Matemática II

28 de Junho de 2010

Exame

UCP Gestão/Economia

Duração: 2h30m

Pergunta	1	2	3	4	5	6	7	8
Cotação	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5

GRUPO I

1. Calcule a derivada no ponto P (3 , 4) da função $z(x,y)=\log\left(x^2+y^2\right)$ na direcção do vector $\vec{\nabla} z$.

2. Calcule aproximadamente o valor de $\sqrt{5e^{0,02}+2,03^2}$.

   (***Sugestão***: utilize o conceito de diferencial)

GRUPO II

3. Determine e classifique (se existirem) os pontos de estacionaridade da função $f(x,y,z)=xyz$ se $x+y+z=3$.

4. Seja $\min f(x,y)=-x^2-y^2+y+1$ definida no domínio $x^2+y^2\leq 1 \;\wedge\; y\geq 0$.

   a. Indique as condições de Kuhn-Tucker.

   b. Resolva graficamente o problema anterior.

GRUPO III

5. Considere a série funcional seguinte: $\displaystyle\sum_{1}^{\infty}\frac{6.2^{n+1}}{(4n^2+4n-3)(2x-1)^n}$.

   a. Determine o domínio de convergência da série.

   b. Considere $x=\dfrac{3}{2}$ e determine a soma da série numérica correspondente.

6. Estude a convergência simples/absoluta das séries:

a. $\sum_{1}^{\infty} \frac{sen(n+2)}{n^2+1}$

b. $\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n+1}(4n+2)}{2n\sqrt{3n^3+5n+2}}$

GRUPO IV

7. Considere o seguinte problema de programação linear (P):

$$max\ z = x_1 + 2x_2 \quad \text{com} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 6 \\ x_2 \geq 2 \\ x_1,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

a. Escreva a formulação na forma standard (de forma a poder usar o algoritmo do simplex).

b. Utilize o algoritmo do simplex e o método do big-M para resolver este problema.

c. Escreva o problema dual de P.

d. Usando os desvios complementares determine a solução óptima do problema dual de P.

8. Uma refinaria de petróleo produz Gasolina e Gasóleo a partir de dois tipos de petróleo bruto. Na seguinte tabela indicam-se as quantidades (em barris) de cada um dos produtos finais que são obtidas a partir de um barril de cada um dos tipos de petróleo bruto, bem como o custo (por barril) de cada um dos tipos de petróleo bruto:

	Gasolina	Gasóleo	Custo por barril
Petróleo bruto A	0.7	0.1	70€
Petróleo bruto B	0.4	0.5	65€

a. A refinaria pretende obter pelo menos 600 barris de Gasolina e 1200 barris de Gasóleo no mês de Julho. Que quantidades de cada um dos tipos de petróleo bruto devem ser adquiridas de forma a minimizar a despesa da refinaria? Formule este problema em Programação Linear. Explique o significado das variáveis, restrições e função objectivo que considerar.

b. Suponha agora que a refinaria tem a possibilidade de comprar gasolina e gasóleo a uma outra empresa (como alternativa à produção) ao preço de 100€ por barril para a gasolina e 80€ por barril para o gasóleo. No entanto esta empresa requer que a quantidade de gasolina vendida à refinaria seja pelo menos o dobro da quantidade de gasóleo. Altere a formulação para contemplar esta situação.

Resolução do Exame de Matemática II

(28 de Junho de 2010)

GRUPO I

1. As derivadas parciais de $z(x,y)$ são, em P :

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x}{x^2+y^2}\underset{P}{\to}\frac{6}{25},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y}{x^2+y^2}\underset{P}{\to}\frac{8}{25}$$

e o gradiente será então $\left(\vec{\nabla} z\right)_P=\frac{2}{25}(3,4)$.

- Uma forma expedita de calcular a derivada pedida $\left(\frac{\partial z}{\partial \lambda}\right)_P$ é calcular o módulo do gradiente de z em P

$$\left(\frac{\partial z}{\partial \lambda}\right)_P=\left|\vec{\nabla} z\right|=\frac{2}{25}\sqrt{9+16}=\frac{2}{5}$$

- Alternativamente, como o versor da direcção é

$$\vec{v}=\frac{\vec{\nabla} z}{\left|\vec{\nabla} z\right|}=\frac{2}{25}\frac{5}{2}(3,4)=\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)=(\cos\alpha,\cos\beta)$$

fica $$\left(\frac{\partial z}{\partial \lambda}\right)_P=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_P\cos\alpha+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_P\cos\beta=\frac{6}{25}\frac{3}{5}+\frac{8}{25}\frac{4}{5}=\frac{2}{5}.$$

2. Tem-se $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{5e^x}{2\sqrt{5e^x+y^2}}$, $\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{5e^x+y^2}}$.

