

Matemática I - 1^a
Parte: Álgebra
Linear

Ana Rita Martins

Álgebra Matricial

Sistemas de
Equações Lineares

Método de
Eliminação de
Gauss

Algoritmo de
inversão de
matrizes

Espaços Lineares

Valores e Vectores
próprios de uma
matriz

Matemática I - 1^a Parte: Álgebra Linear

Ana Rita Martins

Católica Lisbon

1^o Semestre 2012/2013

É comum o recurso a tabelas para organizar informação diversa. No entanto, estes objectos não são, em geral, “manipuláveis”.

Exemplo

Tabela 1 – Apresentação da média de idades, da altura e do peso dos elementos constituintes da amostra

N	Valor	IDADE		ALTURA		Rendimento colectável (euros)	Taxas (percentagem)	
		5	5	5	5		Normal (A)	Média (B)
Média		25,40		179,40				
Mediana		24,00		182,00				
Moda		18 ^a		189 ^a				
Desvio padrão		5,88		14,67				
Valor mínimo		18		159				
Valor máximo		32		195				

A. B. C. D. E. F. G. H. I. J. K. L. M. N. O. P. Q. R. S. T. U. V. W. X. Y. Z.

Classificação

Posição	Equipa
1º	F.C. Porto
2º	S.L. Benfica
3º	Sporting C.P.
4º	Belenenses
5º	Sp. Braga

Até 4 793	10,5	10,500 0
De mais de 4 793 até 7 250	13	11,347 1
De mais de 7 250 até 17 979	23,5	18,599 6
De mais de 17 979 até 41 349	34	27,303 9
De mais de 41 349 até 59 926	36,5	30,154 6
De mais de 59 926 até 64 623	40	30,870 2
Superior a 64 623	42	

Para ultrapassar esta “limitação” é usual recorrer às chamadas **matrizes**.

As matrizes não só permitem uma simplificação no tratamento dos dados incluídos em tabelas, como as regras algébricas para a manipulação de matrizes são semelhantes às regras de manipulação de números reais.

Definição

Uma matriz é uma entidade matemática representada por uma tabela rectangular de números.

Mais precisamente, dados $n, m \in \mathbb{N}$ chama-se **matriz de tipo (ou dimensão) $m \times n$** a uma tabela rectangular de nm números reais distribuídos por m -linhas e n -colunas preenchidas por números reais:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

($a_{ij} \in \mathbb{R}$, para todo o $i = 1, \dots, m$ e $j = 1, \dots, n$).

Exemplo

Matemática I - 1^a
Parte: Álgebra
Linear

Ana Rita Martins

Álgebra Matricial

Sistemas de
Equações Lineares

Método de
Eliminação de
Gauss

Algoritmo de
inversão de
matrizes

Espaços Lineares

Valores e Vectores
próprios de uma
matriz

Consideremos uma cadeia de lojas constituída por 3 lojas L_1, L_2, L_3 , cada uma vendendo 10 produtos diferentes P_1, \dots, P_{10} , e denotemos por v_{ij} o valor (em euros) das vendas do produto P_i na loja L_j num certo mês do ano.

Então uma maneira simples e adequada de organizar esta informação será através da seguinte matriz do tipo 10×3 :

$$\begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ v_{10\ 1} & v_{10\ 2} & v_{10\ 3} \end{bmatrix}$$

Desta forma, por exemplo, se $v_{92} = 575$ significa que o valor das vendas do produto P_9 na Loja L_2 correspondeu a 575 euros no mês em questão.

É usual recorrer a letras maiúsculas (A, B, C, X, Y, \dots) para representar matrizes.

No caso de se pretender explicitar as entradas de uma matriz A do tipo $m \times n$, é também usual representar A da forma:

$$A = [a_{ij}]_{i=1, \dots, m, j=1, \dots, n},$$

ou simplesmente,

$$A = [a_{ij}],$$

quando está definida à partida a dimensão da matriz.

Para evidenciar o tipo $m \times n$ de uma matriz A , é também costume escrever $A_{m \times n}$.

- As matrizes $m \times 1$ chamam-se **matrizes coluna**

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}$$

- As matrizes $1 \times n$ chamam-se **matrizes linha**

$$[a_{11} \dots a_{1n}]$$

- As matrizes $n \times n$ chamam-se **matrizes quadradas**

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

- As matrizes $m \times n$ com $m \neq n$ chamam-se **matrizes rectangulares**.

Definição

Dada uma matriz quadrada $A = [a_{ij}]$ do tipo $n \times n^*$ chama-se **diagonal principal de A** às entradas $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$:

$$\begin{bmatrix} \color{red}{a_{11}} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \color{red}{a_{22}} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \color{red}{a_{nn}} \end{bmatrix}$$

e diz-se que:

- A é **triangular superior** se $a_{ij} = 0$ para $i > j$.

Por exemplo, para $n = 3$, são da forma:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$$

*Também é costume dizer apenas que A é uma matriz quadrada de **ordem n** .

Definição

- A é **triangular inferior** se $a_{ij} = 0$ para $i < j$.

Por exemplo, para $n = 3$, são da forma: :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

- A é **diagonal**, se for simultaneamente triangular superior e inferior, isto é, se $a_{ij} = 0$, para $i \neq j$.

Por exemplo, se $n = 3$, são da forma:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$$

Se, além disso, todos os elementos da diagonal forem iguais, então a matriz também se diz uma **matriz escalar**.

- Chamamos **matriz identidade de dimensão n** , denotada por I_n , à matriz quadrada $n \times n$ com diagonal principal constituída por 1's e restantes entradas nulas. Por exemplo,

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- Chamamos **matriz nula de dimensão $m \times n$** , e representamos por $0_{m \times n}$, a matriz $m \times n$ com entradas todas nulas. Por exemplo,

$$0_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Igualdade de Matrizes

Dadas matrizes $A = [a_{ij}]$ do tipo $m \times n$ e $B = [b_{kl}]$ do tipo $m' \times n'$, temos:

$$A = B \Leftrightarrow \begin{cases} m = m' \\ n = n' \\ a_{ij} = b_{ij}, \forall i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n \end{cases}$$

Por exemplo, dados $x, y, z \in \mathbb{R}$ temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2x \\ 3y + 1 & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x - 2 & 2 \\ 5z & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 3x - 2 \\ 2x = 2 \\ 3y + 1 = 5z \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -\frac{1}{3} \\ z = 0, \end{cases}$$

e acabámos de resolver uma equação matricial...

Exemplo de motivação para operações algébricas entre matrizes

Matemática I - 1^a
Parte: Álgebra
Linear

Ana Rita Martins

Álgebra Matricial

Sistemas de
Equações Lineares

Método de
Eliminação de
Gauss

Algoritmo de
inversão de
matrizes

Espaços Lineares

Valores e Vectores
próprios de uma
matriz

Voltemos ao exemplo da rede de lojas constituída por 3 lojas L_1 , L_2 , L_3 , cada uma vendendo 10 produtos diferentes P_1, \dots, P_{10} , cujos valores das vendas em cada mês i é representado pela matriz:

$$A_i = \begin{bmatrix} v_{11}^i & v_{12}^i & v_{13}^i \\ v_{21}^i & v_{22}^i & v_{23}^i \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ v_{10\ 1}^i & v_{10\ 2}^i & v_{10\ 3}^i \end{bmatrix}$$

com $i = 1, \dots, 12$.

Exemplo de motivação para a aritmética matricial

Matemática I - 1^a
Parte: Álgebra
Linear

Ana Rita Martins

Álgebra Matricial

Sistemas de
Equações Lineares

Método de
Eliminação de
Gauss

Algoritmo de
inversão de
matrizes

Espaços Lineares

Valores e Vectores
próprios de uma
matriz

Consideremos então os primeiros dois meses do ano, cujos resultados das vendas são representados respectivamente por

$$A_1 = \begin{bmatrix} v_{11}^1 & v_{12}^1 & v_{13}^1 \\ v_{21}^1 & v_{22}^1 & v_{23}^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ v_{10\ 1}^1 & v_{10\ 2}^1 & v_{10\ 3}^1 \end{bmatrix} \text{ e } A_2 = \begin{bmatrix} v_{11}^2 & v_{12}^2 & v_{13}^2 \\ v_{21}^2 & v_{22}^2 & v_{23}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ v_{10\ 1}^2 & v_{10\ 2}^2 & v_{10\ 3}^2 \end{bmatrix}$$

Se pretendermos determinar, por exemplo, o valor total das vendas do produto P_1 na loja L_1 nos dois primeiros meses do ano basta somar

$$v_{11}^1 + v_{11}^2$$

e podemos fazer o mesmo para cada loja e cada produto.

