FACULDADE DE CIÊNCIAS ECONÓMICAS E EMPRESARIAIS

Matemática I

1^a Frequência: 27 de Outubro de 2009

- A frequência consiste em duas partes, tem uma duração de 2h30m e está cotado para 20 valores, é efectuado sem qualquer tipo de consulta.
- A primeira parte da frequência consiste em 5 perguntas de resposta fechada (**V**erdadeiro/**F**also) que devem ser respondidas na folha do questionário.
- As perguntas de resposta fechada valem 4 valores, cada resposta correcta vale 0,8 valores e as respostas erradas serão penalizadas em 1/3 da cotação da resposta.
- A segunda parte consiste em um questionário com 2 páginas e 8 exercícios.
- O aluno deve responder à segunda parte numa folha de ponto, justificar todas as respostas e apresentar devidamente os cálculos efectuados.
- A cotação das perguntas da segunda parte encontram-se no final de cada pergunta.
- O aluno não poderá sob nenhuma circunstância ausentar-se da sala após o início da frequência.
- A saída da sala implica a desistência ou a entrega da prova.
- Durante a prova não serão prestados quaisquer tipo de esclarecimentos.
- Qualquer dúvida ou questão relativa ao enunciado deverá ser escrita na folha de prova para que possa ser tomada em consideração na correcção.
- Boa sorte.

FACULDADE DE CIÊNCIAS ECONÓMICAS E EMPRESARIAIS

Matemática I

1^a Frequência - 27 de Outubro 2009 - versão A

Primeira Parte (4 valores)

Nome: ______________________ N^o | | | | | | | | | | Turma | |

Classifique cada uma das seguintes afirmações com **V** se Verdadeira e com **F** se Falsa.

Cada pergunta vale 0.8 valores e as respostas erradas serão penalizadas em 1/3 da cotação

$\boxed{\text{V}}$ **1.** Seja $\bar{a}$ um vector de coordenadas $\bar{a} = (\cos\alpha, sen\alpha)$, então $\bar{a} \bullet vers(\bar{a}) = 1$ para qualquer ângulo α.

$\boxed{\text{F}}$ **2.** Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz idempotente. Então $a_{i\bullet}a_{j\bullet} = a_{ij}$.

$\boxed{\text{F}}$ **3.** Seja A uma matriz regular de ordem n. Então $|Adj(A)| = |A|^n$

$\boxed{\text{V}}$ **4.** Seja A uma matrix $m \times n$ com $r(A) = m < n$, então as m primeiras linhas da matriz são linearmente independentes.

$\boxed{\text{F}}$ **5.** Seja o sistema $Ax = b$ possível e indeterminado com zero equações supérfluas, e a respectiva partição $Cx_c + Rx_r = b$ onde x_c são as variáveis principais. Então as colunas de R são linearmente dependentes.

FACULDADE DE CIÊNCIAS ECONÓMICAS E EMPRESARIAIS

Matemática I

1^a Frequência - 27 de Outubro 2009 - versão B

Primeira Parte (4 valores)

Nome: ______________________________ N^o | | | | | | | | | | Turma | |

Classifique cada uma das seguintes afirmações com **V** se Verdadeira e com **F** se Falsa.

Cada pergunta vale 0.8 valores e as respostas erradas serão penalizadas em 1/3 da cotação

F **1.** Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz idempotente. Então $a_{i\bullet}a_{j\bullet} = a_{ij}$.

V **2.** Seja A uma matrix $m \times n$ com $r(A) = m < n$, então as m primeiras linhas da matriz são linearmente independentes.

F **3.** Seja A uma matriz regular de ordem n. Então $|Adj(A)| = |A|^n$.

F **4.** Seja o sistema $Ax = b$ possível e indeterminado com zero equações supérfluas, e a respectiva partição $Cx_c + Rx_r = b$ onde x_c são as variáveis principais Então as colunas de R são linearmente dependentes.

V **5.** Seja $\bar{a}$ um vector de coordenadas $\bar{a} = (\cos\alpha, sen\alpha)$, então $\bar{a} \bullet vers(\bar{a}) = 1$ para qualquer ângulo α.

