

Durante a prova não serão prestados quaisquer tipo de esclarecimentos. Qualquer dúvida ou questão relativa ao enunciado deverá ser escrita na folha de prova para que possa ser tomada em consideração na correcção. Apresente todos os cálculos que tiver de efectuar. Justifique as respostas. Simplifique o resultado final o máximo possível. Não é possível desistir após o início desta prova.

Separe em grupos de folhas diferentes as resoluções dos grupos I e II das resoluções dos grupos III, IV e V

GRUPO I (60 PONTOS)

Considere $A = \begin{bmatrix} \alpha & 2 & 4 \\ 0 & 2\beta & 0 \\ \frac{5\beta}{4} & 1 & -3 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 1 \\ \beta \\ 2 \end{bmatrix}$ e I a matriz identidade de ordem 3.

- [20 pontos] Para $\alpha = \beta = 1$, determine os valores e vectores próprios da matriz A . Quais são os valores e vectores próprios da matriz A^{20} ?
- [20 pontos] Para $\alpha = 1$ e $\beta = 0$, resolva a equação matricial $(A^2 + I)^T X = |bb^T + I|b$, usando a matriz adjunta.
- [20 pontos] Discuta o sistema $AX = b$ em função dos parâmetros α e β .

GRUPO II (30 PONTOS)

- [15 pontos] Determine a expressão simplificada do determinante da matriz quadrada C

$$C_{n \times n} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 & 3 & -3 & \cdots & n & -n \\ 2 & 0 & 4 & -4 & 6 & -6 & \cdots & 2n & -2n \\ 3 & -3 & 0 & -6 & 9 & -9 & \cdots & 3n & -3n \\ 4 & -4 & 8 & 0 & 12 & -12 & \cdots & 4n & -4n \\ 5 & -5 & 10 & -10 & 0 & -15 & \cdots & 5n & -5n \\ 6 & -6 & 12 & -12 & 18 & 0 & \cdots & 6n & -6n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n-1 & -n+1 & 2n-2 & -2n+2 & 3n-3 & -3n+3 & \cdots & 0 & -n^2+n \\ n & -n & 2n & -2n & 3n & -3n & \cdots & n^2 & 0 \end{bmatrix}$$

e indique o sinal deste determinante para qualquer n .

- [15 pontos] Seja a matriz $A_{n \times n}$ tal que $(I - A)^{-1}$ existe e $A^2 = nA$. Prove que:
a) A e $I - A$ são permutáveis b) A e $(I - A)^{-1}$ são permutáveis c) $(I - A)^{-1} = I - \frac{1}{n-1}A$

GRUPO III (30 PONTOS)

Determine:

- [10 pontos] $P \frac{x^3 + x \cdot \arctg(x^2)}{1 + x^4}$

- [10 pontos] $f'(1)$ se $f(x) = (x^2 - x + 1) \int_{(2x)^2+1}^{x^2+4x} e^{t^2} dt$

- [10 pontos] $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \cdot \text{sen}(x) - x - x^2}{x^2 + x \ln(1 - x)}$

GRUPO IV (40 PONTOS)

Considere as funções reais de variável real $f(x) = 2x + 1$, $g(x) = \ln(x + 1)$ e $h(x) = e^x$.

1. [10 pontos] Determine o domínio da função $n = (g \circ h)/f$.
2. [10 pontos] Prove, pela definição, que $\lim_{x \rightarrow 2} (-f(x)) = -5$.
3. [10 pontos] Determine as primeiras três derivadas da função $m = h + f \times g$. Escreva a equação da recta tangente da função segunda derivada de m no ponto de abscissa 0.
4. [10 pontos] Represente e determine a área definida pelas seguintes condições:

$$y \leq h(x) \wedge y \geq \frac{1}{f(x)} \wedge x \geq 0 \wedge x \leq 1$$

Essa área é maior que $\int_{16/9}^{+\infty} \frac{1}{(\sqrt{x})^3} dx$? Justifique.

GRUPO V (40 PONTOS)

Escolha uma das opções (A,B,C,D). Cada resposta **correcta** vale **8 pontos**, cada resposta **incorrecta** desconta **3 pontos**, sem resposta não desconta. Este grupo pode ter **cotação negativa**. Não é necessária qualquer justificação. Só se terá em consideração a opção apresentada.

1. Qual das seguintes afirmações é *VERDADEIRA*?

(A) Sendo A e B matrizes de ordem n , tem-se que $|A + B| = |A| \Rightarrow |B| = 0$

(B) Se A é uma matriz invertível, então $\text{adj}(A^T) = (\text{adj}(A))^T$

(C) Se A é uma matriz invertível, então $(A^T)^{-1} = \frac{1}{|A|} (\text{adj}(A^T))^T$

(D) A inversa da soma de matrizes é a soma das matrizes inversas, quando as operações estão definidas

2. Sejam A e B duas matrizes quaisquer e O uma matriz nula.

Qual das seguintes afirmações é *VERDADEIRA*?

(A) Se o produto AA existe, então A é uma matriz quadrada

(B) Se $AB = O$, então $BA = O$

(C) Se A e B têm a mesma dimensão, então AB tem inversa

(D) $A - A^T$ é simétrica

3. Considere as seguintes afirmações:

I. Se uma função f é diferenciável em \mathbb{R} , então e^f é contínua em \mathbb{R}

II. Uma função par nunca é injectiva

III. Uma função ímpar tem contradomínio \mathbb{R}

A lista completa das afirmações correctas é:

(A) I e II (B) I e III (C) II e III (D) Nenhuma das afirmações

4. Qual das seguintes afirmações é *VERDADEIRA*:

(A) $|x'| = 1, \forall x \in \mathbb{R}$ (B) $\left(\frac{x}{x}\right)' = 1, \forall x \in \mathbb{R}$ (C) $\left(\frac{|x|}{x}\right)' = 0, \forall x \in \mathbb{R}$ (D) $\left(\frac{|x+1|}{x+1}\right)' = 0, \forall x > 0$

5. Seja $f(x) = \ln(x^x)$. Qual das seguintes afirmações é *VERDADEIRA*:

(A) $f'(e) = 0$

(B) $f'(e) = 1$

(C) $f'(e) = 2$

(D) $f'(e) = e$

Considere $A = \begin{bmatrix} \alpha & 2 & 4 \\ 0 & 2\beta & 0 \\ \frac{5\beta}{4} & 1 & -3 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 1 \\ \beta \\ 2 \end{bmatrix}$ e I a matriz identidade de ordem 3.

