Faculdade de Ciências Económicas e Empresariais – UCP
MATEMÁTICA I
MINI-TESTE 1 - versão A
Duração: 90 minutos
Durante a prova não serão prestados quaisquer tipo de esclarecimentos.
Qualquer dúvida ou questão relativa ao enunciado deverá ser escrita na folha de prova para que possa ser tomada em consideração na correcção.

Separe em grupos de folhas diferentes
as resoluções dos grupos I e II das resoluções dos grupos III e IV

Nome: ______________________________ Nr ______________ Turma ____

Apresente todos os cálculos que tiver de efectuar.
Justifique as respostas.
Simplifique o resultado final o máximo possível.

GRUPO I (20 PONTOS)

Determine:

1. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ **2.** $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$

GRUPO II (80 PONTOS)

1. [30 pontos] Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$. Determine a forma geral da matriz B que satisfaz a equação matricial $BA = \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$.

2. [30 pontos] Seja $B_{n\times n}$ uma matriz simétrica e invertível, $C_{n\times n}$ uma matriz invertível, $A_{n\times n}$ uma matriz invertível que verifica a relação $A = B + I$ onde I é a matriz identidade e $A + B$ é uma matriz invertível.

Resolva , em ordem a X, a equação matricial:

(a) $XC = B$

(b) $XA + XB = B^T$

(c) $A(C^{-1}X^TC + B)^T = A^2$

3. [20 pontos] Uma matriz quadrada A diz-se *idempotente* se $A^2 = A$. Mostre que se $AB = A$ e $BA = B$, então B^TA^T é idempotente.

Faculdade de Ciências Económicas e Empresariais – UCP
MATEMÁTICA I
MINI-TESTE 1 - versão A

GRUPO III (65 PONTOS)

Considere o seguinte sistema de equações lineares em x, y e z:

$$\begin{cases} x + \beta y + \beta z = -\alpha \\ \beta x + 2y + z = 0 \\ x + y + \beta z = \beta^2 \end{cases} \qquad \text{com } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

1. [30 pontos] Discuta o sistema em função dos parâmetros α e β.

2. Considere $\beta = 2$ **e** $\alpha = 0$.

(2.a) [25 pontos] Determine a matriz inversa da matriz constituída pelos coeficientes das incógnitas.

(2.b) [10 pontos] Usando a inversa determinada na alínea anterior, resolva o sistema.

Nota: Se não calculou a inversa na alínea anterior, considere que $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1/2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.
Caso escolha esta matriz a cotação máxima nesta questão será de 8 pontos.

GRUPO IV (35 PONTOS)

Classifique cada uma das seguintes afirmações com **V** se *Verdadeira* e com **F** se *Falsa*. Cada resposta **correcta** vale **5 pontos**, cada resposta **incorrecta** desconta **2 pontos**, sem resposta não desconta. Este grupo pode ter **cotação negativa**. Não é necessária qualquer justificação. Só se terá em consideração o valor lógico das proposições apresentado.

1. Qualquer matriz quadrada, não nula, tem inversa.

2. A inversa do produto de matrizes quadradas A e B da mesma ordem é igual a $A^{-1}B^{-1}$.

3. Existem matrizes A e B, não quadradas, tais que $AB = BA$.

4. Se $|B^T| = 0$, então a matriz B é invertível.

5. Um sistema homogéneo é sempre possível.

6. A matriz inversa de uma matriz diagonal invertível é uma matriz simétrica.

7. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 5 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}$

Faculdade de Ciências Económicas e Empresariais – UCP
MATEMÁTICA I
MINI-TESTE 1 - versão A
Duração: 90 minutos
Durante a prova não serão prestados quaisquer tipo de esclarecimentos.
Qualquer dúvida ou questão relativa ao enunciado deverá ser escrita na folha de prova para que possa ser tomada em consideração na correcção.

Tópicos de resolução

Nome: ______________________________Nr ____________Turma ____

Apresente todos os cálculos que tiver de efectuar.
Justifique as respostas.
Simplifique o resultado final o máximo possível.

GRUPO I (20 PONTOS)

Determine:

1. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

Resolução:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (0+4+0)-(0+1-4)=7$$

2. $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$

Resolução:

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} \overset{C_2 \leftrightarrow C_3}{=} -\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -(2\times 4\times 1\times 4) = -32$$

GRUPO II (80 PONTOS)

1. [30 pontos] Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$. Determine a forma geral da matriz B que satisfaz a equação matricial $BA = \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$.

Resolução:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} a + 2b = 5 \\ 2a + 4b = 10 \\ c + 2d = -1 \\ 2c + 4d = -2 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 5 - 2b \\ - \\ c = -1 - 2d \\ - \end{cases}$$

$$B = \begin{bmatrix} 5 - 2b & b \\ -1 - 2d & d \end{bmatrix}, b, d \in \mathbb{R}.$$

2. [30 pontos] Seja $B_{n\times n}$ uma matriz simétrica e invertível, $C_{n\times n}$ uma matriz invertível, $A_{n\times n}$ uma matriz invertível que verifica a relação $A = B + I$ onde I é a matriz identidade e $A + B$ é uma matriz invertível.