FACULDADE DE CIÊNCIAS ECONÓMICAS E EMPRESARIAIS

Matemática I

1^a Frequência - 27 de Outubro 2009 - versão C

Primeira Parte (4 valores)

Nome: ______________________ N^o [| | | | | | | |] Turma [ ]

Classifique cada uma das seguintes afirmações com **V** se Verdadeira e com **F** se Falsa.

Cada pergunta vale 0.8 valores e as respostas erradas serão penalizadas em 1/3 da cotação

[F] **1.** Seja A uma matriz regular de ordem n. Então $|Adj(A)| = |A|^n$

[F] **2.** Seja o sistema $Ax = b$ possível e indeterminado com zero equações supérfluas, e a respectiva partição $Cx_c + Rx_r = b$ onde x_c são as variáveis principais. Então as colunas de R são linearmente dependentes.

[V] **3.** Seja $\bar{a}$ um vector de coordenadas $\bar{a} = (\cos\alpha, sen\alpha)$, então $\bar{a} \bullet vers(\bar{a}) = 1$ para qualquer ângulo α.

[V] **4.** Seja A uma matrix $m \times n$ com $r(A) = m < n$, então as m primeiras linhas da matriz são linearmente independentes.

[F] **5.** Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz idempotente. Então $a_{i\bullet} a_{j\bullet} = a_{ij}$.

FACULDADE DE CIÊNCIAS ECONÓMICAS E EMPRESARIAIS

Matemática I

1^a Frequência - 27 de Outubro 2009 - versão D

Primeira Parte (4 valores)

Nome: ______________________________ N^o | | | | | | | | | Turma | |

Classifique cada uma das seguintes afirmações com **V** se Verdadeira e com **F** se Falsa.

Cada pergunta vale 0.8 valores e as respostas erradas serão penalizadas em 1/3 da cotação

V **1.** Seja A uma matrix $m \times n$ com $r(A) = m < n$, então as m primeiras linhas da matriz são linearmente independentes.

V **2.** Seja $\bar{a}$ um vector de coordenadas $\bar{a} = (\cos\alpha, sen\alpha)$, então $\bar{a} \bullet vers(\bar{a}) = 1$ para qualquer ângulo α.

F **3.** Seja o sistema $Ax = b$ possível e indeterminado com zero equações supérfluas, e a respectiva partição $Cx_c + Rx_r = b$ onde x_c são as variáveis principais. Então as colunas de R são linearmente dependentes.

F **4.** Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz idempotente. Então $a_{i\bullet} a_{j\bullet} = a_{ij}$.

F **5.** Seja A uma matriz regular de ordem n. Então $|Adj(A)| = |A|^n$

FACULDADE DE CIÊNCIAS ECONÓMICAS E EMPRESARIAIS

Matemática I

1^a Frequência - 27 de Outubro 2009

Segunda Parte (16 valores)

Apresente todos os cálculos que tiver de efectuar. Justifique as respostas. A cotação encontra-se no final de cada questão.

1. Considere os vectores $\overline{u_1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ $\overline{u_2} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.Determine um vector de norma igual a $\sqrt{30}$ que faça um ângulo de 60^0 com OZ e ângulos iguais com os vectores $\overline{u_1}$ e $\overline{u_2}$.[**1.5 val**]

2. Considere a matriz **(3.0 val.)**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

a) Determine A^{-1}.[**1.0 val**]

b) Considere a equação $[A^{-1} + X(B^T)^{-1}]^T = (A^T B)^{-1}$. Resolva-a em ordem a X apresentando o resultado sob a forma de um produto de factores. [**1.0 val**]

c) Determine a matriz X sabendo que a matriz B é

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

[**1.0 val**]

3. Sendo $A + I$ uma matriz regular, prove que $(A + I)^{-1}$ é permutável com $I - A$. [**1.0 val**]

4 Sendo A, B, C e X matrizes regulares de ordem 3 tais que $2CXC^T = A^{-2}C^2B^3$e, sabendo que $|A| = 2$ e $|B^{-2}| = 9$

Calcule $|X|$.[**1.0 val**]

5. Considere a matriz A

$$A = \begin{pmatrix} x & x & x & x & x \\ -2 & x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & x \end{pmatrix}$$