O diferencial de $f(x,y)$ é

$$df=\frac{1}{\sqrt{5e^x+y^2}}\left(\frac{5e^x\,dx}{2}+y\,dy\right)$$

Fazendo $x=0,\ \Delta x=\frac{2}{100}\approx dx$ e $y=2,\ \Delta y=\frac{3}{100}\approx dy$ fica

$$f(0,02;2,03)\approx f(0,2)+\Delta f=\sqrt{9}+\frac{1}{\sqrt{5e^0+2^2}}\left(\frac{5e^0}{2}\frac{2}{100}+2\frac{3}{100}\right)=$$

$$=3+\frac{11}{300}=\frac{911}{300}$$

GRUPO II

3. $f(x,y,x) = xyz$.

Seja $L(x,y,z,\lambda) = xyz - \lambda(x+y+z-3)$. As condições de estacionaridade sujeitas á condição dada são:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = yz - \lambda = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = xz - \lambda = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial z} = xy - \lambda = 0 \\ -x-y-z=-3 \end{cases} \quad \begin{cases} yz-\lambda=0 \\ xz-\lambda=0 \\ xy-\lambda=0 \\ x+y+z=3 \end{cases} \quad \begin{cases} yz=\lambda \\ xz-yz=0 \\ xy-yz=0 \\ x+y+z=3 \end{cases} \quad \begin{cases} yz=\lambda \\ z(x-y)=0 \\ y(x-z)=0 \\ x+y+z=3 \end{cases}$$

$$\text{A)} \begin{cases} 0=\lambda \\ z=0 \\ y=0 \\ x=3 \end{cases} \quad \text{B)} \begin{cases} 0=\lambda \\ z=0 \\ x=z=0 \\ y=3 \end{cases} \quad \text{C)} \begin{cases} 0=\lambda \\ x=y=0 \\ y=0 \\ z=3 \end{cases} \quad \text{D)} \begin{cases} yz=\lambda & \lambda=1 \\ x=y & y=1 \\ x=z & z=1 \\ 3x=3 \;\to & x=1 \end{cases}$$

portanto $\lambda = 0:\ A(3,0,0),\ B(0,3,0),\ C(0,0,3)$

$\lambda = 1:\ D(1,1,1)$

$$\begin{array}{c} \qquad\qquad\quad \Delta_1 \quad \Delta_2 \\ -\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & z & y \\ -1 & z & 0 & x \\ \hline -1 & y & x & 0 \end{array}\right] \end{array} \qquad \begin{array}{l} \Delta_1 = -2z \\ \Delta_2 = 4yz - (x-y-z)^2 \end{array}$$

em A , $\Delta_1 = 0$, $\Delta_2 = -9$ Ponto de Sela
em B , $\Delta_1 = 0$, $\Delta_2 = -9$ Ponto de Sela
em C , $\Delta_1 = -6$, $\Delta_2 = -9$ Ponto de Sela
em D , $\Delta_1 = -2$, $\Delta_2 = 3$ Ponto de Máximo

$f_{Max} = f(1,1,1) = 1$ (não era necessário calcular o máximo)

4. Seja $\min f(x,y) = -x^2 - y^2 + y + 1$ definida no domínio $x^2 + y^2 \le 1 \ \wedge \ y \ge 0$.

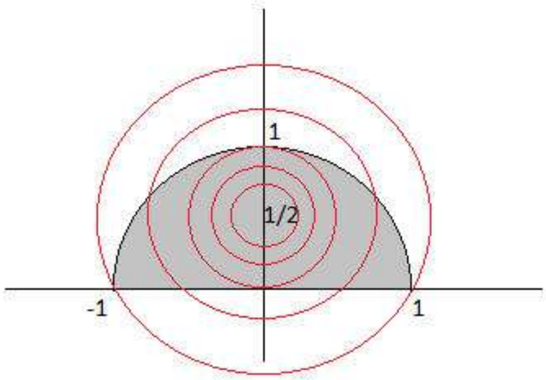
$$\max(-f(x,y)) = x^2 + y^2 - y - 1$$

a. Seja $F(x,y) = x^2 + y^2 - y - 1 - \lambda(x^2 + y^2 - 1)$. As condições de Kuhn-Tucker são:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = 2x - 2\lambda x = 0 \\ y\dfrac{\partial F}{\partial y} = y(2y - 1 - 2\lambda y) = 0 \\ \lambda \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = \lambda(-x^2 - y^2 + 1) = 0 \\ y, \lambda, \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} \ge 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} \le 0 \end{cases}$$

b. Resolução gráfica

$-(x^2 + y^2 - y - 1) = K \Leftrightarrow x^2 + \left(y - \dfrac{1}{2}\right)^2 = 1 + \dfrac{1}{4} - K$ Família de circunferências de centro $C\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$



$$f_{\min} = f(\pm 1, 0) = 0$$

5.

