrt{n^2+n-1}} = \lim \frac{2n}{n}$$

classificação das séries

Uma vez q̄ a soma da série é calculada através do limite de uma sucessão a classificação das séries vai ser feita de um modo análogo ao da classificação das sucessões.

Recordando

sucessões
- convergentes – se têm limite finito
- divergentes – no caso contrário
  - Div. Infinita → se $\lim = \infty$
  - Div. oscilante → se n̄ existe limite

então, analogamente:

séries
- **convergentes** – se têm soma finita Ex. $\sum \frac{1}{n(n+1)}$
- **divergentes** (caso contrário)
  - Div. infinitas: soma infinita. Ex. $\sum \log \frac{n}{n+1}$
  - Div. oscilante: se n̄ existe soma (n̄ tende p/ qq valor) Ex. $\sum (-1)^n$

. séries geométricas – n̄ é mais do q̄ a soma dos termos de uma progressão geométrica

$S_n = U_1 \frac{1-r^n}{1-r}$ soma da série $\boxed{S = \lim S_n = \lim U_1 \frac{1-r^n}{1-r}}$

Para calcular este limite há q̄ calcular $\lim r^n$

$$\lim r^n \begin{cases} |r|<1 & = 0 \\ |r|>1 & = \infty \text{ (s/ sinal determinado)} \\ r=1 & = 1 \\ r=-1 & = \bar{n} \text{ existe limite} \end{cases}$$

concluindo
- $|r| \geq 1 \rightarrow$ série divergente
  (pq a soma dá infinito ou pq n̄ tem soma)
- $|r| < 1 \rightarrow$ série convergente

$$\boxed{S = \frac{u_1}{1-r}} \quad \text{soma}$$

- Séries de Mengoli – são séries em q̄ o termo geral da série é dado pela diferença entre dois termos de uma mm sucessão

$$\sum \underbrace{(u_n - u_{n+p})}_{p \text{ termos de diferença}}$$

$$S_n = \underbrace{u_1 + u_2 + \cdots + u_p}_{1^{os}\ p \text{ termos}} - \underbrace{(u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots u_{n+p})}_{\text{últimos } p \text{ termos}}$$

soma da série $\quad S = \lim S_n$

• Séries Númenicas

- séries
  - **convergentes** → (se m têm soma finita) — Ex. $\sum \frac{1}{n(n+1)}$
  - **divergentes** (no caso contrário)
    - **div. Infinitas** (soma infinita) — Ex. $\sum \log \frac{n}{n+1}$
    - **div. oscilante** (se ñ existe soma, isto é, ñ tende para qq valor) — Ex. $\sum (-1)^n$

É condição necessária de convergência de uma série $\sum u_n$ q̄ o seu termo geral seja um infinitésimo

$$\boxed{\sum U_n \text{ conv.} \Rightarrow \lim U_n = 0}$$

$\lim U_n \neq 0 \Rightarrow \sum U_n$ Diverg.

$\lim U_n = 0 \Rightarrow \sum U_n$? nada se pode concluir

→ critério I – **critério de comparação** – sob a forma de desigualdade

Dadas duas séries de termos não negativos: $\boxed{\sum a_n \text{ e } \sum b_n}$

Se $\boxed{a_n \leq b_n}$

$\sum a_n = \infty$

$\sum a_n$ Div $\Rightarrow \sum b_n$ Div

$\sum a_n$ conv. $\Rightarrow \sum b_n$?
$\sum b_n$ Div $\Rightarrow \sum a_n$?) nada se pode concluir

$\sum b_n$ conv. $\Rightarrow \sum a_n$ conv.

$\sum b_n =$ valor finito

→ Critério II – Critério de comparação – sob a forma de quociente

Dadas duas séries positivas $\sum a_n$ e $\sum b_n$ calcula-se

$$\boxed{\lim \frac{a_n}{b_n}}$$

$\lim \frac{a_n}{b_n} =$

- $0 \Leftrightarrow$ Então $a_n < b_n$ → Critério de desigualdade visto
- $K \neq 0, \infty \Rightarrow$ As séries são da mesma natureza (isto é, o q uma for a outra tb é)
- $\infty \Leftrightarrow$ então $a_n > b_n$ → critério de desigualdade já visto

Do conceito de limite vem q $\lim \frac{a_n}{b_n} = K \Leftrightarrow$

$K - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < K + \varepsilon$
$\downarrow$
infinitésimo

$K - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} \Leftrightarrow (K-\varepsilon) b_n < a_n$
(o denominador é positivo)

pelo q, por ex. $\sum a_n$ conv $\Rightarrow$
$\Rightarrow \sum (K-\varepsilon) b_n$ conv. $\Rightarrow \sum b_n$ conv.

...

