UCP Gestão/Economia **Matemática II** **9 de Abril de 2010**

1ª frequência **2h30m**

GRUPO 1

(1.5) **1.** Seja $f(x,y)=x^{y}$ com $x=e^{uv}$, $y=u^{2}$ e $u=2\operatorname{sen}t$, $v=\log(t+1)$. Calcule $\dfrac{df}{dt}$.

(2.0) **2.** Determine a derivada da função $f=xy^{2}e^{2z-4}\varphi\left(\dfrac{x+2y}{z}\right)$ no ponto $P(2,1,2)$ na direcção que faz ângulos obtusos iguais com os eixos, sabendo que φ é derivável pelo menos uma vez e que

$$\varphi(2)=\varphi'(2)=5.$$

(3.5) **3.** Seja $z=\dfrac{y^{2}-x^{2}}{y}\,\phi\left(\dfrac{y^{2}-x^{2}}{y}\right)$, sendo ϕ função homogénea de grau 1.

(1.5) **3.1.** Determine o grau de homogeneidade de z.

(2.0) **3.2.** Mostre que z verifica a igualdade de Euler.

GRUPO 2

(2.0) **4.** Se $f(u,v)$ é homogénea de grau *k* e $u(x,y)$ e $v(x,y)$ são homogéneas de grau *p*, verifique se $f(x,y)$ é homogénea e em caso afirmativo qual o seu grau ?

(2.5) **5.** Determine os extremos da função $f(x,y)=(x^{2}+y^{2}-1)^{2}+\dfrac{x^{2}}{2}$.

GRUPO 3

(3.0) **6.** Seja $f(x,y,z)=8x^{3}+6ay^{2}+3az^{2}$ com $x+2y-z=a$.

Utilize o método dos multiplicadores de Lagrange para discutir os extremos da função f face aos valores de $a\in\mathbf{R}\backslash\{0\}$.

(5.5) **7.** Seja $f=(x-1)^{2}+(y-5)^{2}$.

(1.0) **7.1.** Escreva as condições de Kuhn-Tucker para o problema

$$\min f \quad \text{com} \quad x+3y\leq 12 \ \wedge\ 2x+y\leq 14 \ \wedge\ x\geq 0 \ \wedge\ y\geq 0$$

(2.0) **7.2.** Resolva graficamente o problema de **7.1.**

(2.5) **7.3.** Resolva o problema de **7.1.**,utilizando as condições de Kuhn-Tucker e considerando que a restrição $2x+y\leq 14$ é não activa e que $x>0$.

Resolução (9 Abril 2010) (algumas questões admitem resoluções alternativas)

1. $$\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{du}{dt}+\frac{\partial x}{\partial v}\frac{dv}{\partial t}\right)+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{du}\frac{du}{dt}=$$

$$=y\,x^{y-1}\left(2v\,e^{uv}\cos t+\frac{u\,e^{uv}}{t+1}\right)+4u\,x^{y}\log x\,\cos t$$

2.

$$\frac{\partial f}{\partial x}=y^2e^{2z-4}\varphi+xy^2\,e^{2z-4}\varphi'\frac{1}{z}\quad=\left(em\ P\right)\ =10$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=2xye^{2z-4}\varphi+xy^2\,e^{2z-4}\varphi'\frac{2}{z}\quad=\left(em\ P\right)\ =30$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}=2xy^2e^{2z-4}\varphi-xy^2\,e^{2z-4}\varphi'\frac{x+2y}{z^2}\quad=\left(em\ P\right)\ =10$$

e $\alpha=\beta=\gamma\ \Rightarrow\ \cos\alpha=\frac{-1}{\sqrt{3}}$ (ângulos obtusos) portanto $\left(\frac{\partial f}{\partial\lambda}\right)_P=\frac{-1}{\sqrt{3}}\left(10+30+10\right)=\frac{-50}{\sqrt{3}}$.

3.

3.1. Se fizermos $f(x,y)=\frac{y^2-x^2}{y}$ que é homogénea de grau 1, a função z é

$$z=f\,\phi(f)$$

com ϕ homogénea de grau 1.