a. $$\sum_{1}^{\infty}\frac{6.2^{n+1}}{(4n^2+4n-3)(2x-1)^n}\xrightarrow{S.MOD.}\sum_{1}^{\infty}\frac{6.2^{n+1}}{(4n^2+4n-3)\left|2x-1\right|^n}$$

Usando o critério de Cauchy sobre a série de módulos: $\lim\sqrt[n]{\dfrac{6.2^{n+1}}{(4n^2+4n-3)\left|2x-1\right|^n}}=\dfrac{2}{\left|2x-1\right|}$

e para que seja convergente:

$$\frac{2}{\left|2x-1\right|}<1\Leftrightarrow\left|2x-1\right|>2\Leftrightarrow x\in\left]-\infty,-\frac{1}{2}\right[\cup\left]\frac{3}{2},+\infty\right[$$

- Se $x=-\dfrac{1}{2}$ a série fica:

$$\sum_{1}^{\infty}\frac{6.2^{n+1}}{(4n^2+4n-3)(-2)^n}=\sum_{1}^{\infty}\frac{6.2.2^n}{(4n^2+4n-3)(-1)^n(2)^n}=\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^n 12}{4n^2+4n-3}\xrightarrow{S.MOD.}\sum_{1}^{\infty}\frac{12}{4n^2+4n-3}$$

Compara-se então com $\sum\dfrac{1}{n^2}$ que é uma série convergente:

$$\lim\frac{\dfrac{12}{4n^2+4n-3}}{\dfrac{1}{n^2}}=\lim\frac{12n^2}{4n^2+4n-3}=3\neq 0,\infty$$

como é finito e diferente de zero, as séries comparadas têm a mesma natureza, portanto a série de módulos é convergente e a série em estudo é Absolutamente Convergente.

- Se $x=\dfrac{3}{2}$ a série fica :

$$\sum_{1}^{\infty}\frac{6.2^{n+1}}{(4n^2+4n-3)(2)^n}=\sum_{1}^{\infty}\frac{6.2.2^n}{(4n^2+4n-3)2^n}=\sum_{1}^{\infty}\frac{12}{4n^2+4n-3}$$

que é a série já estudada acima, o que permite concluir que é convergente.

Portanto o domínio de convergência é $\left]-\infty,-\dfrac{1}{2}\right]\cup\left[\dfrac{3}{2},+\infty\right[$.

b.

$$\sum_{1}^{\infty}\frac{12}{4n^2+4n-3}=\sum\frac{12}{4\left(n+\frac{3}{2}\right)\left(n-\frac{1}{2}\right)}=3\sum\left(\frac{A}{\left(n+\frac{3}{2}\right)}+\frac{B}{\left(n-\frac{1}{2}\right)}\right)$$

$$\text{com}\quad A=\left(\frac{1}{n-\frac{1}{2}}\right)_{n=-3/2}=-\frac{1}{2},\quad B=\left(\frac{1}{n+\frac{3}{2}}\right)_{n=1/2}=\frac{1}{2}$$

$$\text{então}\quad \frac{3}{2}\sum\left(\frac{1}{\left(n-\frac{1}{2}\right)}-\frac{1}{\left(n+\frac{3}{2}\right)}\right)\quad \text{Mengoli}\ \ p=2$$

$$\sum_{1}^{\infty}\frac{12}{4n^2+4n-3}=\frac{3}{2}\left(2+\frac{2}{3}-\lim\left(\frac{1}{n+\frac{1}{2}}+\frac{1}{n+\frac{3}{2}}\right)\right)=4$$

6.

a.

$$\sum_{1}^{\infty}\frac{sen(n+2)}{n^2+1}\xrightarrow{S.MOD.}\sum_{1}^{\infty}\frac{|sen(n+2)|}{n^2+1}$$

$$\frac{|sen(n+2)|}{n^2+1}\leq\frac{1}{n^2+1}$$

$$conv.\Leftarrow conv.\qquad (*)$$

$(*)\lim\dfrac{\frac{1}{n^2+1}}{\frac{1}{n^2}}=\lim\dfrac{n^2}{n^2+1}=1\neq 0,\infty$ como é finito e diferente de zero, as séries comparadas têm a mesma natureza, portanto a série é convergente.