Exemplo de motivação para algebra matricial

Matemática I - 1^a
Parte: Álgebra
Linear

Ana Rita Martins

Álgebra Matricial

Sistemas de
Equações Lineares

Método de
Eliminação de
Gauss

Algoritmo de
inversão de
matrizes

Espaços Lineares

Valores e Vectores
próprios de uma
matriz

Desta forma, podemos considerar uma nova matriz:

$$\begin{bmatrix} v_{11}^1 + v_{11}^2 & v_{12}^1 + v_{12}^2 & v_{13}^1 + v_{13}^2 \\ v_{21}^1 + v_{21}^2 & v_{22}^1 + v_{22}^2 & v_{23}^1 + v_{23}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ v_{10\ 1}^1 + v_{10\ 1}^2 & v_{10\ 2}^1 + v_{10\ 2}^2 & v_{10\ 3}^1 + v_{10\ 3}^2 \end{bmatrix}$$

que representa a soma da matriz A_1 pela matriz A_2 e se denota por $A_1 + A_2$.

Exemplo de motivação para algebra matricial

Matemática I - 1^a
Parte: Álgebra
Linear

Ana Rita Martins

Álgebra Matricial

Sistemas de
Equações Lineares

Método de
Eliminação de
Gauss

Algoritmo de
inversão de
matrizes

Espaços Lineares

Valores e Vectores
próprios de uma
matriz

Imaginemos agora que os valores de venda descritos pelas matrizes A_i incluem IVA e que o IVA a considerar é 23% para todos os produtos.

Para sabermos o total de IVA a pagar por cada venda no i -ésimo mês do ano, basta multiplicar cada entrada da matriz A_i por 0,23. Obtemos assim uma nova matriz que se representa por $0,23A_i$ e está definida por:

$$0,23A_i = \begin{bmatrix} 0,23v_{11}^i & 0,23v_{12}^i & 0,23v_{13}^i \\ 0,23v_{21}^i & 0,23v_{22}^i & 0,23v_{23}^i \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0,23v_{10\ 1}^i & 0,23v_{10\ 2}^i & 0,23v_{10\ 3}^i \end{bmatrix}$$

Soma

Dadas duas matrizes $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$ do **mesmo** tipo $m \times n$, define-se a **soma** de A e B como sendo a matriz do tipo $m \times n$ representada por $A + B = [c_{ij}]$ e cuja entrada (i, j) é dada por

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

Produto Escalar

Sejam agora $A = [a_{ij}]$ uma matriz do tipo $m \times n$ e α um número real. Define-se o **produto escalar de α por A** como sendo a matriz do tipo $m \times n$ representada por $\alpha A = [c_{ij}]$ e cuja entrada (i, j) é dada por

$$c_{ij} = \alpha a_{ij}.$$

No caso em que $\alpha = -1$, representamos $(-1)A$ simplesmente por $-A$, sendo esta última matriz o elemento simétrico de A para a operação de soma de matrizes.

Subtração

Dadas duas matrizes $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$ do **mesmo** tipo $m \times n$, define-se a **subtração** de A e B como sendo a matriz $A + (-1)B$, isto é, a matriz do tipo $m \times n$ representada por $A - B = [c_{ij}]$ e cuja entrada (i, j) é dada por

$$c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}.$$

Propriedades da soma de matrizes

- **Comutatividade**

$$A + B = B + A$$

- **Associatividade**

$$A + (B + C) = (A + B) + C$$

- **Existência de elemento neutro**

$$A + 0_{m \times n} = A$$

- **Existência de simétrico**

$$A + (-A) = 0_{m \times n}$$

Propriedades do produto escalar

- **Distributividade I**

$$\alpha(B + C) = \alpha B + \alpha C$$

- **Distributividade II**

$$(\alpha + \beta)C = \alpha C + \beta C$$

- **Associatividade**

$$\alpha(\beta C) = (\alpha\beta)C$$

Exemplo de motivação para o produto matricial

Matemática I - 1^a

Parte: Álgebra
Linear

Ana Rita Martins

Álgebra Matricial

Sistemas de
Equações Lineares

Método de
Eliminação de
Gauss

Algoritmo de
inversão de
matrizes

Espaços Lineares

Valores e Vectores
próprios de uma
matriz

Suponhamos que três empresas A , B e C partilham o mercado de um certo produto. Actualmente, a empresa A detém 20% do mercado, a B detém 60% e a C detém 20%. No decorrer do próximo ano, prevê-se que as seguintes alterações vão ocorrer:

- A vai manter 85% dos seus clientes, vai perder 5% para a empresa B e 10% para a empresa C ;
- B vai manter 55% dos seus clientes, vai perder 10% para a empresa A e 35% para a empresa C ;
- C vai manter 85% dos seus clientes, vai perder 10% para a empresa A e 5% para a empresa B ;

É fácil de concluir que, por exemplo, a percentagem de mercado que a empresa A irá deter no próximo ano é então obtida através do cálculo:

$$0,85 \times 0,2 + 0,10 \times 0,6 + 0,10 \times 0,2 = 0,25,$$

portanto 25%!

Motivação para a operação de produto entre matrizes

Matemática I - 1^a
Parte: Álgebra
Linear

Ana Rita Martins

Álgebra Matricial

Sistemas de
Equações Lineares

Método de
Eliminação de
Gauss

Algoritmo de
inversão de
matrizes

Espaços Lineares

Valores e Vectores
próprios de uma
matriz

Podemos incluir a informação acima em duas matrizes

$$T = \begin{bmatrix} 0,85 & 0,10 & 0,10 \\ 0,05 & 0,55 & 0,05 \\ 0,10 & 0,35 & 0,85 \end{bmatrix} \text{ e } s = \begin{bmatrix} 0,2 \\ 0,6 \\ 0,2 \end{bmatrix}.$$

A matriz T é chamada a matriz de transição e s o valor de cota de mercado inicial. A cota de mercado para a empresa A é então obtida por “multiplicação” da primeira linha de T com a coluna da matriz s . Podemos também repetir este cálculo para cada uma das linhas de T e o resultado será então uma matriz coluna

$$\begin{bmatrix} 0,25 \\ 0,35 \\ 0,40 \end{bmatrix}$$

obtida pelo chamado produto da matriz T pela matriz s e denotado por Ts , que nos dá as cotas de mercado após um ano.

Qual será a interpretação do produto $T(Ts)$?

Sejam A uma matriz $m \times r$ e B uma matriz $r \times n$ (isto é, o número de colunas de A coincide com o número de linhas de B). Nestas condições, pode definir-se o **produto** de $A = [a_{ik}]$ por $B = [b_{kj}]$, dado por uma matriz $m \times n$, denotada por $AB = [c_{ij}]$, com entrada (i, j) definida por:

$$c_{ij} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{i1} & \cdots & a_{ir} \end{bmatrix}}_{\text{i-ésima linha de } A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{rj} \end{bmatrix}}_{\text{j-ésima coluna de } B} =$$
$$= a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ir}b_{rj} = \sum_{k=1}^r a_{ik}b_{kj}.$$

Exemplos

$$\bullet \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1a + 2c & 1b + 2d \\ 3a + 4c & 3b + 4d \\ 5a + 6c & 5b + 6d \end{bmatrix}$$

$$\bullet \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \times 1 + 0 \times 5 + 2 \times 9 & 1 \times 2 + 0 \times 6 + 2 \times 10 & c_{13} & c_{14} \\ 3 \times 1 + 4 \times 5 + 5 \times 9 & 3 \times 2 + 4 \times 6 + 5 \times 10 & c_{23} & c_{24} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & 1 \times 3 + 0 \times 7 + 2 \times 11 & 1 \times 4 + 0 \times 8 + 2 \times 12 \\ c_{21} & c_{22} & 3 \times 3 + 4 \times 7 + 5 \times 11 & 3 \times 4 + 4 \times 8 + 5 \times 12 \end{bmatrix}$$

Atenção:

Dadas matrizes A, B, C pode acontecer que:

- o produto AB esteja bem definido mas o produto BA não o esteja;
- os produtos AB e BA estejam bem definidos mas tenham dimensões diferentes;
- os produtos AB e BA estejam bem definidos, tenham dimensões iguais, mas ainda assim se verifique $AB \neq BA$;
- $AB = 0$ não implica necessariamente que alguma das matrizes A ou B seja nula;
- $AB = AC$ e $A \neq 0$ não implica necessariamente $B = C$.

Definição

Dadas matrizes A e B tais que ambos produtos AB e BA estejam bem definidos, dizem-se **permutáveis** se $AB = BA$.

Apesar do produto de matrizes não ser, em geral, comutativo, partilha semelhanças com o produto dos números reais.

Propriedades do Produto Matricial

Dadas matrizes $A, B, C, \alpha \in \mathbb{R}$, $m, n \in \mathbb{N}$, usando a mesma notação 0 para designar qualquer matriz nula, e supondo que todas as operações estão bem definidas, pode mostrar-se a validade das seguintes propriedades:

- **Associatividade** $A(BC) = (AB)C$
- **Existência de elemento neutro** $AI_n = I_nA = A$
- **Existência de elemento absorvente** $A0 = 0$ e $0A = 0$
- **Distributividade do produto em relação à soma (à esquerda)**
 $A(B + C) = AB + AC$
- **Distributividade do produto em relação à soma (à direita)**
 $(B + C)A = BA + CA$
- **Relação entre o produto de matrizes e o produto escalar**
 $\alpha(BC) = (\alpha B)C = B(\alpha C)$

Dada uma matriz A quadrada $n \times n$ e $p \in \mathbb{N}_0$, definem-se as potências de A recursivamente:

$$\begin{cases} A^0 = I_n \\ A^p = AA^{p-1}, \end{cases}$$

isto é, para $p \in \mathbb{N}$, $A^p = AA \cdots A$ (produto de p -cópias de A).

