Matemática II

14 de Junho de 2010

2ª frequência

UCP Gestão/Economia

Duração: 2h30m

Pergunta	1	2	3	4	5	6	7
Cotação	4,0	4,0	3,0	3,0	3,0	1,5	1,5

GRUPO I

1. Considere o seguinte problema de programação linear (P):

$$max\ z = x_1 - 3x_2 \quad \text{com} \quad \begin{cases} 4x_1 + 5x_2 \leq 20 \\ x_1 - 2x_2 \leq 1 \\ x_2 \leq 2 \\ x_1,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

   a. Resolva o problema P graficamente.

   b. Escreva o problema dual de P.

   c. Usando os desvios complementares determine a solução óptima do problema dual de P.

   d. Admita que P representa um sistema de produção numa empresa, com dois produtos (correspondendo às variáveis x_1 e x_2) e três tipos de recursos (correspondendo à 1ª,2ª e 3ª restrições), pretendendo-se maximizar o lucro (expresso em u.m.). Com base nos preços sombra diga qual é o valor máximo que a empresa deve pagar por uma unidade adicional de cada um dos recursos.

2. Considere o seguinte problema de Programação Linear:

$$max\ z = x_1 + 4x_2 \quad \text{com} \quad \begin{cases} 2x_1 - x_2 \leq 12 \\ x_1 + 2x_2 \geq 1 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \leq 0 \end{cases}$$

   a. Escreva a formulação na forma standard (de forma a poder usar o algoritmo do simplex).

   b. Utilize o algoritmo do simplex e o método do big-M para resolver este problema.

GRUPO II

3. Uma empresa de bebidas capta água mineral em três nascentes (A, B, C). As capacidades mensais de produção nas três nascentes (em hectolitros – hl) bem como os lucros obtidos com a venda da água no mercado nacional (em euros por hectolitro) são indicados na seguinte tabela:

	nascente A	nascente B	nascente C
Capacidade de Produção (hl)	2500	2000	1000
Lucro por hl	13€	14€	15€

Requere-se ainda que pelo menos metade da água seja proveniente da nascente A.

a. Suponha que as encomendas de água para o próximo mês totalizam 3000 (hl) e que deve ser engarrafada exactamente esta quantidade de água. Formule em Programação Linear o problema da determinação de um plano de produção óptimo.

b. Suponha agora que, como em a), as encomendas nacionais para o próximo mês totalizam 3000 (hl), mas que é possível exportar água da nascente A com um lucro de 12€ por hl. Altere a formulação obtida em a) de forma a contemplar esta situação.

4. Calcule a soma das séries:

a. $\sum_{2} \left(\frac{2 \cdot 3^{n-1} + 3 \cdot 2^{n+1}}{5^n} \right)$

b. $\frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 7} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \frac{1}{7 \cdot 11} + \ldots\ldots$

GRUPO III

5. Estude a convergência simples/absoluta das séries:

a. $\sum \frac{n\,(2n)!}{4^n\,(n!)^2}$

b. $\sum (-1)^n \frac{n+1}{2\sqrt{n+5}} \operatorname{sen}\frac{3}{n} \log\frac{n+2}{n+1}$

6. Desenvolva $f(x) = \log(1-x)$ em série de MacLaurin indicando o intervalo de validade do desenvolvimento obtido.

7. Determine $a \in \mathbb{R}$ por forma a que a série $\sum \frac{a^{n+1}\,x^n}{n+1}$ seja convergente em $x = -3$ e divergente em $x = 3$.

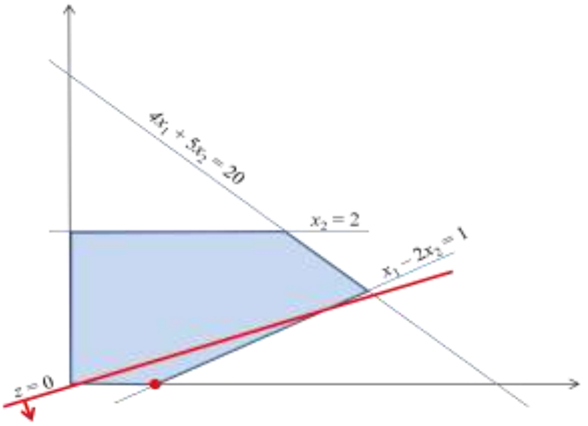
Resolução da 2ª frequência de Matemática II

(14 de Junho de 2010)

GRUPO I

1.