1. [20 pontos] Para $\alpha = \beta = 1$, determine os valores e vectores próprios da matriz A . Quais são os valores e vectores próprios da matriz A^{20} ?
2. [20 pontos] Para $\alpha = 1$ e $\beta = 0$, resolva a equação matricial $(A^2 + I)^T X = |bb^T + I|b$, usando a matriz adjunta.
3. [20 pontos] Discuta o sistema $AX = b$ em função dos parâmetros α e β .

1.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ \frac{5}{4} & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$|A - \lambda I| = 0 \Leftrightarrow (2 - \lambda)(\lambda^2 + 2\lambda - 8) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2 \vee \lambda = -4$$

Valores próprios de A : -4 e 2

$$[A + 4I]X = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 5x + 2y + 4z = 0 \\ 6y = 0 \\ \frac{5}{4}x + y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{4}{5}z \\ y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Vector próprio associado ao valor próprio -4: $(-\frac{4}{5}z, 0, z) = z(-\frac{4}{5}, 0, 1)$, $z \in \mathbb{R}$

$$[A - 2I]X = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -x + 2y + 4z = 0 \\ 0 = 0 \\ \frac{5}{4}x + y - 5z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4z \\ y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Vector próprio associado ao valor próprio 2: $(4z, 0, z) = z(4, 0, 1)$, $z \in \mathbb{R}$

Valores próprios de A^{20} : 4^{20} e 2^{20}

Vectores próprios de A^{20} :

$z(4, 0, 1)$, $z \in \mathbb{R}$ associado ao valor próprio 2^{20}

$(-\frac{4}{5}z, 0, z) = z(-\frac{4}{5}, 0, 1)$, $z \in \mathbb{R}$ associado ao valor próprio 4^{20} .

2.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (A^2 + I)^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & -3 \\ -8 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

$$[(A^2 + I)^T]^{-1} = \frac{1}{20} \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ -36 & 20 & 6 \\ 8 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -9/5 & 1 & 3/10 \\ 2/5 & 0 & 1/10 \end{bmatrix}$$

$$|bb^T + I|b = 6 \times \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 12 \end{bmatrix}$$

$$(A^2 + I)^T X = |bb^T + I|b \Leftrightarrow X = [(A^2 + I)^T]^{-1} |bb^T + I|b \Leftrightarrow X = \begin{bmatrix} 3 \\ -36/5 \\ 18/5 \end{bmatrix}$$

3.

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{ccc|c} \alpha & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 2\beta & 0 & \beta \\ \frac{5\beta}{4} & 1 & -3 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{C_1 \leftrightarrow C_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & \alpha & 1 \\ 0 & 2\beta & 0 & \beta \\ -3 & 1 & \frac{5\beta}{4} & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{3L_1 + 4L_3 \rightarrow L_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & \alpha & 1 \\ 0 & 2\beta & 0 & \beta \\ 0 & 10 & 5\beta + 3\alpha & 11 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & \alpha & 1 \\ 0 & 10 & 5\beta + 3\alpha & 11 \\ 0 & 2\beta & 0 & \beta \end{array} \right] \xrightarrow{C_2 \leftrightarrow C_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & \alpha & 2 & 1 \\ 0 & 5\beta + 3\alpha & 10 & 11 \\ 0 & 0 & 2\beta & \beta \end{array} \right] \end{aligned}$$

Conclusão:

SPD: $\beta \neq 0 \wedge \alpha \neq -\frac{5}{3}\beta$

SPI: $\beta = 0, \forall \alpha \in \mathbb{R}$

SI: $\alpha = -\frac{5}{3}\beta \wedge \beta \neq 0$

GRUPO II (30 PONTOS)

1. [15 pontos] Determine a expressão simplificada do determinante da matriz C

$$C_{n \times n} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 & 3 & -3 & \cdots & n & -n \\ 2 & 0 & 4 & -4 & 6 & -6 & \cdots & 2n & -2n \\ 3 & -3 & 0 & -6 & 9 & -9 & \cdots & 3n & -3n \\ 4 & -4 & 8 & 0 & 12 & -12 & \cdots & 4n & -4n \\ 5 & -5 & 10 & -10 & 0 & -15 & \cdots & 5n & -5n \\ 6 & -6 & 12 & -12 & 18 & 0 & \cdots & 6n & -6n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n-1 & -n+1 & 2n-2 & -2n+2 & 3n-3 & -3n+3 & \cdots & 0 & -n^2+n \\ n & -n & 2n & -2n & 3n & -3n & \cdots & n^2 & 0 \end{bmatrix}$$

e indique o sinal deste determinante para qualquer n .

$$|C_{n \times n}| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 & 3 & -3 & \cdots & n & -n \\ 2 & 0 & 4 & -4 & 6 & -6 & \cdots & 2n & -2n \\ 3 & -3 & 0 & -6 & 9 & -9 & \cdots & 3n & -3n \\ 4 & -4 & 8 & 0 & 12 & -12 & \cdots & 4n & -4n \\ 5 & -5 & 10 & -10 & 0 & -15 & \cdots & 5n & -5n \\ 6 & -6 & 12 & -12 & 18 & 0 & \cdots & 6n & -6n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n-1 & -n+1 & 2n-2 & -2n+2 & 3n-3 & -3n+3 & \cdots & 0 & -n^2+n \\ n & -n & 2n & -2n & 3n & -3n & \cdots & n^2 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 & 3 & -3 & \cdots & n & -n \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -15 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 18 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -n^2 + n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n^2 \end{vmatrix} = 1 \times 2 \times (-6) \times 8 \times (-15) \times 18 \times \cdots \times (-n^2 + n) \times n^2$$