Resolva , em ordem a X, a equação matricial:

(a) $XC = B$

(b) $XA + XB = B^T$

(c) $A(C^{-1}X^TC + B)^T = A^2$

Resolução:

(a) $XC = B \Leftrightarrow XCC^{-1} = BC^{-1} \Leftrightarrow X = BC^{-1}$

(b) $XA+XB = B^T \Leftrightarrow X(A+B) = B \Leftrightarrow X(A+B)(A+B)^{-1} = B(A+B)^{-1} \Leftrightarrow X = B(A+B)^{-1}$

(c) $A(C^{-1}X^TC + B)^T = A^2 \Leftrightarrow A^{-1}A(C^{-1}X^TC + B)^T = A^{-1}A^2 \Leftrightarrow (C^{-1}X^TC + B)^T = A \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow C^TX(C^{-1})^T + B^T = A \Leftrightarrow C^TX(C^{-1})^T = A - B \Leftrightarrow C^TX(C^{-1})^T = I \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (C^T)^{-1}C^TX(C^{-1})^TC^T = (C^T)^{-1}IC^T \Leftrightarrow X = (C^{-1})^TC^T \Leftrightarrow X = I$

3. [20 pontos] Uma matriz quadrada A diz-se *idempotente* se $A^2 = A$. Mostre que se $AB = A$ e $BA = B$, então $B^T A^T$ é idempotente.

Resolução:
Queremos mostrar que $(B^T A^T)^2 = B^T A^T$.

$(B^T A^T)^2 = B^T A^T B^T A^T = B^T (BA)^T A^T = B^T B^T A^T = B^T (AB)^T = B^T A^T$ c.q.m.

GRUPO III (65 PONTOS)

Considere o seguinte sistema de equações lineares em x, y e z:

$$\begin{cases} x + \beta y + \beta z = -\alpha \\ \beta x + 2y + z = 0 \\ x + y + \beta z = \beta^2 \end{cases} \qquad \text{com } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

1. [30 pontos] Discuta o sistema em função dos parâmetros α e β.

Resolução:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \beta & \beta & -\alpha \\ \beta & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \beta & \beta^2 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{L_2-\beta L_1 \to L_2 \\ L_3 - L_1 \to L_3}]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \beta & \beta & -\alpha \\ 0 & 2-\beta^2 & 1-\beta^2 & \alpha\beta \\ 0 & 1-\beta & 0 & \beta^2+\alpha \end{array}\right] \xrightarrow[C_2 \leftrightarrow C_3]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \beta & \beta & -\alpha \\ 0 & 1-\beta^2 & 2-\beta^2 & \alpha\beta \\ 0 & 0 & 1-\beta & \beta^2+\alpha \end{array}\right]$$

SPD: $1-\beta^2 \neq 0 \wedge 1-\beta \neq 0 \Leftrightarrow \beta \neq -1 \wedge \beta \neq 1$

- Se $\beta = -1$ $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -\alpha \\ 0 & 0 & 1 & -\alpha \\ 0 & 0 & 2 & 1+\alpha \end{array}\right] \xrightarrow[L_3 - 2L_2 \to L_2]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -\alpha \\ 0 & 0 & 1 & -\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 1+3\alpha \end{array}\right]$

  Se $\alpha = -1/3 \Longrightarrow$ SPI
  Se $\alpha \neq -1/3 \Longrightarrow$ SI

- Se $\beta = 1$ $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -\alpha \\ 0 & 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 1+\alpha \end{array}\right]$

  Se $\alpha = -1 \Longrightarrow$ SPI
  Se $\alpha \neq -1 \Longrightarrow$ SI

Conclusão:

- SPD: $\beta \neq -1 \wedge \beta \neq 1$
- SPI: $(\beta = 1 \wedge \alpha = -1) \vee (\beta = -1 \wedge \alpha = -1/3)$
- SI: $(\beta = 1 \wedge \alpha \neq -1) \vee (\beta = -1 \wedge \alpha \neq -1/3)$

2. Considere $\beta = 2$ **e** $\alpha = 0$.

(2.a) [25 pontos] Determine a matriz inversa da matriz constituída pelos coeficientes das incógnitas.

Resolução:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{L_2-2L_1\to L_2 \\ L_3-L_1\to L_3}]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[L_2\leftrightarrow L_3]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[-L_2\leftrightarrow L_2]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -3 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3+2L_2\to L_3]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[L_3/(-3)\to L_3]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/3 & 2/3 \end{array}\right] \xrightarrow[L_1-2L_3\to L_1]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 2/3 & -4/3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/3 & 2/3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[L_1-2L_2\to L_1]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 2/3 & 2/3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/3 & 2/3 \end{array}\right]$$

Logo $A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2/3 & 2/3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$

Podia também resolver o exercício usando a matriz adjunta.

(2.b) [10 pontos] Usando a inversa determinada na alínea anterior, resolva o sistema.

Resolução:

Logo $X = A^{-1}b = \begin{bmatrix} -1 & 2/3 & 2/3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1/3 & 2/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8/3 \\ -4 \\ 8/3 \end{bmatrix}$

GRUPO IV (35 PONTOS)

Classifique cada uma das seguintes afirmações com **V** se *Verdadeira* e com **F** se *Falsa*. Cada resposta **correcta** vale **5 pontos**, cada resposta **incorrecta** desconta **2 pontos**, sem resposta não desconta. Este grupo pode ter **cotação negativa**. Não é necessária qualquer justificação. Só se terá em consideração o valor lógico das proposições apresentado.

1. Qualquer matriz quadrada, não nula, tem inversa.
Resolução: F

2. A inversa do produto de matrizes quadradas A e B da mesma ordem é igual a $A^{-1}B^{-1}$.
Resolução: F

3. Existem matrizes A e B, não quadradas, tais que $AB = BA$.
Resolução: F

4. Se $|B^T| = 0$, então a matriz B é invertível.
Resolução: F

5. Um sistema homogéneo é sempre possível.
Resolução: V

6. A matriz inversa de uma matriz diagonal invertível é uma matriz simétrica.
Resolução: V

7. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 5 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}$
Resolução: V