Católica Lisbon School of Business and Economics – UCP

MATEMÁTICA I

MINI-TESTE 2 - versão A

Duração: 90 minutos

Durante a prova não serão prestados quaisquer tipo de esclarecimentos.

Qualquer dúvida ou questão relativa ao enunciado deverá ser escrita na folha de prova para que possa ser tomada em consideração na correcção.

Separe em grupos de folhas diferentes
as resoluções do grupo I do grupo II e dos grupos III e IV

Apresente todos os cálculos que tiver de efectuar.

Justifique as respostas.

Simplifique o resultado final o máximo possível.

GRUPO I (60 PONTOS)

1) [20 pontos] Calcule a derivada de $y = [x.arctg(x)]^{\frac{1}{1+\cos(x)}}$.

2. [20 pontos] Determine a equação da recta normal à função $f(x) = \ln\left[1 + e^{2x} - e^{-2x}\right]$ no ponto de abcissa 0.

3. [20 pontos] Determine as condições necessárias para que a função $h = f \circ g$ seja simultaneamente estritamente crescente em $x = 3$ e tenha concavidade virada para cima em $x = 3$ sendo que $g(x) = sen\left[\ln(4 - x)\right]$.

GRUPO II (60 PONTOS)

Considere as seguintes funções reais de variável real definidas por

$$f(x) = \ln[1 - \ln(x+1)] \text{ e } g(x) = \begin{cases} \sqrt{2 - x^2} & \text{se } x > 1 \\ 0 & \text{se } x = 1 \\ \frac{e^{x-1}-1}{|x|} & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

1. [45 pontos] **Para cada função**:

[15 pontos] a) Determine o domínio.

[15 pontos] b) Estude a continuidade.

[15 pontos] c) Calcule a derivada em todos os pontos do domínio da função e, de seguida, apresente a função derivada.

2. [15 pontos] Escreva a expressão da função $\frac{f}{g}$ e explicite o domínio na expressão definida.

Católica Lisbon School of Business and Economics – UCP
MATEMÁTICA I
MINI-TESTE 2 - versão A

GRUPO III (45 PONTOS)

Calcule os limites:

1. [15 pontos] $\lim_{x\to 0^+}[arctg(x)]^{\frac{1}{\ln x}}$.

2. [15 pontos] $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{x\sqrt{3x^2-1}+|1-x|}{(2x)^2+2x+1}$.

3. [15 pontos] $\lim_{x\to -\infty}[e^{-x}-cos(x)]$.

GRUPO IV (35 PONTOS)

Classifique cada uma das seguintes afirmações com **V** se *Verdadeira* e com **F** se *Falsa*. Cada resposta **correcta** vale **5 pontos**, cada resposta **incorrecta** desconta **2 pontos**, sem resposta não desconta. Este grupo pode ter **cotação negativa**. Não é necessária qualquer justificação. Só se terá em consideração o valor lógico das proposições apresentado.

1. Se a recta $x = 4$ é uma assímptota da função f, então a recta $x = 5$ é uma assímptota da função $g(x) = 2 + f(x-1)$.

2. Se f é estritamente crescente, então f é diferenciável.

3. $\forall \delta > 0 \exists \epsilon > 0 \forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0\} : |x| < \epsilon \Rightarrow \left|\frac{x}{sen(3x)} - \frac{1}{3}\right| < \delta$.

4. Se $f(x) = [cos(x) - sen(x)]e^x$, então a primitiva de f é dada por $F(x) = cos(x).e^x + C, C \in \mathbb{R}$.

5. Seja f uma função diferenciável de ordem 3 qualquer tal que $f'(2) = f''(2) = 0$ e $f'''(2) = 5$. Então, f(2) é um mínimo relativo da função f.

6. O contradomínio da função $f(x) = e^x - \sqrt{3 + cos(x)}$ é $]-2, +\infty[$.

7. Se f é injectiva, diferenciável, $f'(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, e $f(2) = 1$, então $(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(2)}$.

Faculdade de Ciências Económicas e Empresariais – UCP
MATEMÁTICA I
MINI-TESTE 2 - versão A - TÓPICOS DE RESOLUÇÃO

GRUPO I

1.

