

Durante a prova não serão prestados quaisquer tipo de esclarecimentos. Qualquer dúvida ou questão relativa ao enunciado deverá ser escrita na folha de prova para que possa ser tomada em consideração na correcção. Apresente todos os cálculos que tiver de efectuar. Justifique as respostas. Simplifique o resultado final o máximo possível. Não é possível desistir após o início desta prova.

Separe em grupos de folhas diferentes as resoluções dos grupos I e II das resoluções dos grupos III, IV e V

GRUPO I (60 PONTOS)

Considere $A = \begin{bmatrix} \alpha & 2 & 4 \\ 0 & 2\beta & 0 \\ \frac{5\beta}{4} & 1 & -3 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 1 \\ \beta \\ 2 \end{bmatrix}$ e I a matriz identidade de ordem 3.

- [20 pontos] Para $\alpha = \beta = 1$, determine os valores e vectores próprios da matriz A . Quais são os valores e vectores próprios da matriz A^{20} ?
- [20 pontos] Para $\alpha = 1$ e $\beta = 0$, resolva a equação matricial $(A^2 + I)^T X = |bb^T + I|b$, usando a matriz adjunta.
- [20 pontos] Discuta o sistema $AX = b$ em função dos parâmetros α e β .

GRUPO II (30 PONTOS)

- [15 pontos] Determine a expressão simplificada do determinante da matriz quadrada C

$$C_{n \times n} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 & 3 & -3 & \cdots & n & -n \\ 2 & 0 & 4 & -4 & 6 & -6 & \cdots & 2n & -2n \\ 3 & -3 & 0 & -6 & 9 & -9 & \cdots & 3n & -3n \\ 4 & -4 & 8 & 0 & 12 & -12 & \cdots & 4n & -4n \\ 5 & -5 & 10 & -10 & 0 & -15 & \cdots & 5n & -5n \\ 6 & -6 & 12 & -12 & 18 & 0 & \cdots & 6n & -6n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n-1 & -n+1 & 2n-2 & -2n+2 & 3n-3 & -3n+3 & \cdots & 0 & -n^2+n \\ n & -n & 2n & -2n & 3n & -3n & \cdots & n^2 & 0 \end{bmatrix}$$

e indique o sinal deste determinante para qualquer n .

- [15 pontos] Seja a matriz $A_{n \times n}$ tal que $(I - A)^{-1}$ existe e $A^2 = nA$. Prove que:
a) A e $I - A$ são permutáveis b) A e $(I - A)^{-1}$ são permutáveis c) $(I - A)^{-1} = I - \frac{1}{n-1}A$

GRUPO III (30 PONTOS)

Determine:

- [10 pontos] $P \frac{x^3 + x \cdot \arctg(x^2)}{1 + x^4}$

- [10 pontos] $f'(1)$ se $f(x) = (x^2 - x + 1) \int_{(2x)^2+1}^{x^2+4x} e^{t^2} dt$

- [10 pontos] $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \cdot \text{sen}(x) - x - x^2}{x^2 + x \ln(1 - x)}$

GRUPO IV (40 PONTOS)

Considere as funções reais de variável real $f(x) = 2x + 1$, $g(x) = \ln(x + 1)$ e $h(x) = e^x$.

1. [10 pontos] Determine o domínio da função $n = (g \circ h)/f$.
2. [10 pontos] Prove, pela definição, que $\lim_{x \rightarrow 2} (-f(x)) = -5$.
3. [10 pontos] Determine as primeiras três derivadas da função $m = h + f \times g$. Escreva a equação da recta tangente da função segunda derivada de m no ponto de abscissa 0.
4. [10 pontos] Represente e determine a área definida pelas seguintes condições:

$$y \leq h(x) \wedge y \geq \frac{1}{f(x)} \wedge x \geq 0 \wedge x \leq 1$$

Essa área é maior que $\int_{16/9}^{+\infty} \frac{1}{(\sqrt{x})^3} dx$? Justifique.

GRUPO V (40 PONTOS)

Escolha uma das opções (A,B,C,D). Cada resposta **correcta** vale **8 pontos**, cada resposta **incorrecta** desconta **3 pontos**, sem resposta não desconta. Este grupo pode ter **cotação negativa**. Não é necessária qualquer justificação. Só se terá em consideração a opção apresentada.

