Faculdade de Ciências Económicas e Empresariais – UCP
MATEMÁTICA I
FREQUÊNCIA 2 - versão A
Duração: 150 minutos

Durante a prova não serão prestados quaisquer tipo de esclarecimentos. Qualquer dúvida ou questão relativa ao enunciado deverá ser escrita na folha de prova para que possa ser tomada em consideração na correcção. Apresente todos os cálculos que tiver de efectuar. Justifique as respostas. Simplifique o resultado final o máximo possível. Não é possível desistir após o início desta prova.

Separe em grupos de folhas diferentes as resoluções dos grupos I e II das resoluções do grupo III das resoluções dos grupos IV e V

GRUPO I (50 PONTOS)

Considere a função real de variável real definida por:

$$w(x) = \begin{cases} arctg(\alpha x) + \beta \text{ se } x > 0 \\ 2 \text{ se } x = 0 \\ 4(\alpha e^x + 3)^x - \beta \text{ se } x < 0 \end{cases} \qquad \text{com } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

1. [15 pontos] Determine α e β de forma a que $w(x)$ seja uma função contínua.

2. [25 pontos] Considere $\alpha = \beta = 3$.

2.i. [10 pontos] Calcule, se existir, a derivada da função w em $x = 0$.

2.ii. [15 pontos] Determine a função derivada de w.

3. [10 pontos] Considere $\alpha = \beta = 1$ e a função $u(x) = w(2x^3 - x)$. Determine a equação da recta tangente à função u no ponto de abcissa 1.

GRUPO II (30 PONTOS)

Determine a área do domínio plano definido pelas seguintes condições (represente primeiro a área definida):

1. [15 pontos] $\begin{cases} y \leq x^2 + 4 \\ x + y \leq 6 \\ x \geq -3, y \geq 0 \end{cases}$

2. [15 pontos] $\begin{cases} y \leq e^{-x} \\ y \geq -e^{-x} \\ x + 1 \geq 0 \end{cases}$

GRUPO III (30 PONTOS)

Defina uma função real de variável real f tal que:

1. [10 pontos] f seja diferenciável no seu domínio, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ e $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x)$ não exista.

2. [10 pontos] f seja contínua no seu domínio, $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = 0$ e $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(2x) - f(x)] \neq 0$.

3. [10 pontos] f seja descontínua em $x = 0$, $\int_{-1}^{1} f(x)dx = 0$ e $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

GRUPO IV (50 PONTOS)

Considere a função real de variável real $g(x) = \dfrac{\sqrt{1-\ln|x|}}{x}$.

1. [10 pontos] Determine o domínio da função g.

2. [10 pontos] Determine $\lim_{x\to 0} g(x)$ e $\lim_{x\to 1^+} g(x)^{\frac{2}{x-1}}$.

3. [10 pontos] Determine $\displaystyle\int_{1/e}^{1} g(x)dx$.

4. [10 pontos] Seja $h(t) = \frac{d}{dt}\left(\displaystyle\int_{t/2}^{e^t} g^2(x)dx\right), \forall t \in]0,+\infty[$. Determine $h(2)$.

5. [10 pontos] Mostre que existe pelo menos uma solução da equação $g(x) = 2x$ no intervalo $]e^{-1}, 1[$.

GRUPO V (40 PONTOS)

Escolha uma das opções (A,B,C,D). Cada resposta **correcta** vale **10 pontos**, cada resposta **incorrecta** desconta **3 pontos**, sem resposta não desconta. Este grupo pode ter **cotação negativa**. Não é necessária qualquer justificação. Só se terá em consideração a opção apresentada.

1. Seja z uma função diferenciável e $r, s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por $r(x) = z(e^x)$ e $s(x) = z(senx)$.
Qual das seguintes afirmações é *FALSA*?

