Católica Lisbon School of Business and Economics – UCP

MATEMÁTICA I

MINI-TESTE 1 - versão A

Duração: 90 minutos

Durante a prova não serão prestados quaisquer tipo de esclarecimentos.

Qualquer dúvida ou questão relativa ao enunciado deverá ser escrita na folha de prova para que possa ser tomada em consideração na correcção.

Separe em grupos de folhas diferentes as resoluções de cada grupo

Apresente todos os cálculos que tiver de efectuar.

Justifique as respostas.

Simplifique o resultado final o máximo possível.

GRUPO I (60 PONTOS)

Considere o seguinte sistema de equações lineares em x, y, z e w:

$$\begin{cases} x + \alpha y + z + \alpha w = 0 \\ \alpha y + z + \alpha w = \gamma \\ \alpha x + 2y + (\alpha+1)z + 2\alpha w = \beta \end{cases} \qquad \text{com } \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$$

1. [40 pontos] Discuta o sistema em função dos parâmetros α, β e γ.

2. [20 pontos] Resolva o sistema homogéneo do sistema quando $\alpha = -1$, $\beta = 2$ e $\gamma = 3$.

GRUPO II (75 PONTOS)

1. [20 pontos] Determine a forma geral das matrizes permutáveis com a matriz $W = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

2. [55 pontos] Sejam A e C matrizes de ordem n, $B_{n\times n}$ uma matriz simétrica e invertível, $D_{n\times n}$ uma matriz invertível, que verificam a relação $D - C = A$.

a) [20 pontos] Resolva , em ordem a X, a equação matricial $14D = (X^T C^T B)^T + B^T A X$.

b) [35 pontos] Usando a fórmula simplificada da alínea anterior, determine X, sabendo que

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \text{ e } B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Nota: Para o caso de não ter conseguido resolver a alínea (a), calcule $X = D^{-1}B$. A escolha desta opção significa que a cotação total desta alínea passa a 20 pontos.

Católica Lisbon School of Business and Economics – UCP

MATEMÁTICA I

MINI-TESTE 1 - versão A

GRUPO III (30 PONTOS)

1. [15 pontos] Determine duas raizes da equação:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ x & x^2 & x^3 \\ 5 & x^4 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

2. [15 pontos] Calcule:

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 & b \\ b & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b & a \end{vmatrix}$$

GRUPO IV (35 PONTOS)

Classifique cada uma das seguintes afirmações com **V** se *Verdadeira* e com **F** se *Falsa*. Cada resposta **correcta** vale **7 pontos**, cada resposta **incorrecta** desconta **3 pontos**, sem resposta não desconta. Este grupo pode ter **cotação negativa**. Não é necessária qualquer justificação. Só se terá em consideração o valor lógico das proposições apresentado.

1. O determinante do produto de matrizes quadradas A e B da mesma ordem é igual ao produto de determinantes, ou seja, $|AB| = |A| \times |B|$.

2. Se a matriz B é singular, então $|B^T| = 0$.

3. Sejam A e B duas matrizes de ordem n invertíveis. Então $A + B$ é invertível.

4. Se $A_{2\times 2}$ é uma matriz invertível, então o determinante da matriz kA com $k \in \mathbb{R}$ é $k^2|A|$.

5. Seja A uma matriz qualquer. Então AA^T é simétrica.

Católica Lisbon School of Business and Economics – UCP
MATEMÁTICA I
MINI-TESTE 1 - versão A
Duração: 90 minutos
Durante a prova não serão prestados quaisquer tipo de esclarecimentos.
Qualquer dúvida ou questão relativa ao enunciado deverá ser escrita na folha de prova para que possa ser tomada em consideração na correcção.

Tópicos de resolução
Apresente todos os cálculos que tiver de efectuar.
Justifique as respostas.
Simplifique o resultado final o máximo possível.