O determinante é positivo quando $n = 1, 2, 5, 6, 9, 10, \dots$

O determinante é negativo quando $n = 3, 4, 7, 8, 11, 12, \dots$

2. [15 pontos] Seja a matriz $A_{n \times n}$ tal que $(I - A)^{-1}$ existe e $A^2 = nA$. Prove que:

a) A e $I - A$ são permutáveis b) A e $(I - A)^{-1}$ são permutáveis c) $(I - A)^{-1} = I - \frac{1}{n-1}A$

a) $A(I - A) = A.I - A.A = I.A - A.A = (I - A)A$

b) $A(I - A)^{-1} = (I - A)^{-1}(I - A)A(I - A)^{-1} = (I - A)^{-1}A(I - A)(I - A)^{-1} = (I - A)^{-1}A$

c) Vamos mostrar que a inversa de $I - A$ é dada por $I - \frac{1}{n-1}A$.

Para isso temos de mostrar que $(I - A).(I - A)^{-1} = I = (I - A)^{-1}.(I - A)$.

$$(I - A).(I - A)^{-1} = (I - A).(I - \frac{1}{n-1}A) = I - \frac{1}{n-1}A - A + \frac{1}{n-1}A^2 = I - \frac{1}{n-1}A - A + \frac{1}{n-1}nA = I$$

A outra igualdade é agora óbvia.

GRUPO III (30 PONTOS)

Determine:

1. [10 pontos] $P \frac{x^3 + x \cdot \arctg(x^2)}{1 + x^4}$

2. [10 pontos] $f'(1)$ se $f(x) = (x^2 - x + 1) \int_{(2x)^2+1}^{x^2+4x} e^{t^2} dt$

3. [10 pontos] $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \cdot \text{sen}(x) - x - x^2}{x^2 + x \ln(1 - x)}$

1.

$$P \frac{x^3 + x \cdot \arctg(x^2)}{1 + x^4} = P \frac{x^3}{1 + x^4} + P \frac{x \cdot \arctg(x^2)}{1 + x^4} = \frac{1}{4} P \frac{4x^3}{1 + x^4} + \frac{1}{2} P \frac{2x}{1 + (x^2)^2} \cdot \arctg(x^2) =$$
$$= \frac{1}{4} \ln(1 + x^4) + \frac{1}{4} \arctg^2(x^2) + C, C \in \mathbb{R}$$

2.

$$f'(x) = (2x - 1) \int_{(2x)^2+1}^{x^2+4x} e^{t^2} dt + (x^2 - x + 1) \left[(2x + 4) \cdot e^{(x^2+4x)^2} - 8x \cdot e^{((2x)^2+1)^2} \right]$$

$$f'(1) = 1 \int_5^5 e^{t^2} dt + 1 \times [6 \times e^{25} - 8 \times e^{25}] = 0 - 2e^{25} = -2e^{25}$$

3.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \cdot \text{sen}(x) - x - x^2}{x^2 + x \ln(1 - x)} \stackrel{R.C.}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \cdot \text{sen}(x) + e^x \cdot \cos(x) - 1 - 2x}{2x + \ln(1 - x) - \frac{x}{1-x}} \stackrel{R.C.}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^x \cdot \cos(x) - 2}{2 - \frac{1}{1-x} - \frac{1}{(1-x)^2}} \stackrel{R.C.}{=}$$
$$\stackrel{R.C.}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^x \cdot \cos(x) - 2e^x \cdot \text{sen}(x)}{-\frac{1}{(1-x)^2} - \frac{2}{(1-x)^3}} = -\frac{2}{3}.$$

GRUPO IV (40 PONTOS)

Considere as funções reais de variável real $f(x) = 2x + 1$, $g(x) = \ln(x + 1)$ e $h(x) = e^x$.

1. [10 pontos] Determine o domínio da função $n = (g \circ h)/f$.

2. [10 pontos] Prove, pela definição, que $\lim_{x \rightarrow 2} (-f(x)) = -5$.

3. [10 pontos] Determine as primeiras três derivadas da função $m = h + f \times g$. Escreva a equação da recta tangente da função segunda derivada de m no ponto de abscissa 0.

4. [10 pontos] Represente e determine a área definida pelas seguintes condições:

$$y \leq h(x) \wedge y \geq \frac{1}{f(x)} \wedge x \geq 0 \wedge x \leq 1$$

Essa área é maior que $\int_{16/9}^{+\infty} \frac{1}{(\sqrt{x})^3} dx$? Justifique.

1.

$$n(x) = \frac{\ln(e^x + 1)}{2x + 1}$$

$$D_n = \{x \in \mathbb{R} : e^x + 1 > 0 \wedge 2x + 1 \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq -\frac{1}{2}\} = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$$

2.

Seja $\delta > 0$ dado. Temos de descobrir ϵ tal que se $|x - 2| < \epsilon$, então $|-f(x) - (-5)| < \delta$, i.e., $|-2x - 1 + 5| < \delta$, i.e., $|-2x + 4| < \delta$, i.e., $2|x - 2| < \delta$, i.e., $|x - 2| < \delta/2$. Escolha-se, então $\epsilon = \delta/2$.