1. Qual das seguintes afirmações é *VERDADEIRA*?

(A) Sendo A e B matrizes de ordem n , tem-se que $|A + B| = |A| \Rightarrow |B| = 0$

(B) Se A é uma matriz invertível, então $\text{adj}(A^T) = (\text{adj}(A))^T$

(C) Se A é uma matriz invertível, então $(A^T)^{-1} = \frac{1}{|A|} (\text{adj}(A^T))^T$

(D) A inversa da soma de matrizes é a soma das matrizes inversas, quando as operações estão definidas

2. Sejam A e B duas matrizes quaisquer e O uma matriz nula.

Qual das seguintes afirmações é *VERDADEIRA*?

(A) Se o produto AA existe, então A é uma matriz quadrada

(B) Se $AB = O$, então $BA = O$

(C) Se A e B têm a mesma dimensão, então AB tem inversa

(D) $A - A^T$ é simétrica

3. Considere as seguintes afirmações:

I. Se uma função f é diferenciável em \mathbb{R} , então e^f é contínua em \mathbb{R}

II. Uma função par nunca é injectiva

III. Uma função ímpar tem contradomínio \mathbb{R}

A lista completa das afirmações correctas é:

(A) I e II (B) I e III (C) II e III (D) Nenhuma das afirmações

4. Qual das seguintes afirmações é *VERDADEIRA*:

(A) $|x'| = 1, \forall x \in \mathbb{R}$ (B) $\left(\frac{x}{x}\right)' = 1, \forall x \in \mathbb{R}$ (C) $\left(\frac{|x|}{x}\right)' = 0, \forall x \in \mathbb{R}$ (D) $\left(\frac{|x+1|}{x+1}\right)' = 0, \forall x > 0$

5. Seja $f(x) = \ln(x^x)$. Qual das seguintes afirmações é *VERDADEIRA*:

(A) $f'(e) = 0$

(B) $f'(e) = 1$

(C) $f'(e) = 2$

(D) $f'(e) = e$

Considere $A = \begin{bmatrix} \alpha & 2 & 4 \\ 0 & 2\beta & 0 \\ \frac{5\beta}{4} & 1 & -3 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 1 \\ \beta \\ 2 \end{bmatrix}$ e I a matriz identidade de ordem 3.

1. [20 pontos] Para $\alpha = \beta = 1$, determine os valores e vectores próprios da matriz A . Quais são os valores e vectores próprios da matriz A^{20} ?
2. [20 pontos] Para $\alpha = 1$ e $\beta = 0$, resolva a equação matricial $(A^2 + I)^T X = |bb^T + I|b$, usando a matriz adjunta.
3. [20 pontos] Discuta o sistema $AX = b$ em função dos parâmetros α e β .

1.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ \frac{5}{4} & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$|A - \lambda I| = 0 \Leftrightarrow (2 - \lambda)(\lambda^2 + 2\lambda - 8) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2 \vee \lambda = -4$$

Valores próprios de A : -4 e 2

$$[A + 4I]X = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 5x + 2y + 4z = 0 \\ 6y = 0 \\ \frac{5}{4}x + y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{4}{5}z \\ y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Vector próprio associado ao valor próprio -4: $(-\frac{4}{5}z, 0, z) = z(-\frac{4}{5}, 0, 1), z \in \mathbb{R}$

$$[A - 2I]X = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -x + 2y + 4z = 0 \\ 0 = 0 \\ \frac{5}{4}x + y - 5z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4z \\ y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Vector próprio associado ao valor próprio 2: $(4z, 0, z) = z(4, 0, 1), z \in \mathbb{R}$

Valores próprios de A^{20} : 4^{20} e 2^{20}

Vectores próprios de A^{20} :

$z(4, 0, 1), z \in \mathbb{R}$ associado ao valor próprio 2^{20}

$(-\frac{4}{5}z, 0, z) = z(-\frac{4}{5}, 0, 1), z \in \mathbb{R}$ associado ao valor próprio 4^{20} .