(A) $r'(0) + s'(\pi/2) = z'(1)$

(B) Se z é uma função crescente, então r é uma função crescente

(C) Se $z(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, então $r(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

(D) Se $z(x) = \begin{cases} 2 \text{ se } -1 \le x \le 1 \\ 1 \text{ se } x < -1 \\ 0 \text{ se } x > 1 \end{cases}$, então o contradomínio da função s é $\{0, 1, 2\}$

2. Considere as seguintes afirmações:

I. A primitiva do produto de duas funções é o produto das primitivas das funções

II. $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ III. A derivada de uma função par é uma função par

A lista completa das afirmações correctas é:

(A) I e II (B) I e III (C) II e III (D) Nenhuma das afirmações

3. Qual das seguintes afirmações é *VERDADEIRA*:

(A) Se f é uma função contínua em $x = a$, então e^fé diferenciável em $x = a$

(B) Se f é uma função diferenciável em $x = a$, então f^2 está definida em $x = a$

(C) Se f é uma função contínua em $x = a$, então fof é contínua em $x = a$

(D) Se f é uma função diferenciável em $x = a$, então $1/f$ é contínua em $x = a$

4. Qual das seguintes afirmações é *VERDADEIRA*:

(A) $P\dfrac{1}{1+x^4} = arctg(x^2) + C, C \in \mathbb{R}$ (B) $P\dfrac{x^3}{1+x^4} = \dfrac{1}{4}(1+x^4)^{-2} + C, C \in \mathbb{R}$

(C) $P\dfrac{x}{1+2x^2+x^4} = -\dfrac{1}{2+2x^2} + C, C \in \mathbb{R}$ (D) $P\dfrac{x}{\sqrt{1-x^4}} = arcsen(x^2) + C, C \in \mathbb{R}$

Faculdade de Ciências Económicas e Empresariais – UCP

MATEMÁTICA I

FREQUÊNCIA 2 - versão A - Tópicos de Resolução

GRUPO I (50 PONTOS)

Considere a função real de variável real definida por:

$$w(x) = \begin{cases} arctg(\alpha x) + \beta \text{ se } x > 0 \\ 2 \text{ se } x = 0 \\ 4(\alpha e^x + 3)^x - \beta \text{ se } x < 0 \end{cases} \qquad \text{com } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

1. [15 pontos] Determine α e β de forma a que $w(x)$ seja uma função contínua.

2. [25 pontos] Considere $\alpha = \beta = 3$.

2.i. [10 pontos] Calcule, se existir, a derivada da função w em $x = 0$.

2.ii. [15 pontos] Determine a função derivada de w.

3. [10 pontos] Considere $\alpha = \beta = 1$ e a função $u(x) = w(2x^3 - x)$. Determine a equação da recta tangente à função u no ponto de abcissa 1.

1.

$\lim\limits_{x \to 0^+} w(x) = \beta$

$\lim\limits_{x \to 0^-} w(x) = 4 - \beta$ (se $\alpha \neq -3$)

Para ser continua em $x = 0$: $\lim\limits_{x \to 0^+} w(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} w(x) = w(0)$. Logo $\beta = 2$.

Note-se que $\alpha = -3$ resulta numa indeterminação no segundo ramo (0^0), mas resolvendo temos $\beta = 2$ na mesma.

Conclusão: $\beta = 2, \forall \alpha \in \mathbb{R}$

2.i.

$$w'_d(0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{arctg(3h) + 3 - 2}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{1}{h} = +\infty$$

$$w'_e(0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{4(3e^h + 3)^h - 3 - 2}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-1}{h} = +\infty$$

Logo, $w'(0) = +\infty$.

2.ii.

$$w'(x) = \begin{cases} \frac{3}{1+9x^2} \text{ se } x > 0 \\ 12x(3e^x + 3)^{x-1}.e^x + 4(3e^x + 3)^x. \ln(3e^x + 3) \text{ se } x < 0 \end{cases}$$

3.

$x > 0, w(x) = arctg(x) + 1 \Rightarrow w'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

$u(1) = w(1) = arctg(1) + 1 = \pi/4 + 1$

$u'(x) = w'(x)(6x^2 - 1)$

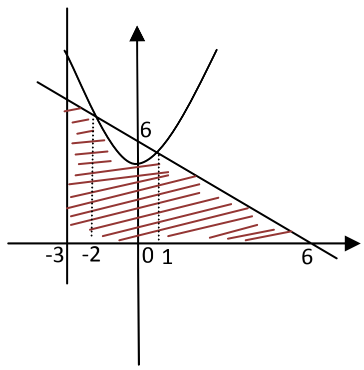
$u'(1) = w'(1) \times 5 = \frac{1}{2} \times 5 = \frac{5}{2}$

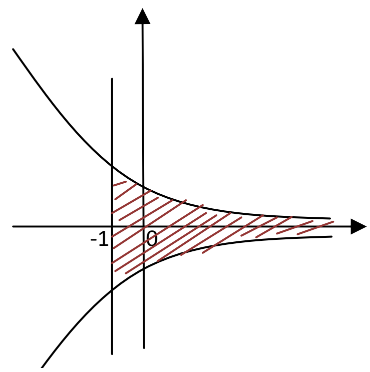
Logo, $y = \frac{5}{2}x + \frac{\pi}{4} - \frac{3}{2}$.