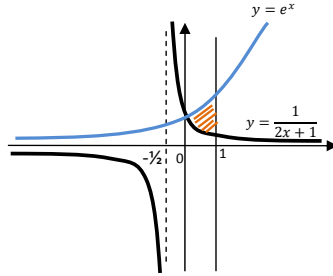
3.

$$m(x) = h(x) + f(x) \times g(x) = e^x + (2x + 1) \cdot \ln(x + 1) \quad m'(x) = e^x + 2 \ln(x + 1) + \frac{2x + 1}{x + 1}$$

$$m''(x) = e^x + \frac{2}{x + 1} + \frac{1}{(x + 1)^2} \quad m'''(x) = e^x - \frac{2}{(x + 1)^2} - \frac{2}{(x + 1)^3}$$

$$x_0 = 0, y_0 = m''(0) = 4, \text{ Declive} = m'''(0) = -3 \quad \text{Equação da recta tangente: } y = -3x + 4$$

4.



$$A = \int_0^1 \left(e^x - \frac{1}{2x + 1} \right) dx = \left[e^x - \frac{1}{2} \ln |2x + 1| \right]_0^1 = e - \frac{1}{2} \ln 3 - 1$$

$$\int_{16/9}^{+\infty} \frac{1}{(\sqrt{x})^3} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_{16/9}^b \frac{1}{(\sqrt{x})^3} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[-\frac{2}{\sqrt{x}} \right]_{16/9}^b = \frac{3}{2}$$

$$e - \frac{1}{2} \ln 3 - 1 < e - \frac{1}{2} \ln e - 1 = e - \frac{3}{2} < 1.3 < \frac{3}{2}. \text{ Logo não é maior.}$$

GRUPO V (40 PONTOS)

Escolha uma das opções (A,B,C,D). Cada resposta **correcta** vale **8 pontos**, cada resposta **incorrecta** desconta **3 pontos**, sem resposta não desconta. Este grupo pode ter **cotação negativa**. Não é necessária qualquer justificação. Só se terá em consideração a opção apresentada.

1. Qual das seguintes afirmações é *VERDADEIRA*?

(A) Sendo A e B matrizes de ordem n , tem-se que $|A + B| = |A| \Rightarrow |B| = 0$

(B) Se A é uma matriz invertível, então $\text{adj}(A^T) = (\text{adj}(A))^T$

(C) Se A é uma matriz invertível, então $(A^T)^{-1} = \frac{1}{|A|}(\text{adj}(A^T))^T$

(D) A inversa da soma de matrizes é a soma das matrizes inversas, quando as operações estão definidas
Solução: B

2. Sejam A e B duas matrizes quaisquer e O uma matriz nula.

Qual das seguintes afirmações é *VERDADEIRA*?

(A) Se o produto AA existe, então A é uma matriz quadrada

(B) Se $AB = O$, então $BA = O$

(C) Se A e B têm a mesma dimensão, então AB tem inversa

(D) $A - A^T$ é simétrica

Solução: A

3. Considere as seguintes afirmações:

I. Se uma função f é diferenciável em \mathbb{R} , então e^f é contínua em \mathbb{R}

II. Uma função par nunca é injectiva

III. Uma função ímpar tem contradomínio \mathbb{R}

A lista completa das afirmações correctas é:

(A) I e II (B) I e III (C) II e III (D) Todas as afirmações

Solução: A

4. Qual das seguintes afirmações é *VERDADEIRA*:

(A) $|x|' = 1, \forall x \in \mathbb{R}$ (B) $\left(\frac{x}{x}\right)' = 1, \forall x \in \mathbb{R}$ (C) $\left(\frac{|x|}{x}\right)' = 0, \forall x \in \mathbb{R}$ (D) $\left(\frac{|x+1|}{x+1}\right)' = 0, \forall x > 0$

Solução: D

5. Seja $f(x) = \ln(x^x)$. Qual das seguintes afirmações é *VERDADEIRA*:

(A) $f'(e) = 0$

(B) $f'(e) = 1$

(C) $f'(e) = 2$

(D) $f'(e) = e$

Solução: C

Durante a prova não serão prestados quaisquer tipo de esclarecimentos. Qualquer dúvida ou questão relativa ao enunciado deverá ser escrita na folha de prova para que possa ser tomada em consideração na correcção. Apresente todos os cálculos que tiver de efectuar. Justifique as respostas. Simplifique o resultado final o máximo possível. Não é possível desistir após o início desta prova. Escreva a versão em cada folha de respostas.

**Separe em grupos de folhas diferentes
as resoluções do grupo I
das resoluções dos grupos II e III
das resoluções dos grupos IV e V**

GRUPO I (50 PONTOS)

Considere o sistema de equações a três incógnitas x , y e z

$$\begin{cases} ax + by + az = 1 \\ -x - by + z = b \\ x + by + az = 1 \end{cases} \quad \text{em que } a, b \in \mathbb{R}$$

1. [20 pontos] Para $a = b = 1$, determine os valores e vectores próprios da matriz dos coeficientes do sistema, A . Quais são os valores e vectores próprios da matriz $A^{15} - 2A^3$?
2. [20 pontos] Discuta o sistema em função de a e b .
3. [10 pontos] Para $a = 2$ e $b = -1$, resolva o sistema usando a regra de Cramer.

GRUPO II (25 PONTOS)

1. [15 pontos] Sendo $a, b \in \mathbb{R}^-$, determine a expressão simplificada do determinante da matriz quadrada

$$C_{n \times n} = \begin{bmatrix} a+b & a & \cdots & a \\ a & a+b & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & \cdots & a+b \end{bmatrix}$$

e indique, se possível, o sinal deste determinante para qualquer n .

2. [10 pontos] Seja $X_{m \times n}$ uma matriz que verifica $|X^T X| \neq 0$ e $Q = I_m - X(X^T X)^{-1} X^T$. Mostre que a matriz Q é simétrica e idempotente.