– série de Dirichlet

$$\boxed{\sum \frac{1}{n^\alpha}} \begin{cases} \alpha \leq 1 & \text{DIV} \\ \alpha > 1 & \text{CONV.} \end{cases}$$

– Série de Bertrand

$$\boxed{\sum \frac{1}{n^\alpha (\log n)^\beta}} \begin{cases} \alpha < 1 & \text{DIV} \\ \alpha = 1 & \begin{cases} \beta \leq 1 & \text{DIV.} \\ \beta > 1 & \text{CONV.} \end{cases} \\ \alpha > 1 & \text{CONV.} \end{cases}$$

• No caso geral qdo tiver:

$\sum \frac{\text{Polinómio de grau } K}{\text{Polinómio de grau } R}$ compara-se c/ $\boxed{\sum \frac{1}{n^{R-K}}}$

→ critério III - critério de D'Alembert -

Este critério é "auto-suficiente" isto é, ñ precisa de comparar com qq outra série

Consiste em calcular

$$\boxed{\lim \frac{a_{n+1}}{a_n}} = L \begin{cases} L<1 & \underline{\text{Conv.}} \\ L=1 \to \begin{cases} 1-\varepsilon & \underline{?} \\ 1+\varepsilon & \underline{\text{Div.}} \end{cases} \\ L>1 & \underline{\text{Div.}} \end{cases}$$

• se $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \Leftrightarrow a_{n+1} > a_n$ então os termos são crescentes pelo q $\lim a_n \neq 0 \Rightarrow \underline{\text{Div.}}$

será fundamentalmente utilizado em casos em q o termo geral da série seja um produto de n valores. $\begin{cases} \text{"}\Sigma \text{ exponenciais"} \\ \Sigma \text{ factoriais} \end{cases}$ ou outros produtos

→ critério IV - Critério de Cauchy -

Seja a série de termos positivos Σa_n
O critério de Cauchy é, como o critério de D'Alembert, um critério "auto-suficiente" isto é, utiliza unicamente o termo geral da série e consiste em calcular:

$$\boxed{\lim \sqrt[n]{a_n}} = L \begin{cases} L<1 \Rightarrow \underline{\text{Conv.}} \\ L=1 \begin{cases} 1-\varepsilon & \underline{?} \;\; (*)_2 \\ 1+\varepsilon & \underline{\text{Div}} \end{cases} \\ L>1 \Rightarrow \underline{\text{Div.}} \end{cases}$$

Atendendo ao limite a calcular deve ser imediato q o critério é indicado qdo a série é do tipo $\Sigma(\;)^n$ pois ao calcular $\lim \sqrt[n]{a_n}$ o índice do radical e o expoente do termo geral "cortam" obtendo-se um limite simples.

Dos teoremas sobre limites de sucessões é possível provar q $\boxed{\lim \sqrt[n]{\text{polinómio}} = 1}$, isto é

$$\lim \sqrt[n]{2n^2+5n+3} = 1$$

pelo q podemos generalizar os casos em q o critério de Cauchy é, nitidamente, o critério ideal

anteriormente tinhamos escrito $\Sigma (\quad)^n$, agora podemos generalizar para Σ polinómio $\times (\quad)^n$

Voltemos ao critério de Cauchy

o q fazer no caso $*_2$? → Aplica-se a condição necessária de convergência isto é, se $\boxed{\lim a_n = 0}$

Recorde-se q dada a série Σa_n se $\lim a_n \neq 0 \Rightarrow$ DIV
se $\lim a_n = 0$ nada se pode concluir

Exemplo:

$$\sum \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n \qquad \lim \sqrt[n]{\underbrace{\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n}_{a_n}} = \lim \frac{n+1}{n+2} = 1 - \varepsilon \,?$$

Estude-se o termo geral da série

$$\lim \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n = \lim \left(1 - \frac{1}{n+2}\right)^n = \lim \left[\left(1 + \frac{-1}{n+2}\right)^{n+2}\right]^{\frac{n}{n+2}} =$$

$$= e^{-1} = \frac{1}{e} \neq 0 \Rightarrow \underline{\text{DIV}}$$

Resumidamente:

- Critério de D'Alembert $\sum a_n$

ATENÇÃO: ESTE NÃO SAI!

$$\boxed{\lim \frac{a_{n+1}}{a_n}} = L$$

- $L<1 \Rightarrow$ CONV.
- $L=1$
  - $1-\varepsilon$?
  - $1+\varepsilon$ DIV.
- $L>1 \Rightarrow$ DIV

→ Critério Raabe-Duhamel

$$\boxed{\lim n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)} = K$$

- $K<1$ DIV
- $K=1$
  - $1-\varepsilon$ DIV
  - $1+\varepsilon$?
- $K>1$ CONV.