Como ϕ é homogénea de grau 1 a função z é o produto de duas funções homogéneas, f de grau 1 e ϕ de grau 1, então

$$z(\lambda x,\lambda y)=f(\lambda x,\lambda y)\phi(f(\lambda x,\lambda y))=f(\lambda x,\lambda y)\phi(\lambda f(x,y))=\lambda f(x,y)\,\lambda\phi(x,y)=\lambda^2 z(x,y)$$

e z é homogénea de grau 2.

3.2. Se $\phi(f)$ é homogénea de grau 1, então $f\,\frac{\partial\phi}{\partial f}=f\,\phi'=\phi$.

Como $$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(f\phi(f))=\frac{\partial f}{\partial x}\phi+f\phi'\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}\left[\phi+f\,\phi'\right]$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(f\phi(f))=\frac{\partial f}{\partial y}\phi+f\phi'\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial y}\left[\phi+f\,\phi'\right]$$

então $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=2z$ fica:

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=\underbrace{\left(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}\right)}_{=f}(\phi+\underbrace{f\,\phi'}_{\phi})=f\,(\phi+\phi)=2\underbrace{f\,\phi}_{=z}=2z$$ C.Q.D.

4. Sabe-se que

$$u\frac{\partial f}{\partial u}+v\frac{\partial f}{\partial v}=kf\ ,\quad x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=pu\ \text{ e }\ x\frac{\partial v}{\partial x}+y\frac{\partial v}{\partial y}=pv$$

então
$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=x\left[\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right]+y\left[\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right]=$$

$$=x\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial u}+y\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial u}+x\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial v}+y\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial v}=$$

$$=\left(x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}\right)\frac{\partial f}{\partial u}+\left(x\frac{\partial v}{\partial x}+y\frac{\partial v}{\partial y}\right)\frac{\partial f}{\partial v}=$$

$$=p\,u\frac{\partial f}{\partial u}+p\,v\frac{\partial f}{\partial v}=p\left(u\frac{\partial f}{\partial u}+v\frac{\partial f}{\partial v}\right)=pk\,f$$

portanto $f(x,y)$ é homogénea de grau *pk*.

5. $f(x,y)=(x^2+y^2-1)^2+\frac{x^2}{2}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=x(4x^2+4y^2-3)\qquad \frac{\partial f}{\partial y}=4y(x^2+y^2-1)$$

$$\begin{cases}x(4x^2+4y^2-3)=0\\ y(x^2+y^2-1)=0\end{cases}$$ temos 4 sistemas

(I)
$$\begin{cases}x=0\\ y=0\end{cases}\quad A(0,0)$$

(II)
$$\begin{cases}x=0\\ y^2=1\end{cases}\quad B(0,1)\quad C(0,-1)$$

(III)
$$\begin{cases}4x^2=3\\ y=0\end{cases}\quad D(\sqrt{3}/2,\,0)\quad E(-\sqrt{3}/2,\,0)$$

(IV)
$$\begin{cases}4x^2+4y^2-3=0\\ x^2+y^2=1\end{cases}$$

$$\begin{cases}1=0\\ \ldots\ldots\end{cases}\ \textit{impossível}$$

	A	B	C	D	E
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=12x^2+4y^2-3$	-3	1	1	6	6
$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=4x^2+12y^2-4$	-4	8	8	-1	-1
$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=8xy$	0	0	0	0	0
Δ_1	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$
Δ_2	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$
	MAX	**MIN**	**MIN**	**PSela**	**PSela**

$$f_{\max}=1 \text{ em } A,\quad f_{\min}=0 \text{ em } B,\quad f_{\min}=0 \text{ em } C$$

6. $f(x,y,z)=8x^3+6ay^2+3az^2$ com $x+2y-z=a$.