Propriedades das potências de uma matriz

- $A^m A^n = A^{m+n}$
- $(A^m)^n = A^{mn}$

Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz $m \times n$. A **transposta** de A é a matriz $n \times m$, denotada por A^T , que resulta da troca entre as linhas e as colunas de A , ou seja, a entrada (i, j) de A^T é dada por

$$[A^T]_{ij} = a_{ji}.$$

Propriedades da transposta de uma matriz

- $(A^T)^T = A$
- $(A + B)^T = A^T + B^T$
- $(\alpha A)^T = \alpha A^T$
- $(AB)^T = B^T A^T$

Definição

Uma matriz quadrada A diz-se:

- simétrica se $A^T = A$;
- anti-simétrica se $A^T = -A$.

Seja A uma matriz $n \times n$. Chama-se **traço** de $A = [a_{ij}]$ e denota-se por $tr(A)$, a soma das entradas da diagonal principal de A , ou seja,

$$tr(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii} = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}.$$

Propriedades do traço de uma matriz

- $tr(A + B) = tr(A) + tr(B)$;
- $tr(\alpha A) = \alpha tr(A)$;
- $tr(A^T) = tr(A)$;
- $tr(AB) = tr(BA)$.

No contexto dos números reais, é conhecido que todo o real não nulo admite inverso, isto é:

$$\forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad a \frac{1}{a} = \frac{1}{a} a = 1,$$

sendo $\frac{1}{a}$, o inverso de a , também denotado por a^{-1} .

Definição

Uma matriz quadrada A de ordem n diz-se **invertível** se existir uma matriz do mesmo tipo B tal que

$$AB = BA = I_n,$$

chamando-se a B uma inversa de A .

De facto, existindo inversa de uma matriz, ela é única:

$$\begin{cases} AB = BA = I_n \\ AB' = B'A = I_n \end{cases} \Rightarrow B = BI_n = B(AB') = (BA)B' = I_n B' = B',$$

pelo que se representa a inversa de uma matriz A por A^{-1} .

A operação de inversão de uma matriz é compatível com a aritmética matricial, no seguinte sentido:

Propriedades da inversão matricial

Sejam A e B duas matrizes invertíveis e consideremos $p \in \mathbb{N}$ e $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$:

- a matriz AB também é invertível e tem-se $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;
- A^{-1} é invertível, com inversa dada por $(A^{-1})^{-1} = A$;
- A^p é invertível e $(A^p)^{-1} = (A^{-1})^p$;
- αA é invertível e $(\alpha A)^{-1} = \alpha^{-1}A^{-1}$;
- A^T é invertível e $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Potências de Expoente Inteiro

Matemática I - 1^a
Parte: Álgebra
Linear

Ana Rita Martins

Álgebra Matricial

Sistemas de
Equações Lineares

Método de
Eliminação de
Gauss

Algoritmo de
inversão de
matrizes

Espaços Lineares

Valores e Vectores
próprios de uma
matriz

Dada uma matriz A quadrada $n \times n$ invertível e $p \in \mathbb{Z}$, define-se:

$$A^{-p} = (A^{-1})^p.$$

Propriedades

Dada uma matriz invertível A e números inteiros p, q , valem as igualdades:

- $A^m A^n = A^{m+n}$
- $(A^m)^n = A^{mn}$

No entanto, não sendo o produto de matrizes comutativo, tem-se em geral que

$$A^p B^p \neq (AB)^p$$

A maior parte dos modelos matemáticos usados por economistas envolvem sistemas de várias equações. No caso das equações serem lineares, o estudo de tais sistemas pertence ao domínio da Álgebra Linear.

Mesmo que as equações não sejam lineares, interessa analisar, por exemplo, como se comporta a solução dos sistemas em resposta a variações (lineares) nas variáveis exógenas ou parâmetros.

Vamos, desta forma, aprender a representar os sistemas de equações lineares de forma simples e resolvê-los através de um algoritmo chamado o **Método de Eliminação de Gauss**.

Equações Lineares

Matemática I - 1^a
Parte: Álgebra
Linear

Ana Rita Martins

Álgebra Matricial

Sistemas de
Equações Lineares

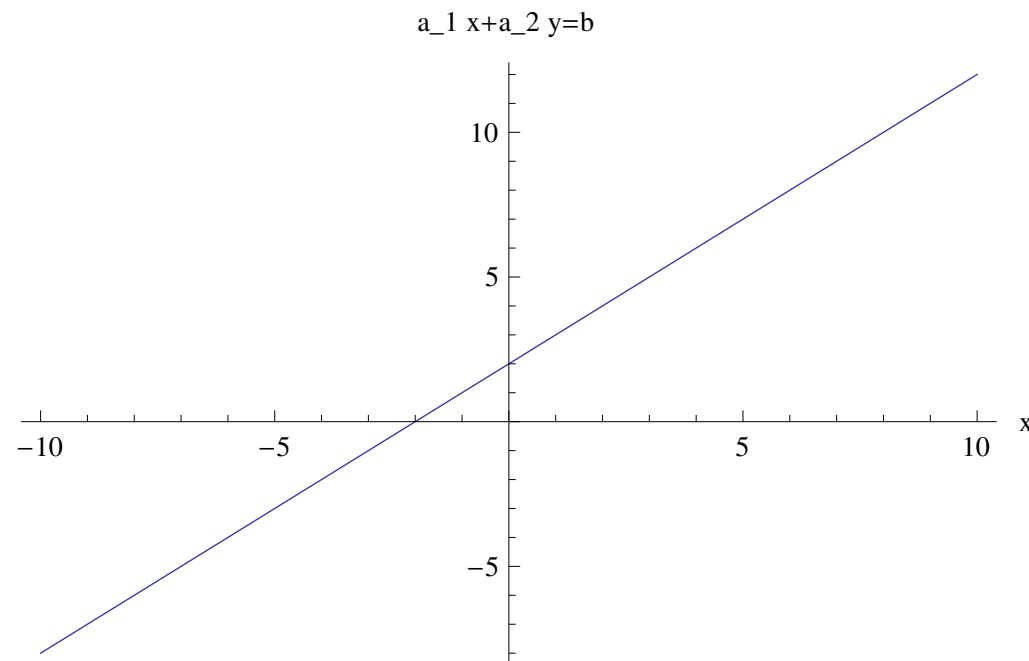
Método de
Eliminação de
Gauss

Algoritmo de
inversão de
matrizes

Espaços Lineares

Valores e Vectores
próprios de uma
matriz

Qualquer recta no plano xy pode descrever-se algebricamente através de uma equação da forma $a_1x + a_2y = b$, onde a_1, a_2, b são números reais fixos e a_1, a_2 não são simultaneamente nulos.



Equações Lineares

Matemática I - 1^a
Parte: Álgebra
Linear

Ana Rita Martins

Álgebra Matricial

Sistemas de
Equações Lineares

Método de
Eliminação de
Gauss

Algoritmo de
inversão de
matrizes

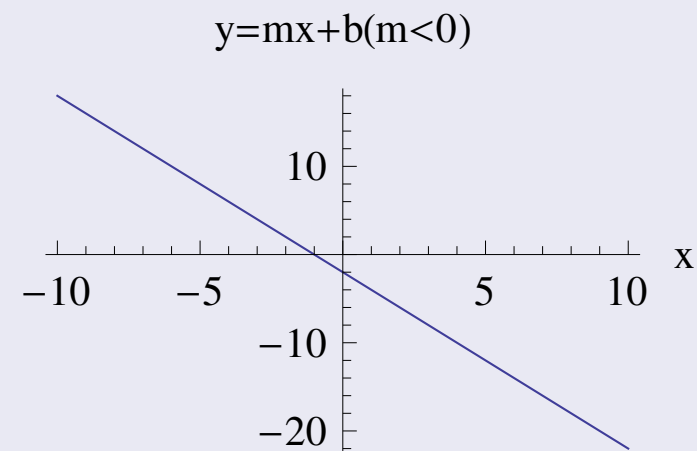
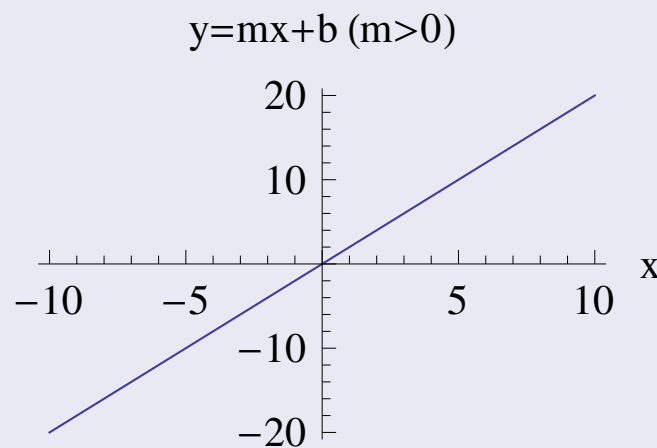
Espaços Lineares

Valores e Vectores
próprios de uma
matriz

As rectas são tipicamente usadas pelos economistas para descrever relações entre duas variáveis.