Calcule a, b, c, d e e, tal que $|A| = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex$.**[2.0 val]**

6. Considere os seguintes determinantes:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 & 4 \\ 4 & 1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & a \end{vmatrix} \quad e\,|B| = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 & 6 \\ 4 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 8 \end{vmatrix}$$

Para que valores de a se verifica a igualdade $|A| = |B|$. **Nota**: Não calcule os determinantes. **[2.0 val]**

7. Se $\bar{a}$, $\bar{b}$ e $\bar{c}$ são vectores em $\mathbb{R}^n$ linearmente independentes, prove que $\bar{a} + \bar{b}$, $\bar{b} + \bar{c}$ e $\bar{a} + \bar{c}$ também são linearmente independentes. Verifique se também é válido para os vectores $\bar{a} - \bar{b}$, $\bar{b} + \bar{c}$ e $\bar{a} + \bar{c}$.**[2.0 val]**

8. Considere o sistema seguinte:

$$\begin{cases} -2x + (a^2 - 3)\,y & + (a-5)\,z & = a - b - 2 \\ x + \quad a^2 y & + (2a-1)\,z & = ab + a - b \\ x + \quad y & + \quad 2z & = 1 \end{cases}$$

a) Classifique o sistema em função dos parâmetros reais a e b, indicando, os graus de liberdade, e o número de equações supéfluas. **[2.0 val]**

b) Calcule o sistema anterior fazendo $a = 0$ e $b = 0$.**[0.75 val]**

c) Calcule o sistema anterior fazendo $a = 1$ e $b = 1$.**[0.75 val]**

1.

i. Seja o vector desejado $\bar{w}$ um vector de coordenadas $\bar{w} = (x, y, z)$ com $|\bar{w}| = \sqrt{30}$,e θ o ângulo formado por $\bar{w}$ e OZ.

O vector proporcional a OZ tem coordenadas $\bar{e}_3 = (0, 0, 1)$

$$\cos 60^o = \frac{\bar{w} \bullet \bar{e}_3}{||\bar{w}||||\bar{e}_3||} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{z}{\sqrt{30}} \Leftrightarrow z = \frac{\sqrt{30}}{2}$$

ii. Se os ângulos formados com o vector e $\bar{w}$ e o os vectores $\overline{u_1}$ e $\overline{u_2}$ são iguais, então

$$\frac{2x + y - 2z}{\sqrt{9}\sqrt{30}} = \frac{-x + 2y - 2z}{\sqrt{9}\sqrt{30}} \Longrightarrow y = 3x$$

logo $\bar{w} = (x, y, z) = (x, 3x, \frac{\sqrt{30}}{2})$

iii. Sabendo que $|\bar{w}| = \sqrt{30}$

$$\begin{aligned} |\bar{w}| &= \sqrt{30} \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 9x^2 + \frac{30}{4}} = \sqrt{30} \Longrightarrow 10x^2 = \frac{90}{4} \Leftrightarrow 10x^2 - \frac{90}{4} = 0 \\ 10(x^2 - \frac{9}{4}) &= 0 \Leftrightarrow (x - \frac{3}{2})(x + \frac{3}{2}) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \vee x = -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

iv. Logo $\bar{w} = (\frac{3}{2}, \frac{9}{2}, \frac{\sqrt{30}}{2})$ ou $\bar{w} = (-\frac{3}{2}, -\frac{9}{2}, \frac{\sqrt{30}}{2})$

2.

a)

i. $|A| = -3$

ii.

$$A^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & -1 \\ -3 & 3 & 3 \end{pmatrix}^T}{-3} = \frac{\begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}}{-3} = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1/3 & 1/3 & -1 \end{pmatrix}$$

b)

$$\begin{aligned}
[A^{-1}+X(B^T)^{-1}]^T &= (A^TB)^{-1} \Leftrightarrow A^{-1}+X(B^T)^{-1} = [(A^TB)^{-1}]^T \\
A^{-1}+X(B^T)^{-1} &= (B^TA)^{-1} \Leftrightarrow X(B^T)^{-1} = (B^TA)^{-1} - A^{-1} \Leftrightarrow \\
X &= [(B^TA)^{-1} - A^{-1}]B^T \Leftrightarrow \\
X &= [A^{-1}(B^T)^{-1} - A^{-1}]B^T \Leftrightarrow \\
X &= (A^{-1} - A^{-1}B^T) \Leftrightarrow \\
X &= A^{-1}(I - B^T)
\end{aligned}$$

c) Sabendo que $X = A^{-1}(I - B^T)$

$$\begin{aligned}
X &= \frac{1}{-3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \\
& \frac{1}{-3}\begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 \\ 0 & -6 & 3 \\ -2 & -5 & 3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

3.