(a)



Sol. Óptima : $\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 1 \\ x_2 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \end{cases}$ $z=0$

(b) variáveis duais: u_1, u_2, u_3.

$$\begin{array}{ll} \min & w = 20u_1 + u_2 + 2u_3 \\ s.a & 4u_1 + u_2 \geq 1 \\ & 5u_1 - 2u_2 + u_3 \geq -3 \\ & u_1 \geq 0,\ u_2 \geq 0, u_3 \geq 0 \end{array}$$

(c)

$$\begin{array}{rcl} x_1 = 1 > 0 & \Rightarrow & 4u_1 + u_2 = 1 \\ 4x_1 + 5x_2 < 20 & \Rightarrow & u_1 = 0 \\ x_2 < 2 & \Rightarrow & u_3 = 0 \end{array}$$

Logo, a solução óptima do problema dual é $(u_1, u_2, u_3) = (0, 1, 0)$ com $w = 1$.

(d) A empresa deve pagar no máximo 1 u.m. por cada unidade do recurso de tipo 2 e zero u.m. por unidades adicionais dos restantes recursos

2.

(a)

Mudança de variável $x_2 = -x_2'$

$$
\begin{array}{llccccccccccccc}
\max & z= & x_1 & - & 4x_2' & & & & & & - & Mx_5 & & \\
\text{s.a} & & 2x_1 & + & x_2' & + & x_3 & & & & & & = & 12 \\
 & & x_1 & - & 2x_2' & & & - & x_4 & + & & x_5 & = & 1 \\
 & & x_1 \geq 0 & & x_2' \geq 0 & & x_3 \geq 0 & & x_4 \geq 0 & & & x_5 \geq 0 & &
\end{array}
$$

(b)

	max	x_1	x_2'	x_3	x_4	x_5		
$L_0 - ML_2$	z	-1	4	0_2	0	M	0	
	x_3	2	1	1	0	0	12	
	x_5	1	-2	0	-1	1	1	
$L_0 + (1+M)L_2$	z	$-1-M$	$4+2M$	0	M	0	$-M$	
$L_1 - 2L_2$	x_3	2	1	1	0	0	12	
L_2	x_5	(1)	-2	0	-1	1	1	$x_5 \leftarrow x_1$
$L_0 + \frac{1}{2}L_1$	z	0	2	0	-1	$-$	1	
$\frac{1}{2}L_1$	x_3	0	5	1	(2)	$-$	10	$x_3 \leftarrow x_4$
$L_1 + \frac{1}{2}L_1$	x_1	1	-2	0	-1	$-$	1	
	z	0	$\frac{9}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-$	6	
	x_4	0	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$-$	5	
	x_1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-$	6	

Sol. Óptima: é $(x_1, x_2) = (6, 0)$ com $z = 6$

GRUPO II

3.

(a) x_A : quantidade de água engarrafada na nascente A (hl)

x_B : quantidade de água engarrafada na nascente B (hl)

x_C : quantidade de água engarrafada na nascente C (hl)

$$\begin{array}{llllllll}
\max & 13x_A & + & 14x_B & + & 15x_C & & \text{(max valor da venda)} \\
\text{s.a} & x_A & \geq & x_B & + & x_C & & \text{(pelo menos metade da água vem de A)} \\
 & x_A & + & x_B & + & x_C & = 3000 & \text{(exactamente 3000 hl engarrafados)} \\
 & & 0 & \leq & x_A & \leq & 2500 & \\
 & & 0 & \leq & x_B & \leq & 2000 & \\
 & & 0 & \leq & x_C & \leq & 1000 &
\end{array}$$

(b) x_A : quantidade de água engarrafada na nascente A, vendida no mercado nacional (hl)

x_B : quantidade de água engarrafada na nascente B (hl)

x_C : quantidade de água engarrafada na nascente C (hl)

y : quantidade de água engarrafada na nascente A e exportada (hl)

$$\begin{array}{lllllllll}
\max & 13x_A & + & 14x_B & + & 15x_C & + 12y & & \text{(max valor da venda nacional + exportação)} \\
\text{s.a} & x_A & + & y & \geq & x_B & + x_C & & \text{(pelo menos metade da água vem de A)} \\
 & x_A & + & x_B & + & x_C & = 3000 & & \text{(3000 hl mercado nacional)} \\
 & & 0 & \leq & x_A & & & & \\
 & & 0 & \leq & x_B & \leq & 2000 & & \\
 & & 0 & \leq & x_C & \leq & 1000 & & \\
 & & 0 & \leq & y & & & & \\
 & & x_A & + & y & \leq & 2500 & & \text{(quantidade de água de A não escede 2500)}
\end{array}$$

4.

