Faculdade de Ciências Económicas e Empresariais – UCP
MATEMÁTICA I
FREQUÊNCIA 1 - versão A
Duração: 150 minutos

Durante a prova não serão prestados quaisquer tipo de esclarecimentos. Qualquer dúvida ou questão relativa ao enunciado deverá ser escrita na folha de prova para que possa ser tomada em consideração na correcção. Apresente todos os cálculos que tiver de efectuar. Justifique as respostas. Simplifique o resultado final o máximo possível.

Separe em grupos de folhas diferentes as resoluções dos grupos I e II das resoluções dos grupos III e IV

GRUPO I (50 PONTOS)

Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$.

1. [15 pontos] Determine os valores e vectores próprios da matriz A.

2. [15 pontos] A matriz A é diagonalizável? Justifique. Em caso afirmativo, escreva A como o produto de três matrizes (calcule a inversa usando a adjunta).

3. [10 pontos] Considere a matriz B dada por $B = A^4 - 2A^3 + 2A$. Represente a matriz B como função linear de A^2 e A.

4. [10 pontos] Determine os valores e vectores próprios da matriz B da alínea anterior.

GRUPO II (50 PONTOS)

1. [20 pontos] Determine $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 2 & 0 \end{vmatrix}$

2. [15 pontos] Determine a expressão simplicada do determinante da matriz C

$$C_{n\times n} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n \\ 1 & 0 & 3 & 4 & \cdots & n \\ 1 & 2 & 0 & 4 & \cdots & n \\ 1 & 2 & 3 & 0 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Indique também para que valores de n o determinante é positivo.

3. [15 pontos] Seja $F_{n\times n}$ tal que $FF^T = -I$ onde I é a matriz identidade.

(a) Mostre que n é par e F é invertível.

(b) Determine a expressão para F^{-1}.

GRUPO III (50 PONTOS)

Considere o seguinte sistema de equações lineares em x, y e z:

$$\begin{cases} x + \beta^2 y + \beta z = -\alpha \\ z + \beta y - \beta = 0 \\ \alpha z + x + \beta y = -\beta^2 \end{cases} \qquad \text{com } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

1. [20 pontos] Discuta o sistema em função dos parâmetros α e β.

2. Considere $\beta = -1$ **e** $\alpha = -1$.

(2.a) [15 pontos] Determine, não usando determinantes, a inversa da matriz constituída pelos coeficientes das incógnitas.

(2.b) [5 pontos] Usando a Regra de Cramer, determine o valor de y no sistema.

3. [10 pontos] Considere $\beta = 1$ **e** $\alpha = 1$. Resolva o sistema.

GRUPO IV (50 PONTOS)

Escolha uma das opções (A,B,C,D). Cada resposta **correcta** vale **10 pontos**, cada resposta **incorrecta** desconta **3 pontos**, sem resposta não desconta. Este grupo pode ter **cotação negativa**. Não é necessária qualquer justificação. Só se terá em consideração a opção apresentada.

1. Sejam $R_{4\times4} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ a & b & c & d \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ e $S_{4\times4} = \begin{bmatrix} 1-3a & 4 & 1 & a \\ 2-3b & 2 & 3 & b \\ 2-3c & 4 & 1 & c \\ 4-3d & 4 & 1 & d \end{bmatrix}$.

Sabendo que $|R| = 3$, qual das seguintes afirmações é verdadeira?

(A) $|S| = -6$ (B) $|S| = -9$ (C) $|S| = 9$ (D) Nenhuma das anteriores

2. Considere as seguintes afirmações, quando as operações estão definidas:

I. A transposta da soma de matrizes é a soma das matrizes transpostas

II. A inversa da soma de matrizes é a soma das matrizes inversas

III. Uma matriz quadrada diagonal é simétrica

A lista completa das afirmações correctas é:

(A) I e II (B) I e III (C) II e III (D) Todas as afirmações

3. Qual das seguintes afirmações é verdadeira:

(A) Se A e B são matrizes quadradas de ordem n, então $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

(B) Se A e B são matrizes quadradas de ordem n tal que $AB = AC$, então $B = C$

(C) Se A é uma matriz invertível tal que $A^{-1} = A^T$, então $|A| = 1$ ou $|A| = -1$

(D) Se zero é um valor próprio da matriz quadrada A, então a matriz A é não singular

4. Qual das seguintes afirmações é verdadeira:

(A) Seja $A_{n\times m}$, então $AX = b \Leftrightarrow X = A^{-1}b$

(B) Seja $A_{n\times m}$, então o sistema $AX = O$ é possível e indeterminado se e só se $|A| = 0$

(C) Se A e B são duas matrizes permutáveis, então $(AB)^T = A^T B^T$

(D) Um sistema homogéneo pode ser impossível

5. Se $U = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ e $W = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$, tem-se que a matriz $U^T U - 2W^2$ é uma matriz:

(A) Triangular superior (B) Triangular inferior (C) Simétrica (D) Anti-simétrica

Faculdade de Ciências Económicas e Empresariais – UCP
MATEMÁTICA I
FREQUÊNCIA 1 - versão A - Tópicos de Resolução
Duração: 150 minutos

Durante a prova não serão prestados quaisquer tipo de esclarecimentos. Qualquer dúvida ou questão relativa ao enunciado deverá ser escrita na folha de prova para que possa ser tomada em consideração na correcção. Apresente todos os cálculos que tiver de efectuar. Justifique as respostas. Simplifique o resultado final o máximo possível.