GRUPO III (30 PONTOS)

Determine:

1. [10 pontos] $P \frac{1}{x\sqrt{1-5\ln 3x}}$

2. [10 pontos] $(f \circ g)'(0)$ se $f(x) = \int_{\arctan(x)}^{(x+1)^{x^2+2x+1}} (t^2 + t + 1)dt$ e $g(x) = \int_0^x \ln(t+e)dt$

3. [10 pontos] $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cdot \sin(x)}{\sin(\pi x^2)}$

GRUPO IV (55 PONTOS)

Considere a função real de variável real definida por:

$$w(x) = \begin{cases} [\operatorname{sen}(\alpha x^2)]^{e^x - 1} & \text{se } x > 0 \\ \beta\sqrt{-x} - \gamma x & \text{se } -3 < x \leq 0 \\ \frac{-x^3 + 2x^2 + 9x - 18}{-x^2 \ln(|x|) + 9 \ln(-x)} & \text{se } x \leq -3 \end{cases} \quad \text{com } \alpha > 0, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$$

1. [15 pontos] Determine o domínio e os zeros da função w .
2. [15 pontos] Determine em que pontos é que $w(x)$ é uma função contínua.
3. Considere $\alpha = 1, \beta = 3, \gamma = -2$.
 - a) [10 pontos] Determine o limite da função $h(x) = w(x) - 2x$ no ponto de abcissa -1 e prove, usando a definição, que de facto este é o limite.
 - b) [15 pontos] Determine, pela definição, a derivada da função w no ponto de abcissa -1 . Determine a equação da recta normal de w no ponto de abcissa -1 .

GRUPO V (40 PONTOS)

Escolha uma das opções (A,B,C,D). Cada resposta **correcta** vale **8 pontos**, cada resposta **incorrecta** desconta **3 pontos**, sem resposta não desconta. Este grupo pode ter **cotação negativa**. Não é necessária qualquer justificação. Só se terá em consideração a opção apresentada.

1. Qual das seguintes afirmações é *VERDADEIRA*?

- (A) Se A e B são duas matrizes de ordem n permutáveis, então $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$
(B) Se $A = -B^T$, então A e B são permutáveis
(C) Se A e B são duas matrizes singulares de ordem n , então AB tem valor próprio zero
(D) Se $A + B$ é uma matriz de ordem n com valor próprio zero, então A ou B é singular

2. Qual das seguintes afirmações é *VERDADEIRA*?

- (A) Uma matriz idempotente tem sempre inversa
(B) Uma matriz pode ser igual à sua inversa
(C) Uma matriz simétrica nunca pode ser anti-simétrica
(D) Uma matriz inversa nunca pode ser igual à matriz adjunta

3. Qual das seguintes funções é simultaneamente ímpar e injectiva?

- (A) $f(x) = x^2 \cdot \arctg(x)$ (B) $f(x) = 1 + \ln(x^2)$ (C) $f(x) = \cos(2x)$ (D) $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$

4. Qual das seguintes afirmações é *FALSA*:

- (A) $(x|x|)' = 2|x|, \forall x \in \mathbb{R}$ (B) $\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)' = \frac{2x}{(1+x^2)^2}, \forall x \in \mathbb{R}$
(C) $\left(\frac{|x|}{\sqrt{x^2}}\right)' = 0, \forall x \in \mathbb{R}$ (D) $(\sqrt{x^2})' = 1, \forall x > 0$

5. Seja $g(x) = f(1-x)$. Qual das seguintes afirmações é sempre *VERDADEIRA*:

- (A) g é crescente se f é crescente (B) g é decrescente se f é crescente
(C) g é convexa se f é côncava (D) g é crescente se f é convexa

GRUPO I (50 PONTOS)

Considere o sistema de equações a três incógnitas x , y e z

$$\begin{cases} ax + by + az = 1 \\ -x - by + z = b \\ x + by + az = 1 \end{cases} \quad \text{em que } a, b \in \mathbb{R}$$

1. [20 pontos] Para $a = b = 1$, determine os valores e vectores próprios da matriz dos coeficientes do sistema, A . Quais são os valores e vectores próprios da matriz $A^{15} - 2A^3$?
2. [20 pontos] Discuta o sistema em função de a e b .
3. [10 pontos] Para $a = 2$ e $b = -1$, resolva o sistema usando a regra de Cramer.

Resolução:

1.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$|A - \lambda I| = 0 \Leftrightarrow -\lambda(\lambda - 2)(\lambda + 1) = 0 \Leftrightarrow \lambda = -1 \vee \lambda = 0 \vee \lambda = 2$$

Valores próprios de A : -1, 0 e 2

$$[A + I]X = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ -x + z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ z = x \\ y = -3x \end{cases}$$

Vector próprio associado ao valor próprio -1: $(x, -3x, x) = x(1, -3, 1), x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$[A]X = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ -x - y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Vector próprio associado ao valor próprio 0: $(-y, y, 0) = y(-1, 1, 0), y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$[A - 2I]X = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -x + y + z = 0 \\ -x - 3y + z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = x \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Vector próprio associado ao valor próprio 2: $(x, 0, x) = x(1, 0, 1), x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Valores próprios de $A^{15} - 2A^3$: 1, 0 e $2^{15} - 2^4$

Vectores próprios de $A^{15} - 2A^3$:

$x(1, -3, 1), x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ associado ao valor próprio 1

$y(-1, 1, 0), y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ associado ao valor próprio 1

$x(1, 0, 1), x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ associado ao valor próprio $2^{15} - 2^4$

2.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a & b & a & 1 \\ -1 & -b & 1 & b \\ 1 & b & a & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -b & 1 & b \\ a & b & a & 1 \\ 1 & b & a & 1 \end{array} \right] \xrightarrow[\substack{aL_1+L_2 \rightarrow L_2 \\ L_1+L_3 \rightarrow L_3}]{\substack{aL_1+L_2 \rightarrow L_2 \\ L_1+L_3 \rightarrow L_3}} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -b & 1 & b \\ 0 & b(1-a) & 2a & 1+ab \\ 0 & 0 & a+1 & 1+b \end{array} \right]$$

Conclusão:

SPD: $a \neq -1 \wedge a \neq 1 \wedge b \neq 0$

SPI: $(a = -1 \wedge b = -1) \vee (a = 1 \wedge b \in \mathbb{R})$

SI: $(a = -1 \wedge b \neq -1) \vee (a \neq 1 \wedge b = 0)$

3.