(a) $$\sum_{2}\left(\frac{2\cdot 3^{n-1}+3\cdot 2^{n+1}}{5^n}\right)=\frac{2}{3}\sum_{2}\left(\frac{3}{5}\right)^n+6\sum_{2}\left(\frac{2}{5}\right)^n=$$

$$=\frac{2}{3}\,\frac{9}{25}\,\frac{1}{1-3/5}+6\,\frac{4}{25}\,\frac{1}{1-2/5}=\frac{18}{75}\,\frac{5}{2}+\frac{24}{25}\,\frac{5}{3}=$$

$$=\frac{45}{75}+\frac{40}{25}=\frac{3}{5}+\frac{8}{5}=\frac{11}{5}$$

(b) $\dfrac{1}{1\cdot 5}+\dfrac{1}{3\cdot 7}+\dfrac{1}{5\cdot 9}+\dfrac{1}{7\cdot 11}+.....=\sum\dfrac{1}{(2n-1)(2n+3)}=\sum\left(\dfrac{A}{2n-1}+\dfrac{B}{2n+3}\right)$

com $A=\left(\dfrac{1}{2n+3}\right)_{n=1/2}=\dfrac{1}{4},\ \ B=\left(\dfrac{1}{2n-1}\right)_{n=-3/2}=-\dfrac{1}{4}$

então $\dfrac{1}{1\cdot 5}+\dfrac{1}{3\cdot 7}+\dfrac{1}{5\cdot 9}+\dfrac{1}{7\cdot 11}+.....=\dfrac{1}{4}\sum\left(\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+3}\right)$ Mengoli $p=2$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{3}-\lim\left(\frac{1}{2n+3}+\frac{1}{2n+1}\right)\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{3}-\lim\left(\frac{1}{2n+3}+\frac{1}{2n+1}\right)\right)=\frac{1}{3}$$

GRUPO III

5.

(a) $\sum\dfrac{n\,(2n)!}{4^n\,(n!)^2}$ critério de d'Alembert

$$\lim\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\frac{(n+1)\,(2n+2)!}{4^{n+1}\,((n+1)!)^2}\,\frac{4^n\,(n!)^2}{n\,(2n)!}=\lim\frac{1}{4}(2n+1)\,(2n+2)\,\frac{n+1}{n}\left(\frac{n!}{(n+1)!}\right)^2=$$

$$=\lim\frac{1}{4}\,(2n+1)\,(2n+2)\,\frac{n+1}{n}\left(\frac{1}{n+1}\right)^2=\lim\frac{1}{4}\,(2n+1)\,(2n+2)\,\frac{1}{n^2+n}=$$

$$=\frac{1}{4}\lim\frac{4n^2+\ldots}{n^2+\ldots}=1$$

temos então de decidir se este limite é 1^+ ou 1^- .

$$\lim\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\frac{1}{4}\,(2n+1)\,(2n+2)\,\frac{n+1}{n}\left(\frac{1}{n+1}\right)^2=\lim\frac{1}{4}\,(2n+1)\,(2n+2)\,\frac{1}{n^2+n}=$$

$= \lim \dfrac{4n^2 + 6n+2}{4n^2 + 4n} = 1^+$ uma vez que o numerador é maior que o denominador[1], então a série diverge.

(b) $\sum (-1)^n \dfrac{n+1}{2\sqrt{n+5}} \operatorname{sen}\dfrac{3}{n} \log\dfrac{n+2}{n+1}$ como $\dfrac{3}{n}$ está no 1ºQ e $\dfrac{n+2}{n+1} > 1$ a série de módulos é

$$\sum \frac{n+1}{2\sqrt{n+5}} \operatorname{sen}\frac{3}{n} \log\frac{n+2}{n+1}$$

Compara-se então com $\sum \dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ que é uma série convergente:

$$\lim \frac{\dfrac{n+1}{2\sqrt{n+5}} \operatorname{sen}\dfrac{3}{n} \log\dfrac{n+2}{n+1}}{\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}} = \lim \frac{\dfrac{n+1}{2\sqrt{n+5}} \operatorname{sen}\dfrac{3}{n} \log\dfrac{n+2}{n+1}}{\sqrt{n} \quad \dfrac{1}{n} \quad \dfrac{1}{n}} =$$

$$= \lim \frac{1}{2}\sqrt{\frac{n^2+2n+1}{n^2+5n}} \ \lim 3\,\frac{\operatorname{sen}\dfrac{3}{n}}{\dfrac{3}{n}} \ \lim \log\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n = \frac{3}{2}$$

que é finito e diferente de zero, as séries comparadas têm a mesma natureza, portanto a série de módulos é convergente e a série em estudo é Absolutamente Convergente.