Separe em grupos de folhas diferentes
as resoluções dos grupos I e II das resoluções dos grupos III e IV

GRUPO I (50 PONTOS)

Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$.

1. [15 pontos] Determine os valores e vectores próprios da matriz A.

$p(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 4 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda)(-3-\lambda)$

$p(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1 \vee \lambda = 2 \vee \lambda = -3$

- $\lambda = 1$

  $[A - I]X = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

  $x(1,0,0), x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$

- $\lambda = 2$

  $[A - 2I]X = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

  $z(4,5,1), z \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$

- $\lambda = -3$

  $[A + 3I]X = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

  $z(-1,0,1), z \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$

Conclusão:
Vector próprio (1,0,0) associado ao valor próprio 1
Vector próprio (4,5,1) associado ao valor próprio 2
Vector próprio (-1,0,1) associado ao valor próprio -3

2. [15 pontos] A matriz A é diagonalizável? Justifique. Em caso afirmativo, escreva A como o produto de três matrizes (calcule a inversa usando a adjunta).

Matriz A é diagonalizável, porque A tem 3 valores próprios distintos o que é igual ordem da matriz A.

$$A = PDP^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1/5 & 0 \\ 0 & -1/5 & 1 \end{bmatrix}$$

visto que

$$P^{-1} = \frac{1}{|P|} Adj(P) = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & -1 \\ 5 & 0 & 5 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1/5 & 0 \\ 0 & -1/5 & 1 \end{bmatrix}$$

3. [10 pontos] Considere a matriz B dada por $B = A^4 - 2A^3 + 2A$. Represente a matriz B como função linear de A^2 e A.

Como

$p(\lambda) = (1-\lambda)(2-\lambda)(-3-\lambda) = -\lambda^3 + 7\lambda - 6 = 0$

Logo

$-A^3 + 7A - 6I = 0 \Leftrightarrow A^3 = 7A - 6I$

Assim

$B = A(7A - 6I) - 2(7A - 6I) + 2A = 7A^2 - 18A + 12I$

4. [10 pontos] Determine os valores e vectores próprios da matriz B da alínea anterior.

$\lambda_A = 1 \Rightarrow \lambda_B = 7 \times 1^2 - 18 \times 1 + 12 = 1$
$\lambda_A = 2 \Rightarrow \lambda_B = 7 \times 2^2 - 18 \times 2 + 12 = 4$
$\lambda_A = -3 \Rightarrow \lambda_B = 7 \times (-3)^2 - 18 \times (-3) + 12 = 129$

Conclusão:

Vector próprio (1,0,0) associado ao valor próprio 1
Vector próprio (4,5,1) associado ao valor próprio 4
Vector próprio (-1,0,1) associado ao valor próprio 129

GRUPO II (50 PONTOS)

1. [20 pontos] Determine $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 2 & 0 \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 2\times\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} - 3\times\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2\times3\times\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} - 3\times1\times\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$= 6\times(-15) - 3\times(-15) = -45$

2. [15 pontos] Determine a expressão simplicada do determinante da matriz C

$$C_{n\times n} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n \\ 1 & 0 & 3 & 4 & \cdots & n \\ 1 & 2 & 0 & 4 & \cdots & n \\ 1 & 2 & 3 & 0 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Indique também para que valores de n o determinante é positivo.

$$C_{n\times n} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n \\ 1 & 0 & 3 & 4 & \cdots & n \\ 1 & 2 & 0 & 4 & \cdots & n \\ 1 & 2 & 3 & 0 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -n \end{bmatrix} = (-1)^{n-1}n!$$

Positivo se n é ímpar.

3. [15 pontos] Seja $F_{n\times n}$ tal que $FF^T = -I$ onde I é a matriz identidade.

(a) Mostre que n é par e F é invertível.

$|FF^T| = |-I| \Leftrightarrow |F||F^T| = (-1)^n \Leftrightarrow |F||F| = (-1)^n \Leftrightarrow |F|^2 = (-1)^n$

Só existe solução se n for par. Neste caso,

$$|F|^2 = (-1)^n \Leftrightarrow |F|^2 = 1 \Leftrightarrow |F| = -1 \vee |F| = 1$$

Como o determinante é diferente de zero, a matriz F é invertível.

(b) Determine a expressão para F^{-1}.