Se a matriz $(A+I)^{-1}$ é permutável com $I - A$, então

$$(A+I)^{-1}(I-A) = (I-A)(A+I)^{-1} \Leftrightarrow$$

pré-multiplicando por $(A+I)$

$$\begin{aligned}
(A+I)(A+I)^{-1}(I-A) &= (A+I)(I-A)(A+I)^{-1} \Leftrightarrow \\
I(I-A) &= (A+I)(I-A)(A+I)^{-1} \Leftrightarrow
\end{aligned}$$

pós-multiplicando por $(A+I)$

$$\begin{aligned}
I(I-A)(A+I) &= (A+I)(I-A)(A+I)^{-1}(A+I) \Leftrightarrow \\
(I-A)(A+I) &= (A+I)(I-A)I \Leftrightarrow
\end{aligned}$$

usando a propriedade distributiva

$$\begin{aligned} A + I - A^2 - A &= A - A^2 + I - A \Leftrightarrow \\ I - A^2 &= -A^2 + I \end{aligned}$$

c.q.d.

4.

Aplicando o cálculo de determinante a ambos os membros da equação

$$|2CXC^T| = |A^{-2}C^2B^3| \Leftrightarrow$$

como $|AB| = |A||B|$, $|kA| = k^n|A|$ e $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$

$$2^3|C||X||C^T| = \frac{1}{|A|^2}|C|^2|B|^3 \Leftrightarrow$$

e sabendo que $|A^T| = |A|$

$$2^3|C||X||C^T| = \frac{1}{|A|^2}|C|^2|B|^3 \Leftrightarrow$$

resolvendo em ordem $|X|$

$$|X| = \frac{1}{2^3}\frac{|B|^3}{|A|^2}$$

Sabendo que

$$\begin{aligned} \left|B^{-2}\right| &= 9 \Leftrightarrow \frac{1}{|B|^2} = 9 \Leftrightarrow |B|^2 - \frac{1}{9} = 0 \Leftrightarrow \\ (|B| - \frac{1}{3})(|B| + \frac{1}{3}) &= 0 \Leftrightarrow |B| = \frac{1}{3} \vee |B| = -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

logo

$$\begin{aligned} |X| &= \frac{1}{2^3}\frac{|B|^3}{|A|^2} \Leftrightarrow |X| = \frac{1}{2^3}\frac{1}{2^2}\left(-\frac{1}{3}\right)^3 \vee |X| = \frac{1}{2^3}\frac{1}{2^2}\left(\frac{1}{3}\right)^3 \Leftrightarrow \\ |X| &= \frac{1}{864} \vee |X| = -\frac{1}{864} \end{aligned}$$

5.

Calculando o determinante através do desenvolvimento de Laplace da 1^a coluna

$$|A| = x(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & 0 \\ -2 & x & 0 & 0 \\ 0 & -2 & x & 0 \\ 0 & 0 & -2 & x \end{vmatrix} + (-2)(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} x & x & x & x \\ -2 & x & 0 & 0 \\ 0 & -2 & x & 0 \\ 0 & 0 & -2 & x \end{vmatrix} =$$

O primeiro termo é o determinante de uma matriz triangular, no segundo torna-se a calcular o determinante através do desenvolvimento de Laplace da 1^a coluna

$$\begin{aligned}
&= x \times x^4 + 2x\begin{vmatrix} x & 0 & 0 \\ -2 & x & 0 \\ 0 & -2 & x \end{vmatrix} + 2 \times 2\begin{vmatrix} x & x & x \\ -2 & x & 0 \\ 0 & -2 & x \end{vmatrix} = \\
&= x^5 + 2x \times x^3 + 4x\begin{vmatrix} x & 0 \\ -2 & x \end{vmatrix} + 4 \times 2\begin{vmatrix} x & x \\ -2 & x \end{vmatrix} = \\
&= x^5 + 2x^4 + 4x \times x^2 + 8(x^2 + 2x) \\
&= x^5 + 2x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 16x
\end{aligned}$$

então $a = 1$, $b = 2$, $c = 4$, $d = 8$, $e = 16$.