GRUPO I (60 PONTOS)

Considere o seguinte sistema de equações lineares em x, y, z e w:

$$\begin{cases} x+\alpha y+z+\alpha w=0 \\ \alpha y+z+\alpha w=\gamma \\ \alpha x+2y+(\alpha+1)z+2\alpha w=\beta \end{cases} \qquad \text{com } \alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$$

1. [40 pontos] Discuta o sistema em função dos parâmetros α, β e γ.
Resolução:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & \alpha & 1 & \alpha & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & \alpha & \gamma \\ \alpha & 2 & \alpha+1 & 2\alpha & \beta \end{array}\right] \xrightarrow[-\alpha L_1+L_3\to L_3]{} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & \alpha & 1 & \alpha & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & \alpha & \gamma \\ 0 & 2-\alpha^2 & 1 & 2\alpha-\alpha^2 & \beta \end{array}\right] \xrightarrow[C_2\leftrightarrow C_3]{} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & \alpha & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & \alpha & \alpha & \gamma \\ 0 & 1 & 2-\alpha^2 & 2\alpha-\alpha^2 & \beta \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[-L_2+L_3\to L_3]{} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & \alpha & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & \alpha & \alpha & \gamma \\ 0 & 0 & 2-\alpha-\alpha^2 & \alpha-\alpha^2 & \beta-\gamma \end{array}\right]$$

SPI: $2-\alpha-\alpha^2\neq 0 \Leftrightarrow \alpha\neq -2 \wedge \alpha\neq 1, \beta,\gamma\in\mathbb{R}$

- Se $\alpha=-2$
  $$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 & -6 & \beta-\gamma \end{array}\right]$$
  Se $\beta,\gamma\in\mathbb{R} \Longrightarrow$ SPI

- Se $\alpha = 1$
  $$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta - \gamma \end{array}\right]$$
  Se $\beta = \gamma, \gamma \in \mathbb{R} \Longrightarrow$ SPI
  Se $\beta \neq \gamma, \gamma \in \mathbb{R} \Longrightarrow$ SI

Conclusão:

- SPI: $(\alpha \neq 1 \wedge \beta, \gamma \in \mathbb{R}) \vee (\alpha = 1 \wedge \beta = \gamma), \gamma \in \mathbb{R}$
- SI: $\alpha = 1 \wedge \beta \neq \gamma, \gamma \in \mathbb{R}$

Atenção: Existem formas alternativas de encontrar a mesma conclusão final com resultados intermédios diferentes.

2. [20 pontos] Resolva o sistema homogéneo do sistema quando $\alpha = -1$, $\beta = 2$ e $\gamma = 3$.
Resolução:

Sistema quando $\alpha = -1$, $\beta = 2$ e $\gamma = 3$:
$$\begin{cases} x - y + z - w = 0 \\ -y + z - w = 3 \\ -x + 2y + -2w = 2 \end{cases}$$

Sistema homogéneo correspondente:
$$\begin{cases} x - y + z - w = 0 \\ -y + z - w = 0 \\ -x + 2y + -2w = 0 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[L1+L3 \to L_3]{} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[L2+L3 \to L_3]{} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} x + y - z - w = 0 \\ -y + z - w = 0 \\ 2z - 4w = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2w \\ y = w \\ z = 2w \end{cases}, w \in \mathbb{R}$$

$(2w, w, 2w, w) = w(2, 1, 2, 1), w \in \mathbb{R}$

GRUPO II (75 PONTOS)

1. [20 pontos] Determine a forma geral das matrizes permutáveis com a matriz $W = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

Resolução:

Seja
$V = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

Então WV=VW.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a+2c & b+2d \\ -a+c & -b+d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-b & 2a+b \\ c-d & 2c+d \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} a+2c = a-b \\ b+2d = 2a+b \\ -a+c = c-d \\ -b+d = 2c+d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -2c \\ - \\ a = d \\ - \end{cases}$$

$V = \begin{bmatrix} d & -2c \\ c & d \end{bmatrix}, c, d \in \mathbb{R}$

2. [55 pontos] Sejam A e C matrizes de ordem n, $B_{n\times n}$ uma matriz simétrica e invertível, $D_{n\times n}$ uma matriz invertível, que verificam a relação $D - C = A$.

a) [20 pontos] Resolva , em ordem a X, a equação matricial $14D = (X^TC^TB)^T + B^TAX$.