$FF^T = -I \Leftrightarrow FF^T(F^T)^{-1} = -I(F^T)^{-1} \Leftrightarrow F = -(F^T)^{-1} \Leftrightarrow F^{-1} = (-(F^T)^{-1})^{-1} \Leftrightarrow F^{-1} = -F^T$

GRUPO III (50 PONTOS)

Considere o seguinte sistema de equações lineares em x, y e z:

$$\begin{cases} x + \beta^2 y + \beta z = -\alpha \\ z + \beta y - \beta = 0 \\ \alpha z + x + \beta y = -\beta^2 \end{cases} \qquad \text{com } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

1. [20 pontos] Discuta o sistema em função dos parâmetros α e β.

Primeiro voltar a reescrever o sistema:

$$\begin{cases} x + \beta^2 y + \beta z = -\alpha \\ \beta y + z = \beta \\ x + \beta y + \alpha z = -\beta^2 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \beta^2 & \beta & -\alpha \\ 0 & \beta & 1 & \beta \\ 1 & \beta & \alpha & -\beta^2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \beta^2 & \beta & -\alpha \\ 0 & \beta & 1 & \beta \\ 0 & 0 & \alpha - 1 & \alpha - \beta \end{array}\right]$$

- Se $\alpha \neq 1 \wedge \beta \neq 0 \Rightarrow SPD$
- Se $\alpha = 1$

  $$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \beta^2 & \beta & -1 \\ 0 & \beta & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 0 & 1 - \beta \end{array}\right]$$

  Se $\alpha = 1 \wedge \beta = 1 \Rightarrow SPI$

  Se $\alpha = 1 \wedge \beta \neq 1 \Rightarrow SI$
- Se $\beta = 0$

  $$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha - 1 & \alpha \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha \end{array}\right]$$

  Se $\alpha = 0 \Rightarrow SPI$

  Se $\alpha \neq 0 \Rightarrow SI$

Conclusão:

- SPD: $\alpha \neq 1 \wedge \beta \neq 0$
- SPI: $(\alpha = 1 \wedge \beta = 1)$ ou $(\beta = 0 \wedge \alpha = 0)$
- SI: $(\alpha = 1 \wedge \beta \neq 1)$ ou $(\beta = 0 \wedge \alpha \neq 0)$

2. Considere $\beta = -1$ **e** $\alpha = -1$.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right]$$

(2.a) [15 pontos] Determine, não usando determinantes, a inversa da matriz constituída pelos coeficientes das incógnitas.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1 & -1/2 \end{array}\right]$$

Logo

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \\ 1/2 & 1 & -1/2 \end{bmatrix}$$

(2.b) [5 pontos] Usando a Regra de Cramer, determine o valor de y no sistema.

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}} = 1$$

3. [10 pontos] Considere $\beta = 1$ **e** $\alpha = 1$. Resolva o sistema.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

$(-2, 1 - z, z), z \in \mathbb{R}$

GRUPO IV (50 PONTOS)

Escolha uma das opções (A,B,C,D). Cada resposta **correcta** vale **10 pontos**, cada resposta **incorrecta** desconta **3 pontos**, sem resposta não desconta. Este grupo pode ter **cotação negativa**. Não é necessária qualquer justificação. Só se terá em consideração a opção apresentada.

1. Sejam $R_{4\times4} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ a & b & c & d \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ e $S_{4\times4} = \begin{bmatrix} 1-3a & 4 & 1 & a \\ 2-3b & 2 & 3 & b \\ 2-3c & 4 & 1 & c \\ 4-3d & 4 & 1 & d \end{bmatrix}$.

Sabendo que $|R| = 3$, qual das seguintes afirmações é verdadeira?
(A) $|S| = -6$ (B) $|S| = -9$ (C) $|S| = 9$ (D) Nenhuma das anteriores
Solução: A

2. Considere as seguintes afirmações, quando as operações estão definidas:

I. A transposta da soma de matrizes é a soma das matrizes transpostas

II. A inversa da soma de matrizes é a soma das matrizes inversas

III. Uma matriz quadrada diagonal é simétrica

A lista completa das afirmações correctas é:

(A) I e II (B) I e III (C) II e III (D) Todas as afirmações

Solução: B

3. Qual das seguintes afirmações é verdadeira:
(A) Se A e B são matrizes quadradas de ordem n, então $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$
(B) Se A e B são matrizes quadradas de ordem n tal que $AB = AC$, então $B = C$
(C) Se A é uma matriz invertível tal que $A^{-1} = A^T$, então $|A| = 1$ ou $|A| = -1$
(D) Se zero é um valor próprio da matriz quadrada A, então a matriz A é não singular
Solução: C

4. Qual das seguintes afirmações é verdadeira:
(A) Seja $A_{n\times m}$, então $AX = b \Leftrightarrow X = A^{-1}b$
(B) Seja $A_{n\times m}$, então o sistema $AX = O$ é possível e indeterminado se e só se $|A| = 0$
(C) Se A e B são duas matrizes permutáveis, então $(AB)^T = A^T B^T$
(D) Um sistema homogéneo pode ser impossível
Solução: C

5. Se $U = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ e $W = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$, tem-se que a matriz $U^TU - 2W^2$ é uma matriz:
(A) Triangular superior (B) Triangular inferior (C) Simétrica (D) Anti-simétrica
Solução: B