$$L(x,y,z,\lambda)=8x^3+6ay^2+3az^2-\lambda(x+2y-z-a)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x}=24x^2-\lambda,\quad \frac{\partial L}{\partial y}=12ay-2\lambda,\quad \frac{\partial L}{\partial z}=6az+\lambda,\quad \frac{\partial L}{\partial \lambda}=a-x-2y+z$$

$$\begin{cases}24x^2-\lambda=0\\12ay-2\lambda=0\\6az+\lambda=0\\a-x-2y+z=0\end{cases}\qquad \begin{cases}24x^2-\lambda=0\\6ay-\lambda=0\\6az+\lambda=0\\x+2y-z=a\end{cases}\qquad \begin{cases}24x^2-\lambda=0\\\lambda=6ay\\\lambda=-6az\\x+2y-z=a\end{cases}\qquad \begin{cases}24x^2-\lambda=0\\\lambda=6ay\\y=-z\\x+3y=a\end{cases}$$

$$\begin{cases}24x^2=6ay \Rightarrow y=4x^2/a\\\lambda=6ay\\y=-z\\x+3y=a\end{cases}\qquad \begin{cases}y=4x^2/a\\\lambda=6ay\\y=-z\\x+12x^2/a=a \underset{a\neq 0}{\rightarrow} 12x^2+ax-a^2=0\end{cases}$$

$$x=\frac{-a\pm\sqrt{a^2+48a^2}}{24}=\frac{-a\pm 7a}{24}$$

$$x=-\frac{a}{3} \vee x=\frac{a}{4}$$

obtém-se

$$\begin{cases} x = -a/3 \\ y = 4a/9 \\ z = -4a/9 \\ \lambda = 8a^2/3 \end{cases} \quad A\left(-\frac{a}{3}, \frac{4a}{9}, -\frac{4a}{9}\right) \quad \lambda = \frac{8a^2}{3} \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} x = a/4 \\ y = a/4 \\ z = -a/4 \\ \lambda = 3a^2/2 \end{cases} \quad B\left(\frac{a}{4}, \frac{a}{4}, -\frac{a}{4}\right) \quad \lambda = \frac{3a^2}{2}$$

A matriz H_L é:

$$H_L = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 48x & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 12a & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 6a \end{bmatrix} \quad \text{então} \quad \Delta_1 = (-1)\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 48x & 0 \\ 2 & 0 & 12a \end{vmatrix} = 12a + 192x \quad \text{e}$$

$$\Delta_2 = (-1)\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 48x & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 12a & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 6a \end{vmatrix} = -\left[\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 48x & 0 & 0 \\ 0 & 12a & 0 \end{vmatrix} + 6a\left(-\Delta_1\right)\right] = 72x^2 + 1728ax$$

Em A, $\Delta_1 = 12a - 192\frac{a}{3} = -52a, \quad \Delta_2 = 72\left(-\frac{a}{3}\right)^2 - 1728a\frac{a}{3} = -568a^2$

portanto $\Delta_2 < 0, \quad \forall_{a \neq 0}$, qualquer que seja o sinal de Δ_1 temos sempre um Ponto de Sela.

Em B, $\Delta_1 = 12a + 192\frac{a}{4} = 60a, \quad \Delta_2 = 72\left(\frac{a}{4}\right)^2 + 1728a\frac{a}{4} = \frac{9}{2}a^2 + 432a^2 > 0, \ \forall_{a \neq 0}$ portanto se:

$a > 0 \ \Rightarrow \ \Delta_1 > 0$ temos um mínimo

$a < 0 \ \Rightarrow \ \Delta_1 < 0$ temos um máximo

$$f\left(\frac{a}{4}, \frac{a}{4}, -\frac{a}{4}\right) = \frac{11a^3}{16}$$

7. $f = (x-1)^2 + (y-5)^2$

7.1. $\min f$

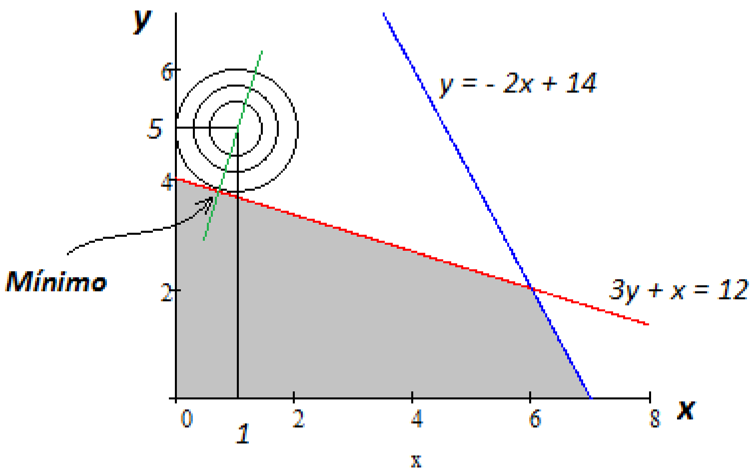
Resolve-se o problema $\max(-f) = -(x-1)^2 - (y-5)^2$.