2.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (A^2 + I)^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & -3 \\ -8 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

$$[(A^2 + I)^T]^{-1} = \frac{1}{20} \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ -36 & 20 & 6 \\ 8 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -9/5 & 1 & 3/10 \\ 2/5 & 0 & 1/10 \end{bmatrix}$$

$$|bb^T + I|b = 6 \times \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 12 \end{bmatrix}$$

$$(A^2 + I)^T X = |bb^T + I|b \Leftrightarrow X = [(A^2 + I)^T]^{-1} |bb^T + I|b \Leftrightarrow X = \begin{bmatrix} 3 \\ -36/5 \\ 18/5 \end{bmatrix}$$

3.

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{ccc|c} \alpha & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 2\beta & 0 & \beta \\ \frac{5\beta}{4} & 1 & -3 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{C_1 \leftrightarrow C_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & \alpha & 1 \\ 0 & 2\beta & 0 & \beta \\ -3 & 1 & \frac{5\beta}{4} & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{3L_1 + 4L_3 \rightarrow L_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & \alpha & 1 \\ 0 & 2\beta & 0 & \beta \\ 0 & 10 & 5\beta + 3\alpha & 11 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & \alpha & 1 \\ 0 & 10 & 5\beta + 3\alpha & 11 \\ 0 & 2\beta & 0 & \beta \end{array} \right] \xrightarrow{C_2 \leftrightarrow C_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & \alpha & 2 & 1 \\ 0 & 5\beta + 3\alpha & 10 & 11 \\ 0 & 0 & 2\beta & \beta \end{array} \right] \end{aligned}$$

Conclusão:

SPD: $\beta \neq 0 \wedge \alpha \neq -\frac{5}{3}\beta$

SPI: $\beta = 0, \forall \alpha \in \mathbb{R}$

SI: $\alpha = -\frac{5}{3}\beta \wedge \beta \neq 0$

GRUPO II (30 PONTOS)

1. [15 pontos] Determine a expressão simplificada do determinante da matriz C

$$C_{n \times n} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 & 3 & -3 & \cdots & n & -n \\ 2 & 0 & 4 & -4 & 6 & -6 & \cdots & 2n & -2n \\ 3 & -3 & 0 & -6 & 9 & -9 & \cdots & 3n & -3n \\ 4 & -4 & 8 & 0 & 12 & -12 & \cdots & 4n & -4n \\ 5 & -5 & 10 & -10 & 0 & -15 & \cdots & 5n & -5n \\ 6 & -6 & 12 & -12 & 18 & 0 & \cdots & 6n & -6n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n-1 & -n+1 & 2n-2 & -2n+2 & 3n-3 & -3n+3 & \cdots & 0 & -n^2+n \\ n & -n & 2n & -2n & 3n & -3n & \cdots & n^2 & 0 \end{bmatrix}$$

e indique o sinal deste determinante para qualquer n .

$$|C_{n \times n}| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 & 3 & -3 & \cdots & n & -n \\ 2 & 0 & 4 & -4 & 6 & -6 & \cdots & 2n & -2n \\ 3 & -3 & 0 & -6 & 9 & -9 & \cdots & 3n & -3n \\ 4 & -4 & 8 & 0 & 12 & -12 & \cdots & 4n & -4n \\ 5 & -5 & 10 & -10 & 0 & -15 & \cdots & 5n & -5n \\ 6 & -6 & 12 & -12 & 18 & 0 & \cdots & 6n & -6n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n-1 & -n+1 & 2n-2 & -2n+2 & 3n-3 & -3n+3 & \cdots & 0 & -n^2+n \\ n & -n & 2n & -2n & 3n & -3n & \cdots & n^2 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 & 3 & -3 & \cdots & n & -n \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -15 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 18 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -n^2 + n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n^2 \end{vmatrix} = 1 \times 2 \times (-6) \times 8 \times (-15) \times 18 \times \cdots \times (-n^2 + n) \times n^2$$

O determinante é positivo quando $n = 1, 2, 5, 6, 9, 10, \dots$

O determinante é negativo quando $n = 3, 4, 7, 8, 11, 12, \dots$

2. [15 pontos] Seja a matriz $A_{n \times n}$ tal que $(I - A)^{-1}$ existe e $A^2 = nA$. Prove que:

a) A e $I - A$ são permutáveis b) A e $(I - A)^{-1}$ são permutáveis c) $(I - A)^{-1} = I - \frac{1}{n-1}A$

a) $A(I - A) = A.I - A.A = I.A - A.A = (I - A)A$

b) $A(I - A)^{-1} = (I - A)^{-1}(I - A)A(I - A)^{-1} = (I - A)^{-1}A(I - A)(I - A)^{-1} = (I - A)^{-1}A$

c) Vamos mostrar que a inversa de $I - A$ é dada por $I - \frac{1}{n-1}A$.