Por exemplo, dada uma recta de equação $y = mx + b$:

- se $m > 0$ significa que as variáveis x e y estão em relação directa;
- se $m < 0$ significa que as variáveis x e y estão em relação inversa.



Definição

Mais geralmente, chama-se equação linear nas n variáveis x_1, \dots, x_n a uma equação da forma

$$a_1x_1 + \dots + a_nx_n = b, \quad (2.1)$$

onde a_1, \dots, a_n, b são números reais fixos e a_1, \dots, a_n não são simultaneamente nulos.

As variáveis x_1, \dots, x_n também se designam por incógnitas.

Uma **solução particular** de (2.1) é uma sequência de n números reais (s_1, \dots, s_n) tal que $a_1s_1 + \dots + a_ns_n = b$.

O conjunto de todas as soluções particulares diz-se o **conjunto solução** ou a **solução geral** de (2.1).

Definição

Chama-se sistema de equações lineares (SEL) a um conjunto finito de equações lineares nas n variáveis x_1, \dots, x_n .

Qualquer SEL com m equações e n incógnitas (SEL $m \times n$) pode escrever-se na forma

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (2.2)$$

onde os a 's e b 's são números reais fixos e os a 's não são simultaneamente nulos.

Uma **solução particular** do SEL (2.2) é uma sequência de n números reais (s_1, \dots, s_n) que é solução particular de cada uma das m equações do SEL. O conjunto de todas as soluções particulares de (2.2) diz-se o **conjunto solução** ou a **solução geral do SEL**.

Notação

Se $b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0$, o SEL diz-se **homogéneo**.

O SEL diz-se **possível** se o conjunto solução for não vazio; caso contrário, dir-se-á **impossível**.

No caso de um SEL possível, diz-se ainda que o SEL é:

- **possível e determinado** se o conjunto solução for constituído por um único elemento;
- **possível e indeterminado** se o conjunto solução tiver mais que um elemento*.

*De facto, pode provar-se que o conjunto solução de um SEL possível e indeterminado admite sempre uma infinidade de elementos.

Proposição

Os SEL's homogéneos são sempre possíveis!

Significado geométrico do conjunto solução de um SEL: Exemplo

Matemática I - 1^a
Parte: Álgebra
Linear

Ana Rita Martins

Álgebra Matricial

Sistemas de
Equações Lineares

Método de
Eliminação de
Gauss

Algoritmo de
inversão de
matrizes

Espaços Lineares

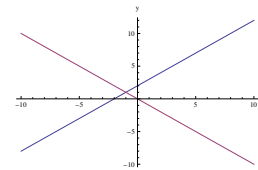
Valores e Vectores
próprios de uma
matriz

O conjunto solução de um SEL do tipo

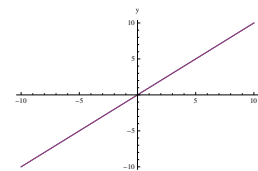
$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$$

corresponde aos pontos de interseção das rectas de equações dadas pelas equações do SEL.

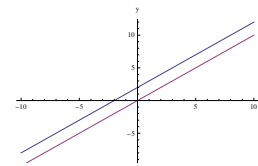
- O SEL será possível e determinado sse as rectas se intersectarem num só ponto:



- O SEL será possível e indeterminado sse as rectas coincidirem:



- o SEL será impossível sse as rectas não se intersectarem (isto é, são paralelas sem pontos comuns).



O Método de Eliminação de Gauss (MEG) é um algoritmo que simplifica a resolução de sistemas de equações lineares (SELs) e tem por base a utilização das chamadas **operações elementares** sobre as equações de um SEL.

Operações Elementares

- (OE1) Multiplicação de uma equação do SEL por um número real não nulo;
- (OE2) Troca da ordem de duas equações do SEL;
- (OE3) Soma de uma equação do SEL com um múltiplo de outra equação do SEL.

Repare-se que qualquer uma das operações elementares transforma um SEL num outro **equivalente**, isto é, com o mesmo conjunto solução.

Sistemas Lineares na forma matricial

Matemática I - 1^a
Parte: Álgebra
Linear

Ana Rita Martins

Álgebra Matricial

Sistemas de
Equações Lineares

Método de
Eliminação de
Gauss

Algoritmo de
inversão de
matrizes

Espaços Lineares

Valores e Vectores
próprios de uma
matriz

Para “implementar” o MEG com vista à resolução de um SEL, é conveniente começar por escrever o SEL na forma matricial.

Cada SEL da forma

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (3.1)$$

pode ser escrito matricialmente da seguinte maneira:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}}_{\text{matriz dos coeficientes do SEL}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{\text{coluna das incógnitas}} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}}_{\text{coluna dos termos independentes}}$$

Chama-se **matriz ampliada do SEL** à matriz:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right] \quad (3.2)$$

As operações elementares podem ser aplicadas diretamente sobre as equações de um SEL, sobre as linhas da respectiva matriz ampliada ou, mais geralmente, sobre as linhas de qualquer matriz.

Mais precisamente, dada uma matriz A com linhas L_i , $i = 1, \dots, m$, podemos considerar as seguintes operações elementares sobre A :

Operações elementares sobre matrizes

(OE1) Multiplicação da linha L_i por um número real $\alpha \neq 0$ (indica-se escrevendo αL_i);

(OE2) Troca da ordem da linha L_i com a linha L_j (indica-se escrevendo $L_i \leftrightarrow L_j$);

(OE3) Substituição de uma linha L_i por $L_i + \beta L_j$, para qualquer $\beta \in \mathbb{R}$ (indica-se escrevendo $L_i + \beta L_j$).

Algoritmo MEG: Consiste em aplicar sucessivamente operações elementares à matriz aumentada do SEL até obter uma matriz em escada de linhas, i.e., uma matriz que satisfaz as seguintes propriedades:

- todas as linhas nulas estão agrupadas na base da matriz;
- para quaisquer duas linhas consecutivas não nulas, a primeira entrada não nula da linha inferior está situada numa coluna mais à direita que a coluna correspondente à primeira entrada não nula da linha superior.

A este processo de transformar uma matriz dada numa matriz em escada de linhas também se chama o processo de condensação da matriz.

Matrizes em escada de linhas

Matemática I - 1^a
Parte: Álgebra
Linear

Ana Rita Martins

Álgebra Matricial

Sistemas de
Equações Lineares

Método de
Eliminação de
Gauss

Algoritmo de
inversão de
matrizes

Espaços Lineares

Valores e Vectores
próprios de uma
matriz

Exemplos de matrizes em escada de linhas

$$I_n \ (\forall n \in \mathbb{N}), \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Exemplos de matrizes que não estão em escada de linhas

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- (1) Escrever a matriz aumentada do SEL;
- (2) Localizar a coluna mais à esquerda que não tenha todas as entradas nulas;
- (3) Se necessário, trocar linhas de forma a que a entrada da primeira linha correspondente à coluna mencionada na alínea anterior seja diferente de zero.
- (4) Somar múltiplos apropriados da primeira linha às restantes linhas de forma a que todas as entradas debaixo da entrada não nula se anulem.
- (5) Fixar a primeira linha e repetir o procedimento para a submatriz que resta.
- (6) O MEG termina quando obtivermos uma matriz em escada de linhas.

A matriz em escada de linhas obtida pelo MEG corresponde a um SEL equivalente ao inicial e permite calcular de modo simples a solução pretendida.

Vamos aplicar o MEG ao seguinte SEL:

$$x + 2y + 3z = 1$$

$$x + z = 1$$

$$3x + 2y + z = 0$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow[L_3 - 3L_1]{L_2 - L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & -3 \end{array} \right] \xrightarrow{L_3 - 2L_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -3 \end{array} \right]$$

O SEL inicial é, portanto, equivalente ao SEL:

$$\begin{array}{rclcl} x & + & 2y & + & 3z & = & 1 \\ & - & 2y & - & 2z & = & 0 \\ & & & - & 4z & = & -3 \end{array} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{4} \\ y = \frac{-3}{4} \\ z = \frac{3}{4} \end{cases}$$

Para otimizar o processo de determinação da solução geral do SEL é conveniente introduzir os conceitos seguintes:

Definição

- Chama-se **pivot** ao primeiro elemento não nulo de cada linha de uma matriz em escada de linhas.
- As **variáveis livres** são as incógnitas que correspondem às colunas da matriz em escada de linhas obtida após aplicação do MEG que não contenham os pivots, chamando-se as restantes variáveis de variáveis não livres.

O número de variáveis livres de um SEL também se costuma designar o número de graus de liberdade do SEL.

Neste caso, a matriz dos coeficientes é quadrada, isto é, existem tantas equações quanto incógnitas e, após a condensação da matriz ampliada do SEL, um dos casos pode acontecer:

- SEL possível e determinado;
- SEL possível e indeterminado;
- SEL impossível.