6.

Como as três primeiras colunas de A e B são iguais e $|A| = |B| \Leftrightarrow |A| - |B| = 0$

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 & 4 \\ 4 & 1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & a \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 & 6 \\ 4 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 8 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 & 4-6 \\ 4 & 1 & 0 & 5-3 \\ 2 & 1 & 3 & 6-1 \\ 1 & 2 & 3 & a-8 \end{vmatrix} = 0$$

Se $L_1 = 2L_4$ então a igualdade verifica-se.

$$L_1 = 2L_4 \Leftrightarrow -2 = 2(a-8) \Leftrightarrow a = 7$$

7.

Se $\bar{a}$, $\bar{b}$ e $\bar{c}$ são vectores em $\mathbb{R}^n$ linearmente independentes, então

$$\alpha_1\bar{a} + \alpha_2\bar{b} + \alpha_3\bar{c} = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$$

i. A combinação linear entre $\bar{a} + \bar{b}$, $\bar{b} + \bar{c}$ e $\bar{a} + \bar{c}$ é igual zero se

$$\theta_1(\bar{a} + \bar{b}) + \theta_2(\bar{b} + \bar{c}) + \theta_3(\bar{a} + \bar{c}) = 0$$

re-arranjando

$$(\theta_1 + \theta_3)\bar{a} + (\theta_1 + \theta_2)\bar{b} + (\theta_2 + \theta_3)\bar{c} = 0$$

como $\bar{a}$, $\bar{b}$ e $\bar{c}$ são vectores em $\mathbb{R}^n$ linearmente independentes, então

$$\begin{cases} \alpha_1 & = 0 \\ \alpha_2 & = 0 \\ \alpha_3 & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \theta_1 + \theta_3 & = 0 \\ \theta_1 + \theta_2 & = 0 \\ \theta_2 + \theta_3 & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (...) \begin{cases} \theta_1 & = 0 \\ \theta_2 & = 0 \\ \theta_3 & = 0 \end{cases}$$

e logo $\bar{a} + \bar{b}$, $\bar{b} + \bar{c}$ e $\bar{a} + \bar{c}$ são linearmente independentes.

ii. A combinação linear entre $\bar{a} - \bar{b}$, $\bar{b} + \bar{c}$ e $\bar{a} + \bar{c}$ é igual zero se

$$\theta_1(\bar{a} - \bar{b}) + \theta_2(\bar{b} + \bar{c}) + \theta_3(\bar{a} + \bar{c}) = 0$$

re-arranjando em função

$$(\theta_1 + \theta_3)\bar{a} + (\theta_2 - \theta_1)\bar{b} + (\theta_2 + \theta_3)\bar{c} = 0$$

$$\begin{cases} \alpha_1 & = 0 \\ \alpha_2 & = 0 \\ \alpha_3 & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \theta_1 + \theta_3 & = 0 \\ \theta_2 - \theta_1 & = 0 \\ \theta_2 + \theta_3 & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (...) \begin{cases} \theta_1 & = -\theta_3 \\ \theta_2 & = -\theta_3 \\ \end{cases}$$

logo o sistema é possível e indeterminado admitindo soluções não nulas, assim os três vectores são linearmente dependentes.

8.