Com estes valores de parâmetros, o sistema é SPD.

$$\begin{cases} 2x - y + 2z = 1 \\ -x + y + z = -1 \\ x - y + 2z = 1 \end{cases}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (4 - 1 + 2) - (2 - 2 + 2) = 3$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{3} = 0, y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{3} = -1, z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{3} = 0$$

SPD: $(x, y, z) = (0, -1, 0)$

GRUPO II (25 PONTOS)

1. [15 pontos] Sendo $a, b \in \mathbb{R}^-$, determine a expressão simplificada do determinante da matriz quadrada

$$C_{n \times n} = \begin{bmatrix} a+b & a & \cdots & a \\ a & a+b & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & \cdots & a+b \end{bmatrix}$$

e indique, se possível, o sinal deste determinante para qualquer n .

Resolução:

$$\begin{aligned} |C_{n \times n}| &= \begin{vmatrix} a+b & a & \cdots & a \\ a & a+b & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & \cdots & a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} na+b & a & \cdots & a \\ na+b & a+b & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ na+b & a & \cdots & a+b \end{vmatrix} = \\ &= (na+b) \times \begin{vmatrix} 1 & a & \cdots & a \\ 1 & a+b & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a & \cdots & a+b \end{vmatrix} = (na+b) \times \begin{vmatrix} 1 & a & \cdots & a \\ 0 & b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b \end{vmatrix} = (na+b)b^{n-1} \end{aligned}$$

Como $b < 0$, b^{n-1} vai ser positivo se n é ímpar e negativo se n é par. Sabe-se que $a < 0$, $b < 0$, $n > 0$, logo, $na+b < 0$. Assim, o determinante vai ser negativo se n é ímpar e positivo se n par.

2. [10 pontos] Seja $X_{m \times n}$ uma matriz que verifica $|X^T X| \neq 0$ e $Q = I_m - X(X^T X)^{-1} X^T$. Mostre que a matriz Q é simétrica e idempotente.

Resolução:

$$Q^T = (I_m - X(X^T X)^{-1} X^T)^T = I_m^T - (X^T)^T ((X^T X)^{-1})^T X^T = I_m - X(X^T X)^{-1} X^T = Q$$

Logo Q é simétrica.

$$\begin{aligned} Q^2 &= (I_m - X(X^T X)^{-1} X^T)(I_m - X(X^T X)^{-1} X^T) = \\ &= I_m - X(X^T X)^{-1} X^T - X(X^T X)^{-1} X^T + X(X^T X)^{-1} X^T X(X^T X)^{-1} X^T = \\ &= I_m - X(X^T X)^{-1} X^T - X(X^T X)^{-1} X^T + X(X^T X)^{-1} X^T = \\ &= I_m - X(X^T X)^{-1} X^T = Q \end{aligned}$$

Logo Q é idempotente.

GRUPO III (30 PONTOS)

Determine:

1. [10 pontos] $P \frac{1}{x\sqrt{1-5\ln 3x}}$

Resolução:

$$P \frac{1}{x\sqrt{1-5\ln 3x}} = -\frac{2}{5} \sqrt{1-5\ln(3x)} + C, C \in \mathbb{R}$$

2. [10 pontos] $(f \circ g)'(0)$ se $f(x) = \int_{\arctg(x)}^{(x+1)^{x^2+2x+1}} (t^2 + t + 1)dt$ e $g(x) = \int_0^x \ln(t+e)dt$

Resolução:

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$g(x) = \int_0^x \ln(t+e)dt, \text{ logo } g(0) = 0.$$

$$g'(x) = \ln(x+e), \text{ logo } g'(0) = \ln(e) = 1.$$

$$f'(x) = \left[(x+1)^{2x^2+4x+2} + (x+1)^{x^2+2x+1} + 1 \right] \times \left[(x+1)^{x^2+2x+1} \right]' - [\arctg^2(x) + \arctg(x) + 1] \times \frac{1}{1+x^2}$$

em que

$$\left[(x+1)^{x^2+2x+1} \right]' = (2x+2) \cdot (x+1)^{x^2+2x+1} \cdot \ln|x+1| + (x^2+2x+1)(x+1)^{x^2+2x}$$

$$(f \circ g)'(0) = (f)'(g(0)) \cdot g'(0) = f'(0) \times 1 = 3 \times 1 - 1 \times 1 = 2$$

3. [10 pontos] $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cdot \text{sen}(x)}{\text{sen}(\pi x^2)}$

Resolução:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cdot \text{sen}(x)}{\text{sen}(\pi x^2)} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cdot \text{sen}(x)}{\text{sen}(\pi x^2)} = \frac{2}{\pi} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x)}{x} \times \frac{\pi x^2}{\text{sen}(\pi x^2)} = \frac{2}{\pi} \times 1 \times 1 = \frac{2}{\pi}$$

GRUPO IV (55 PONTOS)

Considere a função real de variável real definida por:

$$w(x) = \begin{cases} [\text{sen}(\alpha x^2)]^{e^x - 1} & \text{se } x > 0 \\ \beta \sqrt{-x} - \gamma x & \text{se } -3 < x \leq 0 \\ \frac{-x^3 + 2x^2 + 9x - 18}{-x^2 \ln(|x|) + 9 \ln(-x)} & \text{se } x \leq -3 \end{cases} \quad \text{com } \alpha > 0, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$$

1. [15 pontos] Determine o domínio e os zeros da função w .

Resolução:

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$$

Zeros: $x = \sqrt{\frac{k\pi}{\alpha}}, k \in \mathbb{Z}_0^+$. Note que o segundo e o terceiro ramos produzem outros zeros que não pertencem ao domínio do ramo.

2. [15 pontos] Determine em que pontos que $w(x)$ é uma função contínua.

Resolução:

Dentro de cada um dos ramos, a função é contínua (justifique!).