- Critério de Cauchy $\sum a_n$

$$\boxed{\lim \sqrt[n]{a_n}} = L$$

- $L<1 \Rightarrow$ CONV.
- $L=1$
  - $1-\varepsilon$?
  - $1+\varepsilon$ DIV.
- $L>1 \Rightarrow$ DIV

→ Calcular $\boxed{\lim a_n}$

- $\lim a_n \neq 0$ DIV.
- $\lim a_n = 0$?

- Séries de termos negativos

Seja $\sum a_n$ com $a_n<0$

aplicando-se os critérios já vistos para as séries de termos positivos à série $\sum(-a_n)$

- se a série $\sum(-a_n)$ for DIV (soma $=\infty$) a série dada $\sum a_n$ é DIV. (soma $=-\infty$)

- se a série $\sum(-a_n)$ for conv. (soma = valor finito $=K$) a série $\sum a_n$ é conv. (soma = valor finito $=-K$).

- Séries de termos positivo-negativos

Dada uma série de termos positivo-negativos $\sum a_n$ forma-se a série modular (série dos módulos) $\sum|a_n|$

Teorema se: $\sum|a_n|$ conv. $\Rightarrow \sum a_n$ conv.

$\sum|a_n|$ div. $\Rightarrow \sum a_n$?

Uma vez q $a_n \leq |a_n|$, pois em valor absoluto a soma $\sum a_n$ será sempre menor q a soma $\sum|a_n|$.

Resumindo:

$$\sum a_n \xrightarrow{\text{S. MOD}} \sum|a_n| \begin{cases} \text{conv.} \Rightarrow \sum a_n \text{ conv.} \\ \text{DIV.} \Rightarrow \sum a_n \;? \begin{cases} \sum a_n \text{ conv.} \\ \text{ou} \\ \sum a_n \text{ div.} \end{cases} \end{cases}$$

$\sum|a_n|$ conv. $\Rightarrow \sum a_n$ diz-se **absolutamente convergente**

$\sum|a_n|$ DIV. mas $\sum a_n$ conv. (detectável por processos a estudar) → critério de Leibniz (*)3

$\Rightarrow \sum a_n$ diz-se **simplesmente convergente**

→ séries alternadas

são séries da forma $\underbrace{\sum (-1)^n a_n}_{\substack{\downarrow \\ \text{termos pares positivos}}}$ ou $\underbrace{\sum (-1)^{n+1} a_n}_{\substack{\downarrow \\ \text{termos ímpares positivos}}}$ c/ $a_n > 0$

os termos são alternada/ positivos e negativos :

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots$$

(*)$_3$ — critério de Leibniz — (séries alternadas)

Dada a série $\sum (-1)^n a_n$ $(a_n > 0)$

se a_n é decrescente e $\lim a_n = 0$ a $\boxed{\text{série é conv}}$.

— Séries funcionais —

$\boxed{\sum a_n(x)}$

Ex.:

$$\sum x^n = x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots$$

- Dada uma série funcional se atribuirmos valores a x obtemos diferentes séries numéricas

Assim numa série funcional o q se pretende é determinar o — Domínio de convergência da série —

↓

o conjunto de valores de x p/ os quais a série é convergente

Dada a série funcional $\sum a_n(x)$ considera-se a série modular

$$\sum |a_n(x)|$$

Aplicando o critério de D'Alembert (por ex.) :
(ou Cauchy conforme o caso)

$$\lim \frac{|a_{n+1}(x)|}{|a_n(x)|} = \varphi(x)$$

se $\boxed{\varphi(x) < 1}$ conv. (absolutamente pq é a série modular)

$\downarrow$

Resolvendo a inequação ir-se-á obter : $\underbrace{a < x < b}$

Intervalo de convergência

DIV. | CONV. | DIV

a $\quad$ b

Há q ir estudar a série inicial nestes pontos p/ saber se a série é convergente ou divergente em $x = a$ e $x = b$.

Exemplo $\quad \sum \frac{x^n}{n} \xrightarrow{\text{S. MOD}} \sum \frac{|x|^n}{n}$

crit. Cauchy $\quad \lim \sqrt[n]{\frac{|x|^n}{n}} = |x|$

$|x| < 1 \iff x < 1 \wedge x > -1 \iff \boxed{-1 < x < 1}$

intervalo de convergência

$x = 1: \quad \sum \frac{x^n}{n} \rightarrow \sum \frac{1}{n} \quad \underline{\underline{\text{DIV}}}$

$x = -1: \quad \sum \frac{(-1)^n}{n} \xrightarrow{\text{S. MOD}} \sum \frac{1}{n} \quad \text{DIV}$

critério de Leibniz
$\frac{1}{n}$ decresce
$\lim \frac{1}{n} = 0$
$\Rightarrow \underline{\underline{\text{CONV.}}}$
(simp. conv.)