A matriz

$$Ab = [A\vdots b] = \begin{pmatrix} -2 & a^2-3 & a-5 & \vdots & a-b-2 \\ 1 & a^2 & 2a-1 & \vdots & ab+a-b \\ 1 & 1 & 2 & \vdots & 1 \end{pmatrix} \underset{L_1 \leftrightarrow L_3}{\sim}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & \vdots & 1 \\ 1 & a^2 & 2a-1 & \vdots & ab+a-b \\ -2 & a^2-3 & a-5 & \vdots & a-b-2 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2 \to L_2 - L_1 \\ L_3 \to L_3 + 2L_1}}{\sim}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & \vdots & 1 \\ 0 & a^2-1 & 2a-3 & \vdots & ab+a-b-1 \\ 0 & a^2-1 & a-1 & \vdots & a-b \end{pmatrix} \underset{L_3 \to L_3 - L_2}{\sim}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & \vdots & 1 \\ 0 & a^2-1 & 2a-3 & \vdots & ab+a-b-1 \\ 0 & 0 & 2-a & \vdots & 1-ab \end{pmatrix}$$

Como $a^2 - 1 \Leftrightarrow a = 1 \vee a = -1$ e $2 - a \Leftrightarrow a = 2$:

i. Se $a \neq 1 \wedge a \neq -1 \wedge a \neq 2$: $r(A) = 3$ e $r(Ab) = 3 = n$ o sistema é possível e determinado.

ii. Se $a = 1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & -1 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 1-b \end{pmatrix} \underset{L_3 \to L_3 + L_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & -1 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 1-b \end{pmatrix}$$

então $r(A) = 2 = k$.

ii.1 Se $b = 1$: $r(Ab) = 2$, $r(A) = r(Ab) < n$ e o sistema é possível e indeterminado.

$$\begin{aligned} n - k &= 1 \text{ grau de liberdade} \\ m - k &= 1 \text{ equação supérflua} \end{aligned}$$

ii.2 Se $b \neq 1$: $r(Ab) = 3$, $r(A) < r(Ab)$ o sistema é impossível.

iii. Se $a = -1$:

$$\left(\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 2 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & -5 & \vdots & -2b-2 \\ 0 & 0 & 3 & \vdots & 1+b \end{array}\right) \underset{L_3 \to 5L_3 + 3L_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 2 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & -5 & \vdots & -2(b+1) \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & -1-b \end{array}\right)$$

então $r(A) = 2 = k$.

iii.1 Se $b = 1$: $r(Ab) = 2$, $r(A) = r(Ab) < n$ e o sistema é possível e indeterminado.

$$\begin{aligned} n - k &= 1 \text{ grau de liberdade} \\ m - k &= 1 \text{ equação supérflua} \end{aligned}$$

iii.2 Se $b \neq 1$: $r(Ab) = 3$, $r(A) < r(Ab)$ o sistema é impossível.

iv. Se $a = 2$:

$$\left(\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 2 & \vdots & 1 \\ 0 & 3 & 1 & \vdots & b+1 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 1-2b \end{array}\right)$$

então $r(A) = 2 = k$.

iv.1 Se $b = \frac{1}{2}$: $r(Ab) = 2$, $r(A) = r(Ab) < n$ e o sistema é possível e indeterminado.

$$\begin{aligned} n - k &= 1 \text{ grau de liberdade} \\ m - k &= 1 \text{ equação supérflua} \end{aligned}$$

iv.2 Se $b \neq \frac{1}{2}$: $r(Ab) = 3$, $r(A) < r(Ab)$ o sistema é impossível.

b)

Com $a = 0$ e $b = 0$. o sistema estamos na alínea i, o sistema é possível e determinado e pode ser resolvido por condensação

$$\left(\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 2 & \vdots & 1 \\ 0 & -1 & -3 & \vdots & -1 \\ 0 & 0 & 2 & \vdots & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rl} x + y + 2z & = 1 \\ -y - 3z & = 1 \\ 2z & = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} x & = \frac{1}{2} \\ y & = 1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2} \\ z & = \frac{1}{2} \end{array}\right.$$

Então a solução é

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

c)

Com $a = 1$ e $b = 1$. o sistema estamos na alínea ii.1, e fazendo x e z variáveis já que após eliminar a equação supérflua, o determinante associado às colunas com os coeficientes dessas variáveis é após condensação:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$$

e $y = \alpha$ com $\alpha \in \mathbb{R}$ a variável livre, e considerando a última equação como supérflua:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & -1 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \alpha + 2z & = 1 \\ -z & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x & = 1 - \alpha \\ z & = 0 \end{cases}$$

Então o conjunto solução é

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \alpha \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$