1) Existem tantos pivots quanto o número de incógnitas \Rightarrow SEL possível e determinado

$$\left[\begin{array}{ccc|c} x & x & x & x \\ 0 & x & x & x \\ 0 & 0 & x & x \end{array} \right]$$

- 2) Pelo menos uma das linhas da matriz ampliada é nula e todas as linhas não nulas (da matriz ampliada) correspondem a linhas não nulas da matriz dos coeficientes.



Pelo menos uma das equações é universal ($0 = 0$)



SEL possível e indeterminado, com tantos graus de liberdade quantas as linhas nulas

$$\left[\begin{array}{ccc|c} x & x & x & x \\ 0 & x & x & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

3) existe pelo menos uma linha cujo pivot se encontra na coluna dos termos independentes



pelo menos uma das equações é impossível ($0 = 1$)



SEL impossível

$$\left[\begin{array}{ccc|c} x & x & x & x \\ 0 & x & x & x \\ 0 & 0 & 0 & x \end{array} \right]$$

Neste caso, sendo o n° de incógnitas superior ao de equações existirá, pelo menos, uma variável livre. Desta forma, o SEL nunca poderá ser possível e determinado, ocorrendo um dos seguintes casos:

- Existe, pelo menos, uma linha nula na matriz dos coeficientes do SEL à qual corresponde uma linha não nula na matriz ampliada do sistema, isto é, o SEL é **impossível**

$$\left[\begin{array}{cccc|c} x & x & x & x & x \\ 0 & x & x & x & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x \end{array} \right]$$

- Caso contrário, o SEL será **possível e indeterminado**,

$$\left[\begin{array}{cccc|c} x & x & x & x & x \\ 0 & x & x & x & x \\ 0 & 0 & x & x & x \end{array} \right] \text{ ou } \left[\begin{array}{cccc|c} x & x & x & x & x \\ 0 & x & x & x & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Discussão de SEL's na forma matricial: caso $n < m$

Matemática I - 1^a

Parte: Álgebra
Linear

Ana Rita Martins

Álgebra Matricial

Sistemas de
Equações Lineares

Método de
Eliminação de
Gauss

Algoritmo de
inversão de
matrizes

Espaços Lineares

Valores e Vectores
próprios de uma
matriz

Neste caso, existem mais equações que incógnitas e, após condensação, a nova matriz dos coeficientes terá todas as linhas nulas abaixo da m -ésima linha. Dois casos podem então acontecer:

- Existe, pelo menos, uma linha nula da nova matriz dos coeficientes (abaixo da m -ésima) à qual corresponde uma linha não nula na nova matriz ampliada do sistema



SEL impossível

$$\left[\begin{array}{ccc|c} x & x & x & x \\ 0 & x & x & x \\ 0 & 0 & x & x \\ 0 & 0 & 0 & x \end{array} \right]$$

- Todas as linhas da nova matriz ampliada que estão abaixo da m -ésima linha são nulas



o SEL é equivalente a um SEL com n linhas e n incógnitas

$$\left[\begin{array}{ccc|c} x & x & x & x \\ 0 & x & x & x \\ 0 & 0 & x & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} x & x & x & x \\ 0 & x & x & x \\ 0 & 0 & x & x \end{array} \right]$$

Método de Eliminação de Gauss-Jordan (MEGJ)

Matemática I - 1^a
Parte: Álgebra
Linear

Ana Rita Martins

Álgebra Matricial

Sistemas de
Equações Lineares

Método de
Eliminação de
Gauss

Algoritmo de
inversão de
matrizes

Espaços Lineares

Valores e Vectors
próprios de uma
matriz

O algoritmo de inversão de matrizes tem por base uma extensão do MEG denominado:

Método de Eliminação de Gauss-Jordan (MEGJ)

que consiste na aplicação sucessiva de operações elementares a uma matriz de forma a transformá-la numa matriz em escada de linhas reduzida, i.e., numa matriz em escada de linhas que satisfaz as seguintes propriedades adicionais:

- Todos os pivots são iguais a 1;
- Todas as colunas com pivots têm as restantes entradas nulas.

Exemplos de matrizes em escada de linha reduzidas

$$I_n \ (\forall n \in \mathbb{N}), \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A matriz inversa de uma matriz A de ordem n é, por definição, a única matriz $B = [b_{ij}]$ de ordem n , tal que

$$AB = I \text{ e } BA = I.$$

Por definição de produto matricial, significa, em particular, que o produto de A pela j -ésima coluna de B será igual à j -ésima coluna de I_n :

$$A \cdot \begin{bmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{jj} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \forall j = 1, \dots, n$$

Desta forma, determinar B corresponde a resolver n SEL's, todos com a mesma matriz dos coeficientes A , o que pode ser feito da seguinte maneira:

Seja A uma matriz $n \times n$.

- (1) Considere a matriz $[A|I_n]$
- (2) Aplique o MEGJ até transformar a matriz $[A|I_n]$ numa matriz da forma $[I_n|B]$

Então ter-se-á $B = A^{-1}$. Se não for possível obter-se uma matriz da forma $[I_n|B]$, então A não será invertível.

Aplicação: SEL com matriz dos coeficientes quadrada

Matemática I - 1^a
Parte: Álgebra
Linear

Ana Rita Martins

Álgebra Matricial

Sistemas de
Equações Lineares

Método de
Eliminação de
Gauss

Algoritmo de
inversão de
matrizes

Espaços Lineares

Valores e Vectores
próprios de uma
matriz

Proposição

Um SEL com o mesmo número de equações e incógnitas será possível e determinado se, e somente se, a matriz dos coeficientes for invertível.

Mais precisamente, dado um SEL escrito matricialmente na forma

$$AX = B,$$

onde A é uma matriz quadrada $n \times n$ e B uma matriz coluna $n \times 1$, o SEL será possível e determinado se, e somente se, a matriz A for invertível e, nesse caso a solução é dada por

$$X = A^{-1}B.$$

Desta forma, interessa muitas vezes determinar a invertibilidade ou não de uma matriz, sem ter de calcular a sua inversa.

Para responder ao problema de invertibilidade, temos então o chamado **determinante** de uma matriz quadrada A que é um escalar associado à matriz, denotado por $\det A$, ou por $|A|$, e que satisfaz a seguinte propriedade:

$$A \text{ é invertível} \Leftrightarrow \det A \neq 0.$$

Existem várias maneiras de definir o conceito de determinante de uma matriz $n \times n$. A definição que vamos dar segue o chamado **Teorema de Laplace** e permite definir o determinante de forma recursiva, ou seja, definimos o determinante de uma matriz $n \times n$ a partir de determinantes de submatrizes $(n - 1) \times (n - 1)$ da matriz inicial.

Para $n = 1$, isto é, para matrizes com uma única entrada a_{11} , o determinante é a própria entrada a_{11} :

$$|a_{11}| = a_{11}.$$

Para $n = 2$, isto é, para matrizes da forma $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, tem-se

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

Para definir o determinante de matrizes de ordem superior necessitamos de introduzir a seguinte notação:

Definição

Seja A uma matriz $n \times n$, onde $n \geq 2$. Chama-se **cofactor da entrada** (i, j) ao número real

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ij}),$$

onde A_{ij} é a matriz $(n - 1) \times (n - 1)$ que se obtém da matriz A removendo a linha i e a coluna j .

Chama-se **matriz dos cofactores de A** , e denota-se por $Cof(A)$ à matriz $n \times n$ cuja entrada (i, j) é dada pelo cofactor da entrada (i, j) .

Chama-se ainda **matriz adjunta de A** e denota-se por $adj(A)$, a matriz transposta de $Cof(A)$:

$$adj(A) = Cof(A)^T.$$

Seja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}.$$

Então, por exemplo:

$$A_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}_{12} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$$

$$A_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

Fórmula de Laplace

Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz $n \times n$, onde $n \geq 2$. Definimos o determinante de A através da seguinte fórmula:

$$\det(A) = \sum_{k=1}^n a_{jk} C_{jk} = a_{j1} C_{j1} + a_{j2} C_{j2} + \dots + a_{jn} C_{jn}, \quad \forall j = 1, \dots, n, \quad (4.1)$$

onde C_{jk} denota o cofactor da entrada (j, k) .

A equação (4.1) chama-se fórmula de Laplace com expansão na linha j , $j = 1, \dots, n$.

Também se pode considerar a fórmula correspondente a expansões em colunas.