$[x.arctg(x)]' = arctg(x) + \dfrac{x}{1+x^2}$

$\left[\dfrac{1}{1+cos(x)}\right]' = \dfrac{sen(x)}{[(1+cos(x)]^2}$

$y' = \left([x.arctg(x)]^{\frac{1}{1+cos(x)}}\right)' =$

$= \left(\dfrac{1}{1+cos(x)}\right)'.[x.arctg(x)]^{\frac{1}{1+cos(x)}}.\ln[x.arctg(x)] + \dfrac{1}{1+cos(x)}.[x.arctg(x)]^{\frac{1}{1+cos(x)}-1}[x.arctg(x)]' =$

$= \dfrac{sen(x)}{[1+cos(x)]^2}.[x.arctg(x)]^{\frac{1}{1+cos(x)}}.\ln[x.arctg(x)] + \dfrac{1}{1+cos(x)}.[x.arctg(x)]^{\frac{-cos(x)}{1+cos(x)}}\left[arctg(x) + \dfrac{x}{1+x^2}\right]$

2.

$f(0) = \ln(1) = 0$. Ponto (0,0).

$f'(x) = \dfrac{2e^{2x} + 2e^{-2x}}{1 + e^{2x} - e^{-2x}}$

$f'(0) = 4$

Declive da recta normal à função no ponto (0,0) é $-1/4$.

$y - 0 = -\frac{1}{4}(x - 0) \Leftrightarrow y = -\frac{1}{4}x$.

A recta normal à função no ponto (0,0) é dada por $y = -\frac{1}{4}x$.

3.

$g'(x) = -\dfrac{cos[\ln(4-x)]}{4-x}$

$g''(x) = -\dfrac{sen[\ln(4-x)] + cos[\ln(4-x)]}{(4-x)^2}$

$g(3) = 0, g'(3) = -1, g''(3) = -1$

$h(x) = f[g(x)]$

$h'(x) = f'[g(x)].g'(x)$

$h''(x) = f''[g(x)].[g'(x)]^2 + f'[g(x)].g''(x)$

$h'(3) = f'[g(3)].g'(3) = f'(0).g'(3) = -f'(0)$

$h''(3) = f''[g(3)].[g'(3)]^2 + f'[g(3)].g''(3) = f''(0).[-1]^2 + f'[0].(-1) = f''(0) - f'(0)$

Logo, f' tem de ser diferenciável em $x = 0$, $f'(0) < 0$ e $f''(0) > f'(0)$.

GRUPO II

1.
a)

$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x + 1 > 0 \wedge 1 - \ln(x+1) > 0\} =]-1, e-1[$

Para a função g:
$x > 1 : \{x \in]1, +\infty[: 2 - x^2 > 0\} = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \cap]1, +\infty[=]1, \sqrt{2}[$.
$x = 1 :$ Não há restrições.
$x < 1 : \{x \in]-\infty, 1[: x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0\} \cap]-\infty, 1[=]-\infty, 0[\cup]0, 1[$.
Logo, $D_g =]1, \sqrt{2}[\cup \{1\} \cup]-\infty, 0[\cup]0, 1[=]-\infty, 0[\cup]0, \sqrt{2}]$

b)

Para a função f:
f é contínua em todos os pontos do seu domínio, porque é a função composta de funções contínuas. Logo contínua em $]-1, e-1[$.

Para a função g:
$x < 1 : g$ é contínua em todos os pontos do seu domínio, porque é a função composta de funções contínuas. Logo contínua em $]1, \sqrt{2}]$.

$x < 0 \vee 0 < x < 1 : g$ é contínua em todos os pontos do seu domínio, porque é o quociente de duas funções contínuas. Logo contínua em $]-\infty, 0[\cup]0, 1[$.

$x = 1 :$

$$\lim_{x \to 1^+} g(x) = \lim_{x \to 1^+} \sqrt{2 - x^2} = 1$$

$$\lim_{x \to 1^-} g(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{e^{x-1} - 1}{x} = 0$$

Logo $\nexists \lim_{x \to 1} g(x)$.