Para isso temos de mostrar que $(I - A).(I - A)^{-1} = I = (I - A)^{-1}.(I - A)$.

$$(I - A).(I - A)^{-1} = (I - A).(I - \frac{1}{n-1}A) = I - \frac{1}{n-1}A - A + \frac{1}{n-1}A^2 = I - \frac{1}{n-1}A - A + \frac{1}{n-1}nA = I$$

A outra igualdade é agora óbvia.

GRUPO III (30 PONTOS)

Determine:

1. [10 pontos] $P \frac{x^3 + x \cdot \arctg(x^2)}{1 + x^4}$

2. [10 pontos] $f'(1)$ se $f(x) = (x^2 - x + 1) \int_{(2x)^2+1}^{x^2+4x} e^{t^2} dt$

3. [10 pontos] $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \cdot \text{sen}(x) - x - x^2}{x^2 + x \ln(1 - x)}$

1.

$$P \frac{x^3 + x \cdot \arctg(x^2)}{1 + x^4} = P \frac{x^3}{1 + x^4} + P \frac{x \cdot \arctg(x^2)}{1 + x^4} = \frac{1}{4} P \frac{4x^3}{1 + x^4} + \frac{1}{2} P \frac{2x}{1 + (x^2)^2} \cdot \arctg(x^2) =$$

$$= \frac{1}{4} \ln(1 + x^4) + \frac{1}{4} \arctg^2(x^2) + C, C \in \mathbb{R}$$

2.

$$f'(x) = (2x - 1) \int_{(2x)^2+1}^{x^2+4x} e^{t^2} dt + (x^2 - x + 1) \left[(2x + 4) \cdot e^{(x^2+4x)^2} - 8x \cdot e^{((2x)^2+1)^2} \right]$$

$$f'(1) = 1 \int_5^5 e^{t^2} dt + 1 \times [6 \times e^{25} - 8 \times e^{25}] = 0 - 2e^{25} = -2e^{25}$$

3.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \cdot \text{sen}(x) - x - x^2}{x^2 + x \ln(1 - x)} \stackrel{R.C.}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \cdot \text{sen}(x) + e^x \cdot \cos(x) - 1 - 2x}{2x + \ln(1 - x) - \frac{x}{1-x}} \stackrel{R.C.}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^x \cdot \cos(x) - 2}{2 - \frac{1}{1-x} - \frac{1}{(1-x)^2}} \stackrel{R.C.}{=}$$

$$\stackrel{R.C.}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^x \cdot \cos(x) - 2e^x \cdot \text{sen}(x)}{-\frac{1}{(1-x)^2} - \frac{2}{(1-x)^3}} = -\frac{2}{3}.$$

GRUPO IV (40 PONTOS)

Considere as funções reais de variável real $f(x) = 2x + 1$, $g(x) = \ln(x + 1)$ e $h(x) = e^x$.

1. [10 pontos] Determine o domínio da função $n = (g \circ h)/f$.

2. [10 pontos] Prove, pela definição, que $\lim_{x \rightarrow 2} (-f(x)) = -5$.

3. [10 pontos] Determine as primeiras três derivadas da função $m = h + f \times g$. Escreva a equação da recta tangente da função segunda derivada de m no ponto de abscissa 0.

4. [10 pontos] Represente e determine a área definida pelas seguintes condições:

$$y \leq h(x) \wedge y \geq \frac{1}{f(x)} \wedge x \geq 0 \wedge x \leq 1$$

Essa área é maior que $\int_{16/9}^{+\infty} \frac{1}{(\sqrt{x})^3} dx$? Justifique.

1.

$$n(x) = \frac{\ln(e^x + 1)}{2x + 1}$$

$$D_n = \{x \in \mathbb{R} : e^x + 1 > 0 \wedge 2x + 1 \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq -\frac{1}{2}\} = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$$

2.

Seja $\delta > 0$ dado. Temos de descobrir ϵ tal que se $|x - 2| < \epsilon$, então $|-f(x) - (-5)| < \delta$, i.e., $|-2x - 1 + 5| < \delta$, i.e., $|-2x + 4| < \delta$, i.e., $2|x - 2| < \delta$, i.e., $|x - 2| < \delta/2$. Escolha-se, então $\epsilon = \delta/2$.