Exemplo

Matemática I - 1^a
Parte: Álgebra
Linear

Ana Rita Martins

Álgebra Matricial

Sistemas de
Equações Lineares

Método de
Eliminação de
Gauss

Algoritmo de
inversão de
matrizes

Espaços Lineares

Valores e Vectores
próprios de uma
matriz

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} 1 \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} 2 \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} 3 \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = (-1)^{1+2} 4 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} 5 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3} 6 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = (-1)^{1+2} 2 \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} 5 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3} 6 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

Matrizes 3×3 : Regra de Sarrus

Matemática I - 1^a
Parte: Álgebra
Linear

Ana Rita Martins

Álgebra Matricial

Sistemas de
Equações Lineares

Método de
Eliminação de
Gauss

Algoritmo de
inversão de
matrizes

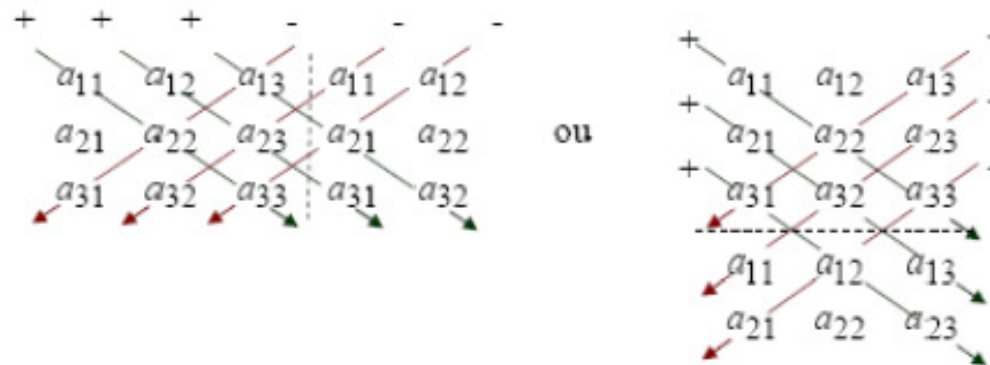
Espaços Lineares

Valores e Vectores
próprios de uma
matriz

No caso especial das matrizes 3×3 , podemos usar a seguinte “mnemónica” para calcular o determinante:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33})$$



Propriedades dos determinantes

Seja A uma matriz $n \times n$ e seja B a matriz $n \times n$ que se obtém a partir de A por aplicação de uma operação elementar e . Então:

- (a) se $e = \alpha L_i$, temos que $\det(B) = \alpha \det(A)$;
- (b) se $e = L_i \leftrightarrow L_j$, temos que $\det(B) = -\det(A)$;
- (c) se $e = L_i + \alpha L_j$, temos que $\det(A) = \det(B)$.

Propriedades dos determinantes

- ① $\det(A) = \det(A^T)$;
- ② $\det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1} = \frac{1}{\det(A)}$;
- ③ $\det(AB) = \det(A) \det(B)$;
- ④ $\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$.

Atenção!

Matemática I - 1^a
Parte: Álgebra
Linear

Ana Rita Martins

Álgebra Matricial

Sistemas de
Equações Lineares

Método de
Eliminação de
Gauss

Algoritmo de
inversão de
matrizes

Espaços Lineares

Valores e Vectores
próprios de uma
matriz

O determinante não “comuta” com a operação de adição, isto é, em geral:

$$\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B).$$

Com efeito, tomando, por exemplo, $A = I_2$ e $B = -A$ temos:

$$\det(A + B) = \det(A - A) = \det(0_{2 \times 2}) = 0 \neq 2 = \det(A) + \det(B).$$

Proposição

Seja A uma matriz quadrada admitindo alguma linha ou coluna constituída por zeros, então $\det(A) = 0$.

Proposição

O determinante de qualquer matriz triangular é dado pelo produto dos elementos da diagonal principal:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} \cdots a_{nn} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Proposição

Seja A uma matriz quadrada invertível então

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A).$$

Regra de Cramer

Seja $AX = B$ um SEL $n \times n$ tal que $\det(A) \neq 0$. Então o SEL tem solução única dada por:

$$X = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} \det(A_1) \\ \det(A_2) \\ \vdots \\ \det(A_n) \end{bmatrix},$$

onde A_j é a matriz que se obtém substituindo a coluna j da matriz A pelas entradas da matriz coluna B .

Vimos anteriormente que é possível definir no conjunto das matrizes do tipo $m \times n$ duas operações algébricas: a **soma** e o **produto por um escalar**, operações estas que verificam as seguintes propriedades:

- (a) $A + B = B + A$;
- (b) $(A + B) + C = A + (B + C)$;
- (c) $A + 0_{m \times n} = A$;
- (d) $A + (-A) = 0_{m \times n}$;
- (e) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$;
- (f) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$;
- (g) $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$;
- (h) $1A = A$

onde A, B, C denotam matrizes $m \times n$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Propriedades análogas são verificadas no espaço dos números reais \mathbb{R} ou até em qualquer espaço da forma \mathbb{R}^n , quando consideramos a soma e produtos usuais (basta substituir as matrizes A, B, C por elementos dos conjuntos descritos, respectivamente).

De facto, estas propriedades não são intrínsecas aos conjuntos mencionados, mas conferem uma estrutura que destaca as propriedades das operações definidas e não os objectos em si.

Surge assim a seguinte definição:

Definição

Chama-se **espaço linear** ou **vectorial** a um conjunto V onde estão definidas duas operações algébricas:

- ① $+$: $V \times V \rightarrow V; (u, v) \mapsto u + v$ (soma)
- ② \cdot : $\mathbb{R} \times V \rightarrow V; (\alpha, u) \mapsto \alpha u$ (produto escalar)

satisfazendo os seguintes axiomas:

- a) (Comutatividade da soma) $\forall u, v \in V : u + v = v + u;$
- b) (Associatividade da soma)
 $\forall u, v, w \in V : (u + v) + w = u + (v + w);$
- c) (Existência de zero) $\exists w \in V (w := 0_V) : \forall u \in V, 0_V + u = u;$
- d) (Existência de simétricos)
 $\forall u \in V, \exists w \in V (w := -u) : u + (-u) = 0_V;$

- e) **(Distributividade I)** $\forall \alpha \forall u, v \in V, \alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v;$
- f) **(Distributividade II)** $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \forall u \in V, (\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u;$
- g) **(Associatividade do produto escalar)**
 $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall u \in V \alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u;$
- h) **(Existência de identidade)** $\forall u \in V, 1u = u.$

Os elementos de V são designados por vectores.

Teorema

Sejam V um espaço linear, $u, v, w \in V$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Então:

- 1 $0u = 0;$
- 2 $\alpha 0 = 0;$
- 3 $(-1)u = -u;$
- 4 $\alpha u = 0 \Rightarrow (\alpha = 0 \vee u = 0);$
- 5 $w + u = w + v \Rightarrow u = v.$

Neste curso vamos sempre considerar espaços lineares de forma $V = \mathbb{R}^m$, para algum $m \in \mathbb{N}$.

É usual identificar os vectores $v \in \mathbb{R}^m$ com as matrizes colunas $m \times 1$, $[v]$, cujas entradas são as entradas correspondentes do vector v .

Exemplos

$$v = (1, 2, 3) \rightarrow [v] = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$v = (1, -1, 3, 0) \rightarrow [v] = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

É conhecida a noção de produto interno euclideano entre dois vectores u e v de \mathbb{R}^m , definido por:

$$u \cdot v = (u_1, \dots, u_n) \cdot (v_1, \dots, v_n) = u_1 v_1 + \dots u_n v_n.$$

De facto, o produto interno entre dois vectores permite-nos determinar a ortogonalidade entre vectores. Mais precisamente, dois vectores u e v de \mathbb{R}^m dizem-se ortogonais ou perpendiculares se $u \cdot v = 0$.

Vale a seguinte relação entre produto interno e a álgebra matricial: $u \cdot v$ coincide com a única entrada da matriz

$$[u]^T [v] = \begin{bmatrix} u_1 & \dots & u_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = [u_1 v_1 + \dots + u_n v_n] = [u \cdot v]$$

Definição

Seja $S = \{v_1, \dots, v_n\}$ um conjunto finito de vectores de \mathbb{R}^m .
Dizemos que $v \in \mathbb{R}^m$ é **combinação linear dos vectores de S** se existirem n escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tais que:

$$v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n,$$

designado-se os escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ os **coeficientes da combinação linear**.

Seja A a matriz cujas colunas são precisamente os vectores $[v_1], \dots, [v_n]$.
Note-se que a condição

$$v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$$

corresponde a afirmar que $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ é uma solução particular do SEL

$$A \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = [v]$$

Desta forma, um vector v será combinação linear de $\{v_1, \dots, v_n\}$, se o SEL

$$A \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = [v]$$

for possível e, nesse caso, a qualquer solução particular $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ do SEL correspondem coeficientes $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ da combinação linear.

Dependência e Independência linear

Matemática I - 1^a
Parte: Álgebra
Linear

Ana Rita Martins

Álgebra Matricial

Sistemas de
Equações Lineares

Método de
Eliminação de
Gauss

Algoritmo de
inversão de
matrizes

Espaços Lineares

Valores e Vectores
próprios de uma
matriz

Definição

Seja $S = \{v_1, \dots, v_n\}$ um conjunto finito de vectores de \mathbb{R}^m .

Dizemos que os vectores de S são **linearmente independentes** se para quaisquer escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$:

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0,$$

isto é, a única combinação linear nula dos vectores de S é a combinação com coeficientes todos nulos.

Caso contrário, isto é, se existirem escalares não todos nulos $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0,$$

dizemos que os vectores de S são **linearmente dependentes**.

Seja A a matriz cujas colunas são precisamente os vectores $[v_1], \dots, [v_n]$.
Note-se que a condição

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0,$$

corresponde a afirmar que o SEL homogéneo

$$A \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

é possível e determinado!