Portanto a série de módulos é convergente e a série em estudo é Absolutamente Convergente.

b.

$$\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n+1}(4n+2)}{2n\sqrt{3n^3+5n+2}} = -\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n}(4n+2)}{2n\sqrt{3n^3+5n+2}} = -\sum_{1}^{\infty}\frac{4n+2}{2n\sqrt{3n^3+5n+2}}$$

Compara-se então com $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ que é uma série convergente:

$$\lim \frac{\frac{4n+2}{2n\sqrt{3n^3+5n+2}}}{\frac{1}{n^{3/2}}} = \lim \frac{\frac{4n+2}{2n\sqrt{3n^3+5n+2}}}{\frac{1}{n\sqrt{n}}} = \lim \frac{(4n+2)n\sqrt{n}}{2n\sqrt{3n^3+5n+2}} = \lim \frac{4n\sqrt{n}+2\sqrt{n}}{2\sqrt{3n^3+5n+2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \neq 0,\infty$$

como é finito e diferente de zero, as séries comparadas têm a mesma natureza, portanto a série é convergente.

7.

a.

$$\begin{array}{lcccccccccccc}
\max & z= & x_1 & + & 2x_2 & & & & & - & Mx_5 & & \\
\text{s.a} & & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & & & = & 6 \\
 & & & & x_2 & & & - & x_4 & + & x_5 & = & 2 \\
 & & x_1 \geq 0 & & x_2 \geq 0 & & x_3 \geq 0 & & x_4 \geq 0 & & x_5 \geq 0 & &
\end{array}$$

b.

	max	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
$L_0 - ML_2$	z	-1	-2	0	0	M	0	
	x_3	1	1	1	0	0	6	
	x_5	0	1	0	-1	1	2	
$L_0+(2+M)L_2$	z	-1	$-2-M$	0	M	0	$-2M$	
$L_1 - L_2$	x_3	1	1	1	0	0	6	
L_2	x_5	0	(1)	0	-1	1	2	$x_5 \leftarrow x_2$
L_0+2L_1	z	-1	0	0	-2	$2+M$	4	
L_1	x_3	1	0	1	(1)	–	4	$x_3 \leftarrow x_4$
L_2+L_1	x_2	0	1	0	-1	–	2	
	z	1	0	2	0	–	12	
	x_4	1	0	1	1	–	4	
	x_2	1	1	1	0	–	6	

Sol. Óptima: é $(x_1, x_2) = (0, 6)$ com $z = 12$

c. variáveis duais: u_1, u_2.

$$\begin{array}{lll} \min & w = 6u_1 + 2u_2 & \\ s.a & u_1 \geq 1 & \\ & u_1 + u_2 \geq 2 & \\ & u_1 \geq 0,\ u_2 \leq 0 & \end{array} \qquad \text{ou} \qquad \begin{array}{lll} \min & w = 6u_1 - 2u_2 & \\ s.a & u_1 \geq 1 & \\ & u_1 - u_2 \geq 2 & \\ & u_1 \geq 0,\ u_2 \geq 0 & \end{array}$$

d.

$$\begin{array}{lcl} x_2 = 6 > 0 & \Rightarrow & u_1 + u_2 = 2 \\ x_2 > 2 & \Rightarrow & u_2 = 0 \end{array}$$

Logo, a solução óptima do problema dual é $(u_1, u_2) = (2, 0)$ com $w = 12$.

8.

a.

x_A : quantidade de petróleo bruto de tipo A a adquirir (barris)

x_B : quantidade de petróleo bruto de tipo A a adquirir (barris)

$$\begin{array}{lccccll} \max & 70x_A & + & 65x_B & & & \text{minimizar custos de aquisição de matérias primas} \\ \text{s.a} & 0{,}7x_A & + & 0{,}4x_B & \geq & 600 & \text{as quantidades de matérias primas adquiridas devem ser} \\ & 0{,}1x_A & + & 0{,}5x_B & \geq & 1200 & \text{suficientes para cobrir os requisitos de gasolina e gasóleo} \\ & x_A \geq 0 & & x_B \geq 0 & & & \text{adquirir quantidades não negativas} \end{array}$$

b.

x_C : quantidade de gasolina a comprar (barris)

x_D : quantidade de gasóleo a comprar (barris)

$$\begin{array}{lcccccccccl} \max & 70x_A & + & 65x_B & + & 100x_C & + & 80x_D & & & \\ \text{s.a} & 0{,}7x_A & + & 0{,}4x_B & + & x_C & & & \geq & 600 & \\ & 0{,}1x_A & + & 0{,}5x_B & + & & + & x_D & \geq & 1200 & \\ & & & & & x_C & - & 2x_D & \geq & 0 & \text{quantidade adquirida de gasolina} \\ & x_A \geq 0 & & x_B \geq 0 & & x_C \geq 0 & & x_D \geq 0 & & & \text{pelo menos o dobro da de gasóleo} \end{array}$$