Resolução:

(a)
$14D = (X^TC^TB)^T + B^TAX \Leftrightarrow 14D = B^TCX + B^TAX \Leftrightarrow 14D = B(C+A)X \Leftrightarrow 14D = BDX \Leftrightarrow X = 14D^{-1}B^{-1}D$.

b) [35 pontos] Usando a fórmula simplificada da alínea anterior, determine X, sabendo que

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \text{ e } B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Nota: Para o caso de não ter conseguido resolver a alínea (a), calcule $X = D^{-1}B$. A escolha desta opção significa que a cotação total desta alínea passa a 20 pontos.

Resolução:

(b)

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[-3L_1+L_2\to L_2]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[-\frac{1}{5}L_2\to L_2]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/5 & 3/5 & -1/5 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[-L_2+L_3\to L_3]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/5 & 3/5 & -1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 14/5 & -3/5 & 1/5 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\frac{5}{14}L_3\to L_3]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/5 & 3/5 & -1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3/14 & 1/14 & 5/14 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\substack{-\frac{1}{5}L_3+L_2\to L_2 \\ -L_3+L_1\to L_1}]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 17/14 & -1/14 & -5/14 \\ 0 & 1 & 0 & 9/14 & -3/14 & -1/14 \\ 0 & 0 & 1 & -3/14 & 1/14 & 5/14 \end{array}\right] \xrightarrow[-2L_2+L_1\to L_1]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/14 & 5/14 & -3/14 \\ 0 & 1 & 0 & 9/14 & -3/14 & -1/14 \\ 0 & 0 & 1 & -3/14 & 1/14 & 5/14 \end{array}\right]$$

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \tfrac{1}{14}\begin{bmatrix} -1 & 5 & -3 \\ 9 & -3 & -1 \\ -3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} -1 & 5 & -3 \\ 9 & -3 & -1 \\ -3 & 1 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 6 & 5 & -3 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 14 & 21 \\ 21 & 14 & 7 \\ 7 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

GRUPO III (30 PONTOS)

1. [15 pontos] Determine duas raizes da equação:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ x & x^2 & x^3 \\ 5 & x^4 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

Resolução:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ x & x^2 & x^3 \\ 5 & x^4 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

Como só se pretendem duas raízes o resultado é imediato.

Para $x = 0$ obtém-se uma linha de zeros, o que implica que o determinante é nulo.

Para $x = 2$ obtém-se as primeiras duas linhas proporcionais, o que implica que o determinante é nulo.

Pelo que 0 e 2 são duas raízes da equação.

2. [15 pontos] Calcule:

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 & b \\ b & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b & a \end{vmatrix}$$

Resolução:

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 & b \\ b & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b & a \end{vmatrix} = a \times \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ b & a & 0 & 0 \\ 0 & b & a & 0 \\ 0 & 0 & b & a \end{vmatrix} + b \times \begin{vmatrix} b & a & 0 & 0 \\ 0 & b & a & 0 \\ 0 & 0 & b & a \\ 0 & 0 & 0 & b \end{vmatrix} = a^5 + b^5$$

GRUPO IV (35 PONTOS)

Classifique cada uma das seguintes afirmações com **V** se *Verdadeira* e com **F** se *Falsa*. Cada resposta **correcta** vale **7 pontos**, cada resposta **incorrecta** desconta **3 pontos**, sem resposta não desconta. Este grupo pode ter **cotação negativa**. Não é necessária qualquer justificação. Só se terá em consideração o valor lógico das proposições apresentado.

1. O determinante do produto de matrizes quadradas A e B da mesma ordem é igual ao produto de determinantes, ou seja, $|AB| = |A| \times |B|$.
Resolução: V

2. Se a matriz B é singular, então $|B^T| = 0$.
Resolução: V

3. Sejam A e B duas matrizes de ordem n invertíveis. Então $A + B$ é invertível.
Resolução: F

4. Se $A_{2\times 2}$ é uma matriz invertível, então o determinante da matriz kA com $k \in \mathbb{R}$ é $k^2|A|$.
Resolução: V

5. Seja A uma matriz qualquer. Então AA^T é simétrica.
Resolução: V