Vamos avaliar a continuidade no ponto de abscissa 0 (-3 não pertence ao domínio!). Para isso e neste caso, basta que os limites laterais sejam iguais.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} w(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} [\text{sen}(\alpha x^2)]^{e^x - 1} = 1 \quad (\text{usando truque usual de } e^{\ln})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} w(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \beta \sqrt{-x} - \gamma x = 0$$

Como os limites laterais são diferentes, então a função não é contínua em $x = 0$.

A função é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{-3, 0\}$ para quaisquer $\alpha > 0, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

3. Considere $\alpha = 1, \beta = 3, \gamma = -2$.

a) [10 pontos] Determine o limite da função $h(x) = w(x) - 2x$ no ponto de abcissa -1 e prove, usando a definição, que de facto este é o limite.

Resolução:

$$h(x) = w(x) - 2x = 3\sqrt{-x}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} h(x) = 3$$

Seja $\delta > 0$ dado. Temos de descobrir ϵ tal que se $|x + 1| < \epsilon$, então $|h(x) - 3| < \delta$, i.e., $|3\sqrt{-x} - 3| < \delta$, i.e., $3|\sqrt{-x} - 1| < \delta$

Preciso de arranjar o termo $|x + 1|$ o qual nada tenho parecido. Assim vou multiplicar e dividir pelo conjugado de $\sqrt{-x} - 1$.

$$3|\sqrt{-x} - 1| < \delta \text{ e logo } 3 \left| (\sqrt{-x} - 1) \frac{(\sqrt{-x} + 1)}{(\sqrt{-x} + 1)} \right| < \delta, \text{ i.e., } 3 \left| \frac{-x-1}{(\sqrt{-x}+1)} \right| < \delta, \text{ i.e., } 3|x+1| \frac{1}{|\sqrt{-x}+1|} < \delta$$

Agora vamos substituir o termo $|\sqrt{-x} + 1|$ com uma constante apropriada e vamos manter o termo $|x + 1|$, que este é o termo que inicialmente temos no ϵ . Vamos assumir que $\epsilon \leq 1$. Esta é uma hipótese válida, visto que assim que encontramos um ϵ que funcione, todos os valores abaixo de ϵ irão funcionar. Assim $|x + 1| < \epsilon \leq 1$ implica que $-1 < x + 1 < 1$, i.e., $-2 < x < 0$, i.e., $1 < |\sqrt{-x} + 1| < \sqrt{2} + 1$ e logo $\frac{1}{\sqrt{2}+1} < \frac{1}{|\sqrt{-x}+1|} < 1$.

$$\text{Assim, } 3|x+1| \frac{1}{|\sqrt{-x}+1|} < \delta, \text{ i.e., } 3 \times |x+1| \times 1 < \delta, \text{ i.e., } |x+1| < \frac{\delta}{3}.$$

Escolha-se, então $\epsilon = \min\left(1, \frac{\delta}{3}\right)$.

b) [15 pontos] Determine, pela definição, a derivada da função w no ponto de abcissa -1 . Determine a equação da recta normal de w no ponto de abcissa -1 .

Resolução:

$$w(x) = 3\sqrt{-x} + 2x$$

$$w(-1) = 1$$

$$w'(-1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{w(-1+h) - w(-1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3\sqrt{1-h} + 2(-1+h) - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3\sqrt{1-h} - 3 + 2h}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left[3 \frac{\sqrt{1-h} - 1}{h} + 2 \right] = \lim_{h \rightarrow 0} \left[-3 \frac{1}{\sqrt{1-h} + 1} + 2 \right] = \frac{1}{2}$$

A recta normal é dada por

$$y - 1 = -2(x + 1) \Leftrightarrow y = -2x - 1$$

GRUPO V (40 PONTOS)

Escolha uma das opções (A,B,C,D). Cada resposta **correcta** vale **8 pontos**, cada resposta **incorrecta** desconta **3 pontos**, sem resposta não desconta. Este grupo pode ter **cotação negativa**. Não é necessária qualquer justificação. Só se terá em consideração a opção apresentada.

1. Qual das seguintes afirmações é *VERDADEIRA*?

- (A) Se A e B são duas matrizes de ordem n permutáveis, então $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$
- (B) Se $A = -B^T$, então A e B são permutáveis
- (C) Se A e B são duas matrizes singulares de ordem n , então AB tem valor próprio zero
- (D) Se $A + B$ é uma matriz de ordem n com valor próprio zero, então A ou B é singular

Solução: C

2. Qual das seguintes afirmações é *VERDADEIRA*?

- (A) Uma matriz idempotente tem sempre inversa
- (B) Uma matriz pode ser igual à sua inversa
- (C) Uma matriz simétrica nunca pode ser anti-simétrica
- (D) Uma matriz inversa nunca pode ser igual à matriz adjunta

Solução: B

3. Qual das seguintes funções é simultaneamente ímpar e injectiva?

- (A) $f(x) = x^2 \cdot \arctg(x)$
- (B) $f(x) = 1 + \ln(x^2)$
- (C) $f(x) = \cos(2x)$
- (D) $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$

Solução: A

4. Qual das seguintes afirmações é *FALSA*:

- (A) $(x|x|)' = 2|x|, \forall x \in \mathbb{R}$
- (B) $\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)' = \frac{2x}{(1+x^2)^2}, \forall x \in \mathbb{R}$
- (C) $\left(\frac{|x|}{\sqrt{x^2}}\right)' = 0, \forall x \in \mathbb{R}$
- (D) $\left(\sqrt{x^2}\right)' = 1, \forall x > 0$

Solução: C

5. Seja $g(x) = f(1-x)$. Qual das seguintes afirmações é sempre *VERDADEIRA*:

- (A) g é crescente se f é crescente
- (B) g é decrescente se f é crescente
- (C) g é convexa se f é côncava
- (D) g é crescente se f é convexa

Solução: B



O teste tem a duração de 2h30m. Deve resolver os grupos em folhas separadas

Grupo I

1. Calcule o determinante e escreva o resultado simplificado sob a forma de um produto de fatores:

$$\begin{vmatrix} (a+b)^2 & a^2-b^2 & ab+b^2 \\ ab-b^2 & (a-b)^2 & a^2-b^2 \\ ab-a^2 & ab-b^2 & 0 \end{vmatrix} \quad (2.0)$$