---

[1] $\dfrac{4n^2 + 6n+2}{4n^2 + 4n} = \dfrac{4n^2+4n+2n+2}{4n^2 + 4n} = 1 + \underbrace{\dfrac{n+1}{2n^2 + 2n}}_{\to 0^+} \to 1^+$

6.

$f(x)=\log(1-x)$ $\qquad$ $f(0)=0$

$f'(x)=-\dfrac{1}{1-x}=-(1-x)^{-1}$ $\qquad$ $f'(0)=-1$

$f''(x)=-1(1-x)^{-2}$ $\qquad$ $f''(0)=-1$

$f'''(x)=-1\cdot 2(1-x)^{-3}$ $\qquad$ $f'''(0)=-1\cdot 2$

……….. $\qquad$ …………

$f^{(n)}(x)=-\dfrac{(n-1)!}{(1-x)^n}$, $n=1,2,\ldots$ $\qquad$ $f^{(n)}(0)=-(n-1)!$, $n=1,2,\ldots$

então

$$f(x)=\log(1-x)=0-x-\frac{x^2}{2!}-1\cdot 2\frac{x^3}{3!}-\ ....-\frac{(n-1)!}{n!}\ x^n\ -.....\ =-\sum_1 \frac{x^n}{n}$$

$$f(x)=-\sum_1 \frac{x^n}{n}$$

Usando o critério de Cauchy sobre a série de módulos:

$$\lim \sqrt[n]{\frac{|x|^n}{n}}=|x|<1$$

$$-1<x<1$$

Intervalo de convergência: $\left]-1,1\right[$.

Se $x=-1$ a série fica $-\sum_1 \dfrac{x^n}{n}=-\sum_1 \dfrac{(-1)^n}{n}$ a série de módulo diverge mas pode concluir-se usando o critério de Leibniz que a série em estudo é Simplesmente convergente.

Se $x=1$ a série fica $-\sum_1 \dfrac{x^n}{n}=-\sum_1 \dfrac{1}{n}$ que diverge.

Portanto o domínio de convergência é $\left[-1,1\right[$ que é o domínio de validade do desenvolvimento de MacLaurin.

7.

- Em $x=-3$ a série é $\sum \frac{(-1)^n a^{n+1} 3^n}{n+1}$. A série de módulos é $\sum \frac{|a|^{n+1} 3^n}{(n+1)}$. Aplicando o critério de Cauchy obtemos

$$\lim \sqrt[n]{u_n} = 3|a| < 1 \quad \text{para ser convergente}$$

$$a \in \left]-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right[$$

e se $a=-\frac{1}{3}$ a série é $-\sum \frac{1}{3(n+1)}$ que é divergente como se pode mostrar comparando com $\sum \frac{1}{n}$.

se $a=\frac{1}{3}$ a série é $\sum \frac{(-1)^n}{3(n+1)}$ a série de módulos $\sum \frac{1}{3(n+1)}$ diverge mas o critério de Leibniz permite concluir que a série é Simplesmente convergente.

Portanto, para $x=-3$ a série converge se $a \in \left]-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right] = D_1$.

- Em $x=3$ a série é $\sum \frac{a^{n+1} 3^n}{n+1}$. A série de módulos é $\sum \frac{|a|^{n+1} 3^n}{(n+1)}$ que é a série de módulos já estudada acima. O critério de Cauchy permite concluir que é divergente em

$$a \in \left]-\infty, -\frac{1}{3}\right[\cup \left]\frac{1}{3}, +\infty\right[$$

Para $a=-\frac{1}{3}$ a série é $-\sum \frac{(-1)^n}{3(n+1)}$ que já vimos ser convergente

Para $a=\frac{1}{3}$ a série é $\sum \frac{1}{3(n+1)}$ que já vimos ser divergente, portanto para $x=3$ a série é divergente se

$$a \in \left]-\infty, -\frac{1}{3}\right[\cup \left[\frac{1}{3}, +\infty\right[= D_2$$

Então para que a série seja convergente para $x=-3$ e divergente para $x=3$ deve ter-se $a \in D_1 \cap D_2 = \left\{\frac{1}{3}\right\}$, isto é $a=\frac{1}{3}$.