Em particular, no caso em que $m = n$, a matriz A será quadrada e, portanto, $\{v_1, \dots, v_n\}$ será linearmente independente se, e somente, se $\det A \neq 0$.

Proposição

Seja $S = \{v_1, \dots, v_n\}$ um conjunto de vectores de \mathbb{R}^m ($n \geq 2$). Os vectores de S serão linearmente dependentes se e só se pelo menos um deles for combinação linear dos restantes.

Corolário

Seja $S = \{v_1, \dots, v_n\}$ um conjunto de vectores de \mathbb{R}^m . Se alguma das condições se verificar:

- $\exists i = 1, \dots, n : v_i = 0$;
- $\exists i, j = 1, \dots, n, i \neq j : v_i = v_j$;

então os vectores de S serão linearmente dependentes.

Proposição

Qualquer subconjunto não vazio (e de elementos distintos) de um conjunto de vectores linearmente independente continua a ser linearmente independente.

Teorema

Seja $S = \{v_1, \dots, v_n\}$ um conjunto de vectores de \mathbb{R}^m . Os vectores do conjunto S serão linearmente independentes se e só se qualquer combinação linear dos vectores de S admitir coeficientes univocamente determinados, isto é:

$$\forall \lambda_1, \alpha_1, \dots, \lambda_n, \alpha_n,$$

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = \beta_1 v_1 + \dots + \beta_n v_n \Rightarrow \lambda_i = \alpha_i, \forall i = 1, \dots, n.$$

Proposição

Seja $S = \{v_1, \dots, v_n\}$ um conjunto de vectores de \mathbb{R}^m . Os vectores de S serão linearmente independentes se, e somente se, para quaisquer $i \neq j$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, o conjunto de vectores

$$\{v_1, \dots, v_{i-1}, \alpha v_i + \beta v_j, v_{i+1}, \dots, v_n\}$$

for linearmente independente.

Definição

Seja S um conjunto de vectores de \mathbb{R}^m . Dizemos que S é um conjunto de geradores de \mathbb{R}^m e escrevemos $\mathbb{R}^m = \langle S \rangle$ se qualquer vector de \mathbb{R}^m se puder escrever como combinação linear dos vectores do conjunto S .

No caso de S ser um conjunto finito $S = \{v_1, \dots, v_n\}$, podemos escrever simplesmente $\mathbb{R}^m = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$.

Definição

Diz-se que um subconjunto $\{v_1, \dots, v_n\}$ de vectores de \mathbb{R}^m é uma base de \mathbb{R}^m se:

- $\{v_1, \dots, v_n\}$ é um conjunto de vectores linearmente independente;
- $\mathbb{R}^m = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$.

Cada espaço linear pode admitir infinitas bases distintas, mas prova-se que todas elas têm que admitir exactamente o mesmo número de vectores e chama-se **dimensão** do espaço linear ao número de vectores de qualquer base.

O espaço linear \mathbb{R}^m tem dimensão m e admite como base o conjunto $\{e_1, \dots, e_m\}$, onde e_i é o vector de \mathbb{R}^m com todas as entradas nulas, excepto a da posição i que é dada por 1, para cada $i = 1, \dots, m$.

Dado um subconjunto $S = \{v_1, \dots, v_m\}$ de m -vectores de \mathbb{R}^m , S será um base de \mathbb{R}^m se e só se S for um conjunto de vectores linearmente independentes, isto é, se cada vector se escrever de maneira única como combinação linear de elementos de S .

Desta forma, dado um subconjunto $S = \{v_1, \dots, v_n\}$ de n -vectores de \mathbb{R}^m , denotando por A a matriz cujas colunas são dadas pelos vectores $[v_1], \dots, [v_n]$, três situações podem ocorrer:

- se $n < m$, S não poderá ser base de \mathbb{R}^m ;
- se $n = m$, S será base de \mathbb{R}^m sse for um conjunto linearmente independente, isto é, se a matriz A for invertível;
- se $n > m$, S não será uma base, mas poderá conter uma base.

Para averiguar se, no último caso apresentado, S contém, de facto, uma base de \mathbb{R}^m , condensamos a transposta A^T da matriz A pelo MEG, obtendo uma certa matriz R .

A matriz R terá a seguinte propriedade: todos os vectores linha não nulos de R , bem como os vectores linhas correspondentes da matriz A^T , formam um conjunto linearmente independente.

Desta forma, se R admitir n linhas não nulas, então as n linhas correspondentes de A^T serão uma base de \mathbb{R}^m .

Exemplo

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{MEG}} R = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

↓

$\{(1, 2, 3), (1, 0, 1), (2, 1, 2)\}$ e $\{(1, 2, 3), (0, 2, 2), (0, 0, 2)\}$ são ambas bases de \mathbb{R}^3

Valores e Vectores próprios de uma matriz

Matemática I - 1^a
Parte: Álgebra
Linear

Ana Rita Martins

Álgebra Matricial

Sistemas de
Equações Lineares

Método de
Eliminação de
Gauss

Algoritmo de
inversão de
matrizes

Espaços Lineares

Valores e Vectores
próprios de uma
matriz

Vamos agora estudar o seguinte problema:

Dada uma matriz quadrada A de ordem n e um vector $v \in \mathbb{R}^n$, podemos fazer o produto Av . O resultado é uma matriz coluna cujas entradas formam um vector $w \in \mathbb{R}^n$.

Podemos então dizer que o vector v é transformado no vector w pela ação da matriz A e tem sentido colocar a seguinte questão: será que a direção de v é mantida por ação da matriz A ?

A resposta afirmativa corresponde precisamente a afirmar que w é um múltiplo escalar de v :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R} : Av = \lambda v.$$

Valores e vectores próprios de uma matriz quadrada

Matemática I - 1^a
Parte: Álgebra
Linear

Ana Rita Martins

Álgebra Matricial

Sistemas de
Equações Lineares

Método de
Eliminação de
Gauss

Algoritmo de
inversão de
matrizes

Espaços Lineares

Valores e Vectores
próprios de uma
matriz

Pretendemos, assim, analisar o problema de dada uma matriz A determinar as “direções” de \mathbb{R}^n que são mantidas após a ação de A .

Definição

Seja A uma matriz quadrada $n \times n$. Um vector não nulo $x \in \mathbb{R}^n$ diz-se um **vector próprio de A** se existir $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$Ax = \lambda x \quad (6.1)$$

Nesse caso dizemos que λ é um **valor próprio de A** associado ao vector próprio x e x diz-se um vector próprio de A associado ao valor próprio λ .

Questão

Poderá um mesmo vector próprio estar associado a dois valores próprios distintos de uma matriz?

Como encontrar todos os valores próprios de A ?

Matemática I - 1ª

Parte: Álgebra
Linear

Ana Rita Martins

Álgebra Matricial

Sistemas de
Equações Lineares

Método de
Eliminação de
Gauss

Algoritmo de
inversão de
matrizes

Espaços Lineares

Valores e Vectores
próprios de uma
matriz

Se reescrevermos a equação (6.1) temos que

$$Ax = \lambda x \Leftrightarrow Ax = \lambda I_n x \Leftrightarrow$$

$$(A - \lambda I_n)x = 0 \quad (6.2)$$

Concluimos assim que para λ ser um valor próprio de A , a equação (6.2) tem de ter soluções não triviais, ou seja, a matriz $A - \lambda I_n$ tem de ser não invertível, i.e.

$$\det(A - \lambda I_n) = 0 \quad (6.3)$$

A equação (6.3) chama-se **equação característica de A** .

Os escalares λ que satisfazem a equação característica de A são os valores próprios de A .

Note-se que $p(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$ é um polinómio de grau n na variável λ denominado o **polinómio característico de A** .

Exemplo

A equação característica da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

é dada por:

$$\begin{vmatrix} 4 - \lambda & 0 & 1 \\ -2 & 1 - \lambda & 0 \\ -2 & 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (4 - \lambda) \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 0 \\ 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & 1 - \lambda \\ -2 & 0 \end{vmatrix} =$$
$$= (1 - \lambda)(\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0) = (1 - \lambda)(\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0.$$

Definição

Sejam $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ os valores próprios da matriz A . Chama-se **multiplicidade algébrica** de λ_i , e denotamos por $m_a(\lambda_i)$, $i = 1, \dots, r$, ao número de vezes que o factor $(\lambda - \lambda_i)$ aparece na factorização do polinómio característico $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$.

Lema

Os valores próprios de uma matriz triangular são as entradas da diagonal principal.

Teorema

Sejam $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ os valores próprios da matriz A , contando com as multiplicidades.

- O traço da matriz A é sempre dado pela soma dos seus valores próprios:

$$\text{tr}(A) = \lambda_1 + \dots + \lambda_n.$$

- O determinante da matriz A é dado pelo produto dos seus valores próprios:

$$|A| = \lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_n.$$

Em particular, A será invertível se, e somente se, não admitir valores próprios nulos.