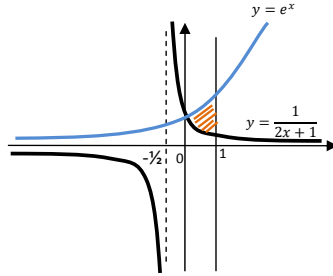
3.

$$m(x) = h(x) + f(x) \times g(x) = e^x + (2x + 1) \cdot \ln(x + 1) \quad m'(x) = e^x + 2 \ln(x + 1) + \frac{2x + 1}{x + 1}$$

$$m''(x) = e^x + \frac{2}{x + 1} + \frac{1}{(x + 1)^2} \quad m'''(x) = e^x - \frac{2}{(x + 1)^2} - \frac{2}{(x + 1)^3}$$

$$x_0 = 0, y_0 = m''(0) = 4, \text{ Declive} = m'''(0) = -3 \quad \text{Equação da recta tangente: } y = -3x + 4$$

4.



$$A = \int_0^1 \left(e^x - \frac{1}{2x + 1} \right) dx = \left[e^x - \frac{1}{2} \ln |2x + 1| \right]_0^1 = e - \frac{1}{2} \ln 3 - 1$$

$$\int_{16/9}^{+\infty} \frac{1}{(\sqrt{x})^3} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_{16/9}^b \frac{1}{(\sqrt{x})^3} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[-\frac{2}{\sqrt{x}} \right]_{16/9}^b = \frac{3}{2}$$

$$e - \frac{1}{2} \ln 3 - 1 < e - \frac{1}{2} \ln e - 1 = e - \frac{3}{2} < 1.3 < \frac{3}{2}. \text{ Logo não é maior.}$$

GRUPO V (40 PONTOS)

Escolha uma das opções (A,B,C,D). Cada resposta **correcta** vale **8 pontos**, cada resposta **incorrecta** desconta **3 pontos**, sem resposta não desconta. Este grupo pode ter **cotação negativa**. Não é necessária qualquer justificação. Só se terá em consideração a opção apresentada.

1. Qual das seguintes afirmações é *VERDADEIRA*?

(A) Sendo A e B matrizes de ordem n , tem-se que $|A + B| = |A| \Rightarrow |B| = 0$

(B) Se A é uma matriz invertível, então $\text{adj}(A^T) = (\text{adj}(A))^T$

(C) Se A é uma matriz invertível, então $(A^T)^{-1} = \frac{1}{|A|}(\text{adj}(A^T))^T$

(D) A inversa da soma de matrizes é a soma das matrizes inversas, quando as operações estão definidas
Solução: B

2. Sejam A e B duas matrizes quaisquer e O uma matriz nula.

Qual das seguintes afirmações é *VERDADEIRA*?

(A) Se o produto AA existe, então A é uma matriz quadrada

(B) Se $AB = O$, então $BA = O$

(C) Se A e B têm a mesma dimensão, então AB tem inversa

(D) $A - A^T$ é simétrica

Solução: A

3. Considere as seguintes afirmações:

I. Se uma função f é diferenciável em \mathbb{R} , então e^f é contínua em \mathbb{R}

II. Uma função par nunca é injectiva

III. Uma função ímpar tem contradomínio \mathbb{R}

A lista completa das afirmações correctas é:

(A) I e II (B) I e III (C) II e III (D) Todas as afirmações

Solução: A

4. Qual das seguintes afirmações é *VERDADEIRA*:

(A) $|x|' = 1, \forall x \in \mathbb{R}$ (B) $\left(\frac{x}{x}\right)' = 1, \forall x \in \mathbb{R}$ (C) $\left(\frac{|x|}{x}\right)' = 0, \forall x \in \mathbb{R}$ (D) $\left(\frac{|x+1|}{x+1}\right)' = 0, \forall x > 0$

Solução: D

5. Seja $f(x) = \ln(x^x)$. Qual das seguintes afirmações é *VERDADEIRA*:

(A) $f'(e) = 0$

(B) $f'(e) = 1$

(C) $f'(e) = 2$

(D) $f'(e) = e$

Solução: C