Faculdade de Ciências Económicas e Empresariais – UCP
MATEMÁTICA I
MINI-TESTE 2 - versão A

Duração: 90 minutos
Durante a prova não serão prestados quaisquer tipo de esclarecimentos.
Qualquer dúvida ou questão relativa ao enunciado deverá ser escrita na folha de prova para que possa ser tomada em consideração na correcção.

Separe em grupos de folhas diferentes
as resoluções dos grupos I e II das resoluções dos grupos III e IV

Apresente todos os cálculos que tiver de efectuar.
Justifique as respostas.
Simplifique o resultado final o máximo possível.

GRUPO I (45 PONTOS)

Calcule a derivada de:

1. [15 pontos] $y = sen(\cos(\pi x + 2))$

2. [15 pontos] $y = x.arctg(x) - \ln\sqrt{1+x^2}$

3. [15 pontos] $y = x^{\ln x}$

GRUPO II (45 PONTOS)

Calcule os limites:

1. [15 pontos] $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{2x}$

2. [15 pontos] $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{sen(x)}{2x}$.

3. [15 pontos] $\lim\limits_{x\to 0^+} (e^x + x)^{1/x}$

Faculdade de Ciências Económicas e Empresariais – UCP
MATEMÁTICA I
MINI-TESTE 2 - versão A

GRUPO III (75 PONTOS)

Considere as seguintes funções reais de variável real definidas por

$$f(x) = \ln(|x| - 2) \text{ e } g(x) = \begin{cases} -arcsen(x) + \frac{\pi}{2} & \text{se } x \leq 1 \\ \sqrt{x-1} & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

1. [55 pontos] **Para cada função**:

[10 pontos] a) Determine o domínio.

[10 pontos] b) Determine a intersecção com os eixos.

[10 pontos] c) Estude a continuidade.

[15 pontos] d) Estude a diferenciabilidade e apresente a função derivada.

[10 pontos] e) Determine, quando possível, os limites quando x tende para $+\infty$ e $-\infty$.

2. [10 pontos] A função f é invertível? Em caso afirmativo, determine a função inversa.

3. [10 pontos] Escreva a expressão da função $f + g$, sem utilizar módulos.

GRUPO IV (35 PONTOS)

Classifique cada uma das seguintes afirmações com **V** se *Verdadeira* e com **F** se *Falsa*. Cada resposta **correcta** vale **5 pontos**, cada resposta **incorrecta** desconta **2 pontos**, sem resposta não desconta. Este grupo pode ter **cotação negativa**. Não é necessária qualquer justificação. Só se terá em consideração o valor lógico das proposições apresentado.

1. O gráfico da função $g(x) = f(x-1)$ corresponde ao gráfico da função f movido uma unidade para baixo.

2. $\lim_{x\to 0} \frac{x}{|x|} = 1$

3. Se f é diferenciável em $x = 1$, então f está definida em $x = 1$.

4. Se $f(x) = ln(x-1)$, então $f'(0) = -1$.

5. A expressão designatória da função inversa de $f(x) = 2cos(x)$ é $f^{-1}(x) = \frac{1}{2cos(x)}$.

6. O contradomínio da função $f(x) = 1 - 2e^{3x-1}$ é $]-\infty, 1[$.

7. Se $f(1) = 2$ e $\lim_{x\to 1} f(x) = 2$, então f é diferenciável em $x = 1$.

Faculdade de Ciências Económicas e Empresariais – UCP

MATEMÁTICA I

MINI-TESTE 2 - versão A - TÓPICOS DE RESOLUÇÃO

GRUPO I

1. $y' = -\pi sen(\pi x + 2)\cos(\cos(\pi x + 2))$

2. $y' = 1.arctg(x) + x\frac{1}{1+x^2} - \frac{\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+x^2}} = arctg(x) + \frac{x}{1+x^2} - \frac{x}{1+x^2} = arctg(x)$

3. $y' = \ln x . x^{\ln x - 1}.x' + (\ln x)'.x^{\ln x}.\ln x = \ln x . x^{\ln x - 1} + \frac{1}{x}.x^{\ln x}.\ln x =$

$= x^{\ln x - 1}\ln x[1 + \frac{1}{x}.x] = 2.x^{\ln x - 1}.\ln x$

GRUPO II

1. $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{2x} \underset{R.C.}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{2} = \frac{1}{+\infty} = 0$

2. $\lim_{x\to+\infty} \frac{sen(x)}{2x} = \lim_{x\to+\infty} sen(x)\frac{1}{2x} = 0$, usando, por exemplo, o Teorema do Encaixe.