GRUPO II (30 PONTOS)

Determine a área do domínio plano definido pelas seguintes condições (represente primeiro a área definida):

1. [15 pontos] $\begin{cases} y \leq x^2 + 4 \\ x + y \leq 6 \\ x \geq -3, y \geq 0 \end{cases}$ **2.** [15 pontos] $\begin{cases} y \leq e^{-x} \\ y \geq -e^{-x} \\ x + 1 \geq 0 \end{cases}$





1.

$$A = \int_{-3}^{-2} (6 - x)dx + \int_{-2}^{1} (x^2 + 4)dx + \int_{1}^{6} (6 - x)dx = 36$$

2.

$$A = 2\int_{-1}^{+\infty} e^{-x}dx = 2 \times \lim_{b \to +\infty} \int_{-1}^{b} e^{-x}dx = 2 \times \lim_{b \to +\infty} [e - e^{-b}] = 2e$$

GRUPO III (30 PONTOS)

Defina uma função real de variável real f tal que:

1. [10 pontos] f seja diferenciável no seu domínio, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$ e $\lim_{x \to +\infty} f'(x)$ não exista.

2. [10 pontos] f seja contínua no seu domínio, $\lim_{x \to +\infty} f'(x) = 0$ e $\lim_{x \to +\infty} [f(2x) - f(x)] \neq 0$.

3. [10 pontos] f seja descontínua em $x = 0$, $\int_{-1}^{1} f(x)dx = 0$ e $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

1.
$f(x) = \frac{sen(x^2)}{x}$

2.
$f(x) = \ln(x)$

3.
$$f(x) = \begin{cases} x^3, x \neq 0 \\ 1, x = 0 \end{cases}$$

GRUPO IV (50 PONTOS)

Considere a função real de variável real $g(x) = \dfrac{\sqrt{1-\ln|x|}}{x}$.

1. [10 pontos] Determine o domínio da função g.

2. [10 pontos] Determine $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ e $\lim\limits_{x\to 1^+} g(x)^{\frac{2}{x-1}}$.

3. [10 pontos] Determine $\displaystyle\int_{1/e}^{1} g(x)dx$.

4. [10 pontos] Seja $h(t) = \dfrac{d}{dt}\left(\displaystyle\int_{t/2}^{e^t} g^2(x)dx\right), \forall t \in]0,+\infty[$. Determine $h(2)$.

5. [10 pontos] Mostre que existe pelo menos uma solução da equação $g(x) = 2x$ no intervalo $]e^{-1}, 1[$.

1.

$D_g = \{x \in \mathbb{R} : |x| > 0 \wedge 1 - \ln|x| > 0 \wedge x \neq 0\} = [-e, 0[\cup]0, e]$

2.

$\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = -\infty$

Logo, $\nexists \lim\limits_{x\to 0} g(x)$.

$\lim\limits_{x\to 1^+} g(x)^{\frac{2}{x-1}} = 1^\infty$ Ind.

$$\lim_{x\to 1^+} g(x)^{\frac{2}{x-1}} = \lim_{x\to 1^+}\left[g^2(x)\right]^{1/(x-1)} = \lim_{x\to 1^+} e^{ln\left[g^2(x)\right]^{\frac{1}{x-1}}} = \lim_{x\to 1^+} e^{\frac{1}{x-1}\ln\left(g^2(x)\right)}$$

Calculando só a parte de cima.