Logo g não é contínua em $x = 1$.

g contínua em $]-\infty, 0[\cup]0, 1[\cup]1, \sqrt{2}]$.

c)

Para a função f:

$f(x) = \ln[1-\ln(x+1)]$. Logo, $f'(x) = \frac{-\frac{1}{x+1}}{1-\ln(x+1)} = -\frac{1}{(x+1)[1-\ln(x+1)]}$

Para a função g:

$1 \leq x < \sqrt{2}$: $g'(x) = -\frac{x}{\sqrt{2-x^2}}$

$0 < x < 1$: $g'(x) = \frac{x.e^{x-1}-e^{x-1}+1}{x^2}$

$x < 0$: $g'(x) = \frac{-x.e^{x-1}+e^{x-1}-1}{x^2}$

$x = 1$:

$$g'_d(1) = \lim_{h\to 0+} \frac{g(1+h)-g(1)}{h} = \lim_{h\to 0+} \frac{\sqrt{2-(1+h)^2}-0}{h} = \lim_{h\to 0+} \frac{\sqrt{1-2h-h^2}}{h} = +\infty$$

$$g'_e(1) = \lim_{h\to 0-} \frac{g(1+h)-g(1)}{h} = \lim_{h\to 0-} \frac{\frac{e^{1+h-1}-1}{|1+h|}-0}{h} = \lim_{h\to 0-} \frac{e^h-1}{h(1+h)} = \lim_{h\to 0-} \frac{e^h-1}{h}\frac{1}{1+h} =$$
$$=1 \times 1 = 1$$

Como as derivadas laterais são diferentes, não existe $g'(1)$.

$$\text{Logo, } g'(x) = \begin{cases} -\frac{x}{\sqrt{2-x^2}} & \text{se } x > 1 \\ \frac{xe^{x-1}-e^{x-1}+1}{x^2} & \text{se } 0 < x < 1 \\ \frac{-xe^{x-1}+e^{x-1}-1}{x^2} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

2.

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \begin{cases} \frac{\ln[1-\ln(x+1)]}{\sqrt{2-x^2}} & \text{se } 1 < x \leq \sqrt{2} \\ \frac{\ln[1-\ln(x+1)]|x|}{e^{x-1}-1} & \text{se } -1 < x < 0 \vee 0 < x < 1 \end{cases}$$

GRUPO III

1.

$\lim\limits_{x\to 0^+} [arctg(x)]^{\frac{1}{\ln x}} = 0^0$ Ind.

$\lim\limits_{x\to 0^+} [arctg(x)]^{\frac{1}{\ln x}} = e^{\ln\left[\lim_{x\to 0^+} [arctg(x)]^{\frac{1}{\ln x}}\right]}$

$$ln\left[\lim_{x\to 0^+} [arctg(x)]^{\frac{1}{\ln x}}\right] = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\ln x} ln[arctg(x)] = \lim_{x\to 0^+} \frac{ln[arctg(x)]}{\ln x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{\frac{1}{1+x^2}}{arctg(x)}}{\frac{1}{x}} =$$
$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{1+x^2}\frac{x}{arctg(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{1+x^2} \times \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{arctg(x)} \underset{R.C.}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{1+x^2} \times \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\frac{1}{1+x^2}} = 1 \times 1 = 1$$

Logo, $\lim\limits_{x\to 0^+} [arctg(x)]^{\frac{1}{\ln x}} = e^1 = e$.

2.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x\sqrt{3x^2-1}+|1-x|}{(2x)^2+2x+1} = \frac{\infty}{\infty} \text{ Ind.}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x\sqrt{3x^2-1}+|1-x|}{(2x)^2+2x+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{3}x|x|+|x|}{4x^2} = -\frac{\sqrt{3}}{4}$$

3.

$\lim_{x\to-\infty}[e^{-x} - cos(x)] = +\infty$, porque coseno é uma função limitada.

Atenção: $\nexists \lim_{x\to-\infty} cos(x)$.

GRUPO IV

1. V **2.** F **3.** V **4.** V **5.** F **6.** V **7.** V