3. $\lim_{x\to0^+} (e^x + x)^{1/x} = \lim_{x\to0^+} e^{\ln(e^x+x)^{1/x}} = \lim_{x\to0^+} e^{1/x\ln(e^x+x)} =$

$= e^{\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x}\ln(e^x+x)} = e^{\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(e^x+x)}{x}} \underset{R.C.}{=} e^{\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{e^x+1}{e^x+x}}{1}} = e^{\lim_{x\to0^+}\frac{e^x+1}{e^x+x}} = e^2$

Faculdade de Ciências Económicas e Empresariais – UCP

MATEMÁTICA I

MINI-TESTE 2 - versão A - TÓPICOS DE RESOLUÇÃO

GRUPO III

1.

a) $D_f = \{x \in \mathbb{R} : |x| - 2 > 0\} =]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$ $\qquad D_g = [-1, +\infty[$

b)

Para a função f:

$x = 0 \notin D_f$

$y = 0 : \ln(|x| - 2) = 0 \Leftrightarrow |x| - 2 = e^0 \Leftrightarrow |x| = 3 \Leftrightarrow x = -3 \vee x = 3$

f intersecta com os eixos nos pontos (-3,0) e (3,0).

Para a função g:

$x = 0 \Rightarrow y = -arcsen(0) + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$

$y = 0 : -arcsen(x) + \frac{\pi}{2} = 0 \Leftrightarrow arcsen(x) = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = 1 \in [-1, 1]$

$\sqrt{x-1} = 0 \Rightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \notin]1, +\infty[$

g intersecta com os eixos nos pontos (0,π/2) e (1,0).

c)

Para a função f: f é continua no seu domínio, ou seja, em $]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$ (justifique!)

Para a função g:

Em $[-1, 1[$, g é continua (justifique!)

Em $]1, +\infty[$, g é continua (justifique!)

Em $x = 1$:

$\lim_{x\to 1^+} g(x) = \lim_{x\to 1^+} \sqrt{x-1} = 0$

$\lim_{x\to 1^-} g(x) = \lim_{x\to 1^-} -arcsen(x) + \dfrac{\pi}{2} = 0$

$g(1) = 0 = \lim_{x\to 1} g(x)$

Logo, g é continua em $x = 1$ e por conseguinte, é continua em $\mathbb{R}$.

d)

Para a função f:

$f(x) = \begin{cases} \ln(x-2) \text{ se } x > 2 \\ \ln(-x-2) \text{ se } x < -2 \end{cases}$. Logo, $f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-2} \text{ se } x > 2 \\ \frac{-1}{-x-2} \text{ se } x < -2 \end{cases}$

Para a função g:

$-1 \leq x < 1$: $g'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$x > 1$: $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$

$x = 1$:

$$g'_d(1) = \lim_{h \to 0+} \frac{g(1+h) - g(1)}{h} = \lim_{h \to 0+} \frac{\sqrt{h} - 0}{h} = \lim_{h \to 0+} \frac{1}{\sqrt{h}} = +\infty$$

$$g'_e(1) = \lim_{h \to 0-} \frac{g(1+h) - g(1)}{h} = \lim_{h \to 0-} \frac{-arcsen(1+h) + \pi/2 - 0}{h} \underset{R.C.}{=} \lim_{h \to 0-} \frac{-\frac{1}{\sqrt{1-(1+h)^2}}}{1} = -\infty$$

Como as derivadas laterais são diferentes, não existe $g'(1)$.

Logo, $g'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & \text{se } x < 1 \\ \frac{1}{2\sqrt{x-1}} & \text{se } x > 1 \end{cases}$

e)

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} g(x) = \nexists$

2. Não é invertível, visto que não é injectiva. Por exemplo, $x = 3$ e $x = -3$ tem $y = 0$.

3. $(f+g)(x) = \ln(x-2) + \sqrt{x-1}$ (note que g não está definida para $x < -1$).

GRUPO IV

1. F **2.** F **3.** V **4.** F **5.** F **6.** V **7.** F