Exercício

Sendo x um vector próprio da matriz A associado ao valor próprio λ , mostre que:

- x continua a ser vector próprio da matriz A^p , qualquer que seja o inteiro $p \in \mathbb{Z}$ e determine o valor próprio associado;
- dados $a_i \in \mathbb{R}$ e $p \in \mathbb{N}_0$, x continua a ser valor próprio da matriz $a_p A^p + a_{p-1} A^{p-1} \dots + a_1 A + a_0 I$ e determine o valor próprio associado.

Teorema de Cayley-Hamilton

Toda a matriz quadrada A (de ordem n) satisfaz a sua equação característica, isto é, se o polinómio característico de A for dado por

$$p(\lambda) = a_n \lambda^n + \cdots + a_1 \lambda + a_0$$

então

$$a_n A^n + \cdots + a_1 A + a_0 I_n = 0.$$

Como encontrar os vectores próprios de A associados a um determinado valor próprio λ ?

Matemática I - 1ª
Parte: Álgebra
Linear

Ana Rita Martins

Álgebra Matricial

Sistemas de
Equações Lineares

Método de
Eliminação de
Gauss

Algoritmo de
inversão de
matrizes

Espaços Lineares

Valores e Vectores
próprios de uma
matriz

Por definição sabemos que $x \neq 0$ será um vector próprio de A associado ao valor próprio λ sse for solução do SEL homogéneo

$$(A - \lambda I)x = 0.$$

Chama-se espaço próprio de A associado ao valor próprio λ ao conjunto de todos os vectores próprios associados a λ :

$$E(\lambda) = \{x \in \mathbb{R}^n : (A - \lambda I)x = 0\}.$$

Conclusão

Para determinar os valores próprios e vectores próprios de uma matriz A seguimos o seguinte procedimento:

- 1 Resolver a equação característica $\det(A - \lambda I) = 0$;
- 2 As soluções $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ ($r \leq n$) são os valores próprios de A ;
- 3 Para cada $i = 1, \dots, r$, determinar o espaço próprio associado ao valor próprio λ_i .

Exemplo

Matemática I - 1^a
Parte: Álgebra
Linear

Ana Rita Martins

Álgebra Matricial

Sistemas de
Equações Lineares

Método de
Eliminação de
Gauss

Algoritmo de
inversão de
matrizes

Espaços Lineares

Valores e Vectores
próprios de uma
matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Polinómio característico de A : $(1 - \lambda)(-\lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda + 2) = 0$

Valores próprios de A : -2 , -1 e 1

Vectores próprios de A :

$$E(1) = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x = 2z, y = 3z\} = \left\{ \begin{bmatrix} 2z \\ 3z \\ z \\ w \end{bmatrix} : z, w \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$= \left\{ z \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + w \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} : z, w \in \mathbb{R} \right\}$$

$\therefore \{(2, 3, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$ é um conjunto linearmente independente de $E(1)$

Exemplo

Matemática I - 1^a
Parte: Álgebra
Linear

Ana Rita Martins

Álgebra Matricial

Sistemas de
Equações Lineares

Método de
Eliminação de
Gauss

Algoritmo de
inversão de
matrizes

Espaços Lineares

Valores e Vectores
próprios de uma
matriz

$$\begin{aligned} E(-1) &= \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x = -2z, y = z, w = 0\} = \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} -2z \\ z \\ z \\ 0 \end{bmatrix} : z \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ z \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} : z \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

$\therefore \{(-2, 1, 1, 0)\}$ é um conjunto linearmente independente de $E(-1)$

$$\begin{aligned} E(-2) &= \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x = -z, y = w = 0\} = \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} -z \\ 0 \\ z \\ 0 \end{bmatrix} : z \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ z \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} : z \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

$\therefore \{(-1, 0, 1, 0)\}$ é um conjunto linearmente independente de $E(-2)$

Exemplos

Matemática I - 1^a
 Parte: Álgebra Linear

Ana Rita Martins

Álgebra Matricial

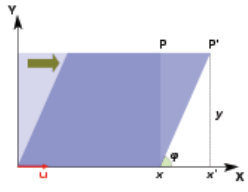
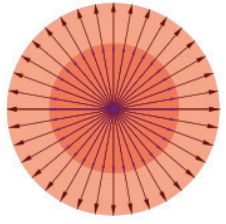
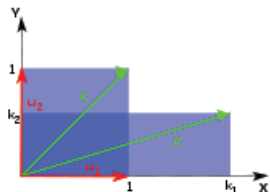
Sistemas de Equações Lineares

Método de Eliminação de Gauss

Algoritmo de inversão de matrizes

Espaços Lineares

Valores e Vectores próprios de uma matriz

Ilustração			
Matriz	$\begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix}$
Equação Característica	$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2 = 0$	$\lambda^2 - 2\lambda k + k^2 = (\lambda - k)^2 = 0$	$(\lambda - k_1)(\lambda - k_2) = 0$
Valores Próprios	$\lambda_{1,2}=1$	$\lambda_{1,2}=k$	$\lambda_1 = k_1, \lambda_2 = k_2$
Multiplicidades algébricas e geométricas	$n_1 = 2, m_1 = 1$	$n_1 = 2, m_1 = 2$	$n_1 = m_1 = 1, n_2 = m_2 = 1$
Vectores próprios	$(1,0)$	$(1,0)$ e $(0,1)$	$(1,0)$ e $(0,1)$

Diagonalização de matrizes: motivação

Matemática I - 1ª

Parte: Álgebra
Linear

Ana Rita Martins

Álgebra Matricial

Sistemas de
Equações Lineares

Método de
Eliminação de
Gauss

Algoritmo de
inversão de
matrizes

Espaços Lineares

Valores e Vectores
próprios de uma
matriz

Admitamos que três empresas A_1 , A_2 e A_3 partilham o mercado de um certo produto e denotemos por s_j o vector coluna 3×1 cuja linha i representa a cota de mercado da empresa A_i num certo ano j .

Seja T a matriz de transição, isto é, a matriz quadrada de ordem 3 que multiplicada por s_j nos dá as cotas de mercado no ano $j + 1$, isto é:

$$Ts_j = s_{j+1}.$$

É fácil de ver então que

$$s_j = T^j s_0,$$

pelo que se torna útil simplificar o cálculo da matriz T^j , $\forall j \in \mathbb{N}$.

Se a matriz T for diagonal, o cálculo de qualquer potência de T torna-se muito simples:

$$T^j = \begin{bmatrix} t_{11} & 0 & 0 \\ 0 & t_{22} & 0 \\ 0 & 0 & t_{33} \end{bmatrix}^j = \begin{bmatrix} t_{11}^j & 0 & 0 \\ 0 & t_{22}^j & 0 \\ 0 & 0 & t_{33}^j \end{bmatrix}$$

Vemos assim com este exemplo que interessa considerar matrizes diagonais, mas não sendo obviamente todas as matrizes diagonais, interessa tentar “diagonalizá-las”.

Definição

Um matriz A diz-se **diagonalizável** se existir uma matriz invertível S , chamada **matriz diagonalizante**, tal que o produto $S^{-1}AS$ é uma matriz diagonal.

Note-se que, para matrizes diagonalizáveis, tem-se:

$$A = SS^{-1}ASS^{-1} \Rightarrow A^j = S(S^{-1}AS)^jS^{-1}, \forall j \in \mathbb{N}$$

O problema de diagonalização de matrizes está intimamente relacionado com o estudo dos valores e vectores próprios de matrizes. Com efeito, temos o seguinte resultado:

Teorema

Dada uma matriz quadrada A de ordem n , temos:

A é diagonalizável



A tem n vectores próprios linearmente independentes



Existe uma base em \mathbb{R}^n formada por vectores próprios de A

Teorema

Sejam $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ os valores próprios de uma matriz A e consideremos um subconjunto linearmente independente B_i do espaço próprio $E(\lambda_i)$ associado ao valor próprio λ_i .

Então $B_1 \cup \dots \cup B_r$ constitui ainda um conjunto linearmente independente de \mathbb{R}^n .

Corolário

Qualquer matriz de ordem n que admita n valores próprios distintos é diagonalizável.

Corolário

Sejam $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ os valores próprios de uma matriz A diagonalizável e consideremos uma base B de \mathbb{R}^n constituída por vectores próprios.

Então, a matriz quadrada S de ordem n cujas colunas são os vectores da base B constitui uma matriz diagonalizante de A .

Mais precisamente, $S^{-1}AS$ é a matriz diagonal com diagonal constituída pelos valores próprios de A distribuídos na ordem correspondente à ordem dos vectores (próprios) da base B .

Exemplo

Consideremos a matriz $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

- equação característica de A : $(1 - \lambda)(6 - 5\lambda + \lambda^2) = 0$
- valores próprios: 1, 2 e 3;
- espaços próprios:

$$E(1) = \{k(0, 1, 0) : k \in \mathbb{R}\}$$

$$E(2) = \{k(-1, 2, 2) : k \in \mathbb{R}\}$$

$$E(3) = \{k(-1, 1, 1) : k \in \mathbb{R}\}$$

- algumas matrizes diagonalizantes e matrizes diagonais associadas:

$$S_1 := \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow S_1^{-1}AS_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$S_2 := \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow S_2^{-1}AS_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$S_3 := \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow S_3^{-1}AS_3 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$