Logo, o domínio de convergência será: $-1 \leq x < 1$

Assim a passagem do intervalo de convergência p/ o domínio de convergência consiste unicamente em estudar se o intervalo é aberto ou fechado.

— Série de Mac-Laurin —

Em particular se o desenvolvimento é feito no ponto $x=0$ $(a=0)$ virá:

$$\boxed{f(x)=f(0)+x\,f'(0)+\frac{x^2}{2}f''(0)+\frac{x^3}{3!}f'''(0)+\cdots+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)+\cdots}$$

Vejamos um exemplo:

a) Desenvolva em série de Mac-Laurin a função $f(x)=e^x$

$$f(x)=e^x \to f(0)=1$$
$$f'(x)=e^x \to f'(0)=1$$
$$f''(x)=e^x \to f''(0)=1$$
$$\vdots$$
$$f^{(n)}(x)=e^x \to f^n(0)=1$$

substituindo: então $\boxed{e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots}$

no domínio?

$$\sum \frac{x^n}{n!} \xrightarrow{\text{S. mod}} \sum \frac{|x|^n}{n!} \to \lim \frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim \frac{\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{|x|^n}{n!}}=$$

$$=\lim \frac{|x|^{n+1}\,n!}{|x|^n\cdot(n+1)!}=|x|\lim \frac{1}{n+1}=0<1 \quad \underline{\text{sempre conv.}} \Leftrightarrow$$

$$-\infty<x<+\infty$$

b) Desenvolva em Série de Mac-Laurin $f(x)=\log(1+x)$

$f(x)=\log(1+x) \rightarrow f(0)=0$

$f'(x)=\frac{1}{1+x} \rightarrow f'(0)=1$

$f''(x)=-\frac{1}{(1+x)^2} \rightarrow f''(0)=-1$

$f'''(x)=\frac{2}{(1+x)^3} \rightarrow f'''(0)=2$

$f^{IV}(x)=-\frac{6}{(1+x)^4} \rightarrow f^{IV}(0)=-6$

...

$f^{(n)}(x)=(-1)^{n+1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n} \rightarrow f^{(n)}(0)=(-1)^{n+1}(n-1)!$

e substituindo vem:

$\log(1+x)=0+x\cdot 1+\frac{x^2}{2}(-1)+\frac{x^3}{3!}\cdot 2+\cdots+\frac{x^n}{n!}(-1)^{n+1}(n-1)!+\cdots$

$$\boxed{\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+\cdots}$$

$\sum(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} \xrightarrow{\text{S. MOD}} \sum\frac{|x|^n}{n} \rightarrow \lim\sqrt[n]{\frac{|x|^n}{n}}=|x|$

$|x|<1 \Leftrightarrow -1<x<1$

$x=1 \rightarrow \sum\frac{(-1)^{n+1}}{n} \xrightarrow{\text{S. MOD}} \sum\frac{1}{n}$ DIV

Critério de Leibniz: $\frac{1}{n}$ decresce, $\lim\frac{1}{n}=0$ $\Rightarrow$ CONV

$x=-1 \rightarrow \sum\frac{(-1)^{n+1}(-1)^n}{n}=\sum\frac{(-1)^{2n+1}}{n}=\sum\frac{-1}{n}\cdot\underbrace{(-1)^{2n}}_{1}=-\sum\frac{1}{n}$ DIV

e o desenvolvimento é válido para $-1<x\leq 1$

— Desenvolvimento do Binómio —

$f(x) = (1+x)^k \qquad k \in \mathbb{R}$

$f'(x) = k(1+x)^{k-1} \qquad f'(0) = k$

$f''(x) = k(k-1)(1+x)^{k-2} \qquad f''(0) = k(k-1)$

$\cdots$

$f^n(x) = k(k-1)\cdots(k-n+1)(1+x)^{k-n} \qquad f^n(x) = k(k-1)\cdots(k-n+1)$

$$\boxed{(1+x)^k = 1 + kx + \frac{k(k-1)}{2}x^2 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{k(k-1)\cdots(k-n+1)}{n!}x^n + \cdots}$$

INT. CONV. $\lim \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \dfrac{\dfrac{k(k-1)\cdots(k-n+1)(k-n)}{(n+1)!}}{\dfrac{k(k-1)\cdots(k-n+1)}{n!}} \dfrac{|x|^{n+1}}{|x|^n}$

$= \lim \dfrac{|k-n|}{n+1}|x| = |x| \qquad$ Conv. $-1 < x < 1$

A conv. ou div. em $x = \pm 1$ depende do valor de k.

Conclusão dos desenvolvimentos em série com a verificação de um relação extremamente importante

- $\operatorname{sen} x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^{n+1}\dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots \qquad -\infty < x < +\infty$

- $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots \qquad -\infty < x < +\infty$

- $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} + \cdots \qquad -\infty < x < +\infty$