Seja $F = -(x-1)^2 - (y-5)^2 - \lambda_1(x + 3y - 12) - \lambda_2(2x + y - 14)$

Condições:

$$\begin{cases} x\dfrac{\partial F}{\partial x} = x\left(-2(x-1)-\lambda_1-2\lambda_2\right)=0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = y\left(-2(y-5)-3\lambda_1-\lambda_2\right)=0 \\ \lambda_1\dfrac{\partial F}{\partial \lambda_1} = -\lambda_1(x+3y-12)=0 \\ \lambda_2\dfrac{\partial F}{\partial \lambda_2} = -\lambda_2(2x+y-14)=0 \\ \lambda_1,\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda_1},\ \lambda_2,\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda_2},\ x,\ y\ \geq 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial x},\ \dfrac{\partial F}{\partial y}\ \leq 0 \end{cases}$$

7.2.



As rectas perpendiculares a $3y+x=12$ terão declive $m=3$ e equações $y=3x+b$, destas a que passa no ponto (1,5) é tal que $5=3+b \rightarrow b=2$, portanto terá equação $y=3x+2$ e a intersecção com $3y+x=12$ é a solução do sistema

$$\begin{cases} 3y+x=12 \\ y=3x+2 \end{cases} \begin{cases} x=3/5 \\ y=19/5 \end{cases} \text{ e tem-se } \min f \text{ em } P\left(\frac{3}{5},\frac{19}{5}\right).$$

$$\min f = \left(\frac{3}{5}-1\right)^2+\left(\frac{19}{5}-5\right)^2=\frac{8}{5}$$

7.3. Se $2x + y \leq 14$ é não activa e $x > 0$ tem-se

$$\begin{cases} -2(x-1) - \lambda_1 - 2\lambda_2 = 0 \\ y\left(-2(y-5) - 3\lambda_1 - \lambda_2\right) = 0 \\ \lambda_1 (x + 3y - 12) = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases}$$ e temos 4 sistemas

i)

$$\begin{cases} -2x + 2 = \lambda_1 \\ y = 0 \\ \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases}$$ não verifica a condição $\frac{\partial F}{\partial y} \leq 0$

ii)

$$\begin{cases} -2x + 2 = \lambda_1 \\ y = 0 \\ x + 3y - 12 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -2x + 2 = \lambda_1 \\ y = 0 \\ x + 3y = 12 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda_1 < 0 \quad \rightarrow \quad \text{não verifica} \\ y = 0 \\ x = 12 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

iii)

$$\begin{cases} -2x + 2 = \lambda_1 \\ -2y + 10 = 3\lambda_1 \\ \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = 5 \\ \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases}$$ não verifica a condição $x + 3y \leq 12$

iv)

$$\begin{cases} -2x + 2 = \lambda_1 \\ -2y + 10 = 3\lambda_1 \\ x + 3y = 12 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -2x + 2 = \lambda_1 \\ -2y + 10 = -6x + 6 \\ x + 3y = 12 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -2x + 2 = \lambda_1 \\ 3x - y = -2 \\ x/3 + y = 4 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -2x + 2 = \lambda_1 \\ 3x - y = -2 \\ x/3 + y = 4 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda_1 > 0 \\ x = 3/5 \\ y = 19/5 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

Verifica as condições de KT.

Temos então um mínimo de f em $P\left(\frac{3}{5}, \frac{19}{5}\right)$, $\min f = f\left(\frac{3}{5}, \frac{19}{5}\right) = \frac{8}{5}$.

FIM