CATÓLICA LISBON
SCHOOL OF BUSINESS & ECONOMICS
UNIVERSIDADE CATÓLICA PORTUGUESA

Soluções da 2ª Frequência de Matemática I

11 de janeiro de 2013

Grupo I

1. Considere a função definida por $f(x) = \begin{cases} \int_1^{e^{x^2}} \ln t dt, & x \geq 0 \\ (x+1)e^{\frac{1}{x+1}}, & x < 0. \end{cases}$

(1 val.) (i) Determine o domínio de f e estude esta função quanto à continuidade.

Solução: O domínio de f é dado por $D_f = \mathbb{R}\backslash\{-1\}$ e a função é contínua em $D_f\backslash\{0\}$, uma vez que

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \int_1^{e^{x^2}} \ln t dt = \int_1^1 \ln t dt = 0 \neq e = \lim_{x\to 0^-} (x+1)e^{\frac{1}{x+1}} = \lim_{x\to 0^-} f(x).$$

(2 val.) (ii) Calcule a derivada de f e apresente-a na forma mais simplificada possível. Determine os intervalos de monotonia e os extremos locais (caso existam).

Solução: Tem-se $f'(x) = \begin{cases} 2x^3 e^{x^2}, & x > 0 \\ \frac{x}{x+1} e^{\frac{1}{x+1}}, & x \in \mathbb{R}^-\backslash\{-1\}, \end{cases}$ não sendo a função diferenciável na origem, visto não ser contínua neste ponto.

A função f é estritamente decrescente em $]-1,0[$, estritamente crescente em $]-\infty,-1[$ e em $]0,+\infty[$, e admite um mínimo local dado por $f(0)=0$.

(1,5 val.) 2. Indique, justificando, se a função φ definida em $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ por

$$\varphi(x) = \frac{x + |x|(1+x)}{x} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

é prolongável por continuidade à origem.

Solução: A função não é prolongável por continuidade à origem, pois não existe

$$\lim_{x\to 0^+} \varphi(x) = \lim_{x\to 0^+} (2+x) \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

3. Sejam $a(x)$ e $b(x)$ duas funções que admitem ambas a recta $y = x+1$ como assimptota quando x tende para $+\infty$. Mostre que:

(1,5 val.) (i) $\lim_{x\to+\infty}(a(x) - b(x)) = 0$;

Solução: $\lim_{x\to+\infty}(a(x) - b(x)) = \lim_{x\to+\infty}[(a(x) - (x-1)) - (b(x) - (x-1)) = \lim_{x\to+\infty}(a(x) - (x-1)) - \lim_{x\to+\infty}(b(x) - (x-1)) = 0 - 0 = 0.$

(1,5 val.) (ii) $\lim_{x\to+\infty}\frac{a(x)}{b(x)} = 1$.

Solução: $\lim_{x\to+\infty}\frac{a(x)}{b(x)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{a(x)}{x}}{\frac{b(x)}{x}} = \frac{\lim_{x\to+\infty}\frac{a(x)}{x}}{\lim_{x\to+\infty}\frac{b(x)}{x}} = 1.$

Grupo II

(1,5 val.) 1. Sabendo que h é uma função diferenciável em $\mathbb{R}$ tal que $h'(x)h(x) \neq 0$, para todo o $x \in \mathbb{R}$ e que $h(0) = 1$, calcule

$$\lim_{x\to 0}|h(x)|^{\frac{1}{h(x)-1}}.$$

Solução: $\lim_{x\to 0}|h(x)|^{\frac{1}{h(x)-1}} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{\ln|h(x)|}{h(x)-1}} \underset{R.C.}{=} e^{\lim_{x\to 0}\frac{1}{h(x)}} = e.$

(1,5 val.) 2. Mostre que $y(x) = x\sin(\ln x)$ é solução da equação

$$xy' = y + \sqrt{x^2 - y^2},$$

para todo o $x \in]0, e^{\frac{\pi}{2}}[$.

Solução: Uma vez que $y'(x) = \sin(\ln x) + \cos(\ln x)$, temos:

$$y + \sqrt{x^2 - y^2} = x\sin(\ln x) + \sqrt{x^2\cos^2(\ln x)} = x\sin(\ln x) + |x\cos(\ln x)| =$$

$$= x(\sin(\ln x) + \cos(\ln x)) = xy',$$

para todo o $x \in]0, e^{\frac{\pi}{2}}[$.

(1,5 val.) 3. Mostre que a derivada da função $g(x) = 6x + 3\text{cotg}(2x) - \text{cotg}^3(2x)$ é dada por $g'(x) = 6\text{cotg}^4(2x)$.

Solução: $g'(x) = \frac{6\sin^4(2x) - 6\sin^2(2x) + 6\cos^2(2x)}{\sin^4(2x)} = \frac{6\sin^4(2x) - 12\sin^2(2x) + 6}{\sin^4(2x)} = \frac{6(\sin^2(2x) - 1)^2}{\sin^4(2x)} = \frac{6\cos^4(2x)}{\sin^4(2x)} = 6\text{cotg}^4(2x).$

Grupo III

1. Calcule as primitivas:

(1,5 val.) (i) $P\frac{x+3}{\sqrt{1-4x^2}}$;

Solução: $P\frac{x+3}{\sqrt{1-4x^2}} = -\frac{\sqrt{1-4x^2}}{4} + \frac{3}{2}\arcsin(2x) + C$, $C \in \mathbb{R}$.

(1,5 val.) (ii) $P\frac{e^{\arctan(2x)}+x\ln(1+4x^2)+1}{1+4x^2}$.

Solução: $P\frac{e^{\arctan(2x)}+x\ln(1+4x^2)+1}{1+4x^2} = \frac{e^{\arctan(2x)}}{2} + \frac{\ln^2(1+4x^2)}{16} + \frac{\arctan(2x)}{2} + C$, $C \in \mathbb{R}$.

2. Calcule, caso existam, os seguintes integrais:

(1,5 val.) (i) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+2\sin x}{\cos^2 x}dx$;

Solução: $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+2\sin x}{\cos^2 x}dx = [\tan x + \frac{2}{\cos x}]_0^{\frac{\pi}{4}} = 2\sqrt{2} - 1$.

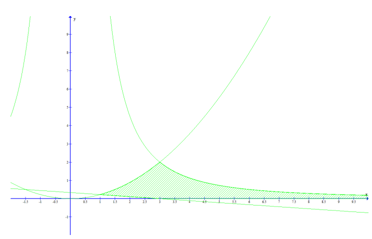
(1,5 val.) (ii) $\int_0^1 \frac{1}{x\sqrt{1-\ln x}}dx$;

Solução: $\int_0^1 \frac{1}{x\sqrt{1-\ln x}}dx = \lim_{a\to 0^+} \int_a^1 \frac{1}{x\sqrt{1-\ln x}}dx = \lim_{a\to 0^+} [-2\sqrt{1-\ln x}]_a^1 = +\infty$.

(2 val.) 3. Determine a área da seguinte região plana:

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 9y \leq 2x^2, x^2y \leq 18, x + 9y \geq 3, x \geq 0, y \geq 0\}.$$

Solução:



A área pretendida é dada por:

$$\int_1^3 (\frac{2x^2}{9} - \frac{(3-x)}{9})dx + \int_3^{+\infty} \frac{18}{x^2}dx = \frac{208}{27}.$$