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{x-1}\ln\left(g^2(x)\right) = \lim_{x\to 1^+}\frac{\ln\left(\frac{1-\ln(x)}{x^2}\right)}{x-1}$$

Aplicando a Regra de Cauchy

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{\frac{-\frac{1}{x}.x^2-(1-\ln x).2x}{x^4}}{\frac{1-\ln(x)}{x^2}} = \lim_{x\to 1^+}\frac{\frac{-x-(1-\ln x).2x}{x^4}}{\frac{1-\ln(x)}{x^2}} = -3$$

Logo $\lim\limits_{x\to 1^+} g(x)^{\frac{2}{x-1}} = e^{-3}$

3.

$$\int_{1/e}^{1} g(x)dx = -\frac{2}{3}\left[\sqrt{(1-\ln x)^3}\right]_{1/e}^{1} = \frac{2}{3}[2\sqrt{2}-1]$$

4.

$$h(t) = \frac{d}{dt}\left(\int_{t/2}^{e^t} g^2(x)dx\right) = e^t\frac{|1-\ln e^t|}{e^{2t}} - \frac{1}{2}\frac{|1-\ln(t/2)|}{t^2/4} = \frac{|1-t|}{e^t} - 2\frac{|1-\ln(t/2)|}{t^2}$$

$h(2) = \frac{1}{e^2} - 2\times\frac{1}{4} = e^{-2} - \frac{1}{2}$

5.

$g(x) = 2x \Leftrightarrow \frac{\sqrt{1-\ln x}}{x} - 2x = 0$ (x tem de ser positivo decorrente do intervalo desejado)

Considere $m(x) = \frac{\sqrt{1-\ln x}}{x} - 2x$.

m é contínua em $]0, e]$. Logo em $[e^{-1}, 1]$.

$m(e^{-1}) = \sqrt{2}e - \frac{2}{e} > 0$

$m(1) = -1 < 0$

Logo, $m(e^{-1}) \times m(1) < 0$.

Portanto, pelo corolário do Teorema de Bolzano, m tem pelo menos um zero em $]e^{-1}, 1[$, e consequentemente existe pelo menos uma solução da equação $g(x) = 2x$ no intervalo $]e^{-1}, 1[$.

GRUPO V (40 PONTOS)

Escolha uma das opções (A,B,C,D). Cada resposta **correcta** vale **10 pontos**, cada resposta **incorrecta** desconta **3 pontos**, sem resposta não desconta. Este grupo pode ter **cotação negativa**. Não é necessária qualquer justificação. Só se terá em consideração a opção apresentada.

1. Seja z uma função diferenciável e $r, s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por $r(x) = z(e^x)$ e $s(x) = z(senx)$.
Qual das seguintes afirmações é *FALSA*?

(A) $r'(0) + s'(\pi/2) = z'(1)$

(B) Se z é uma função crescente, então r é uma função crescente

(C) Se $z(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, então $r(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

(D) Se $z(x) = \begin{cases} 2 \text{ se } -1 \leq x \leq 1 \\ 1 \text{ se } x < -1 \\ 0 \text{ se } x > 1 \end{cases}$, então o contradomínio da função s é $\{0, 1, 2\}$

Solução: *D*

2. Considere as seguintes afirmações:

I. A primitiva do produto de duas funções é o produto das primitivas das funções

II. $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ III. A derivada de uma função par é uma função par

A lista completa das afirmações correctas é:

(A) I e II (B) I e III (C) II e III (D) Nenhuma das afirmações

Solução: *D*

3. Qual das seguintes afirmações é *VERDADEIRA*:

(A) Se f é uma função contínua em $x = a$, então e^fé diferenciável em $x = a$

(B) Se f é uma função diferenciável em $x = a$, então f^2 está definida em $x = a$

(C) Se f é uma função contínua em $x = a$, então fof é contínua em $x = a$

(D) Se f é uma função diferenciável em $x = a$, então $1/f$ é contínua em $x = a$

Solução: *B*

4. Qual das seguintes afirmações é *VERDADEIRA*:

(A) $P\dfrac{1}{1+x^4} = arctg(x^2) + C, C \in \mathbb{R}$ (B) $P\dfrac{x^3}{1+x^4} = \dfrac{1}{4}(1+x^4)^{-2} + C, C \in \mathbb{R}$

(C) $P\dfrac{x}{1+2x^2+x^4} = -\dfrac{1}{2+2x^2} + C, C \in \mathbb{R}$ (D) $P\dfrac{x}{\sqrt{1-x^4}} = arcsen(x^2) + C, C \in \mathbb{R}$

Solução: *C*