2. Sem calcular os determinantes, prove que:

$$\begin{vmatrix} 2a_1 & 2a_2+2a_3 & -2a_4 \\ 2ba_1 & 2ba_2 & -2ba_2 \\ -2a_1 & -2a_4-2a_2 & 2a_4 \end{vmatrix} = 8a_1 \begin{vmatrix} b & b & b \\ a_4 & a_4 & a_2 \\ a_3 & a_4 & 0 \end{vmatrix} \quad (2.0)$$

3. Calcule o determinante:

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} 0 & x_1 & x_1 & x_1 & \cdot & \cdot & \cdot & x_1 & x_1 \\ x_1 & 0 & y_1 & y_1 & \cdot & \cdot & \cdot & y_1 & y_1 \\ x_1 & y_1 & 0 & y_1 & \cdot & \cdot & \cdot & y_1 & y_1 \\ x_1 & y_1 & y_1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & y_1 & y_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_1 & y_1 & y_1 & y_1 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & y_1 \\ x_1 & y_1 & y_1 & y_1 & \cdot & \cdot & \cdot & y_1 & 0 \end{vmatrix} \quad (2.0)$$

4. Considere a equação matricial: $AXC^{-1} = \left[(C^T)^{-1} A^T C \right]^T - (CA^{-1})^{-1}$, em que A e C são matrizes regulares e que $C^T - I = B$ e $|B| = 2$.

Calcule $|X|$. (1.5)

5. Duas matrizes A e B dizem-se equivalentes, se existe uma matriz P tal que $B = P^{-1}AP$.

Mostre que duas matrizes equivalentes têm os mesmos valores próprios. (1.5)

6. Mostre que se λ_1 é valor próprio de A , então λ_1^k é valor próprio de A^k , $k \in \mathbb{R}$. (1,5)

Grupo II

7. Discuta o sistema face aos valores de $a, b \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} x + y + 2z = 1 - b \\ x + (a+1)y + (3-b)z = 1 \\ 2x + (a+2)y + 4z + 2b = 2 \\ ax + (2a+3b-3)z + 3b = 0 \end{cases}$$

(2,5)

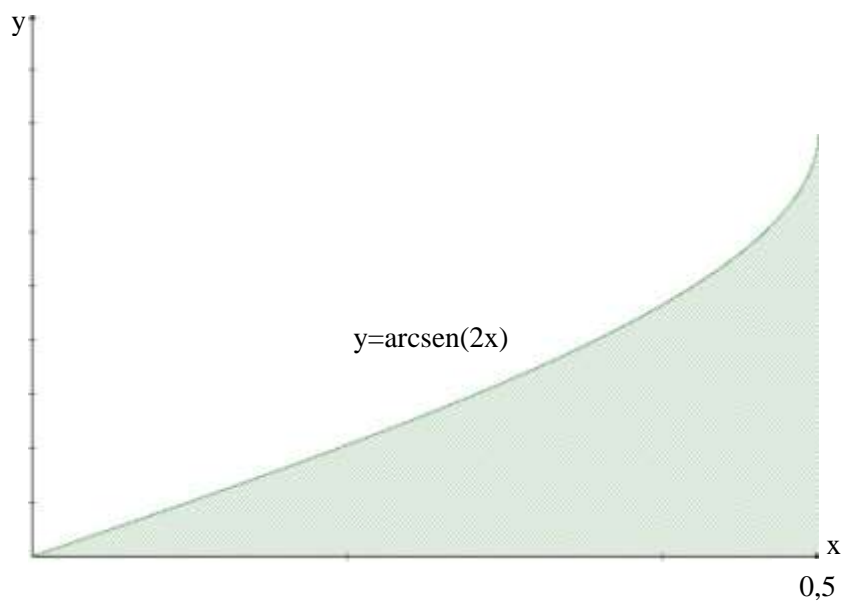
8. Calcule e simplifique:

a. $P \frac{\sin^2 x + 3 \sin x - 2}{\cos^2 x}$ (2,0)

b. $P \frac{\sqrt{2x+3}}{\sqrt[3]{5 + \sqrt{(2x+3)^3}}}$ (2,0)

c. $Pe^{2 \ln x + 3x^3}$ (1,5)

9. Determine a área do domínio plano indicado a tracejado na figura seguinte: (1,5)



Grupo I

1. Calcule o determinante:

$$\begin{vmatrix} (a+b)^2 & a^2-b^2 & ab+b^2 \\ ab-b^2 & (a-b)^2 & a^2-b^2 \\ ab-a^2 & ab-b^2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (a+b)(a+b) & (a-b)(a+b) & (a+b)b \\ (a-b)b & (a-b)(a-b) & (a-b)(a+b) \\ (b-a)a & (a-b)b & 0 \end{vmatrix} = \\
 = (a-b)(a-b)(a+b) \begin{vmatrix} a+b & 1 & b \\ b & 1 & a+b \\ (b-a)a & b & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{L_2 \rightarrow L_2 - L_1} (a-b)^2(a+b) \begin{vmatrix} a+b & 1 & b \\ -a & 0 & a \\ (b-a)a & b & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{C_1 \rightarrow C_1 + C_3} \\
 = (a-b)^2(a+b) \begin{vmatrix} a+2b & 1 & b \\ 0 & 0 & a \\ (b-a)a & b & 0 \end{vmatrix} = -a(a-b)^2(a+b) \begin{vmatrix} a+2b & 1 \\ ab-a^2 & b \end{vmatrix} = -a(a-b)^2(a+b) \begin{vmatrix} 2b & 1 \\ -a^2 & b \end{vmatrix} = \\
 \xrightarrow{C_1 \rightarrow C_1 - aC_2} \\
 = -a(a-b)^2(a+b)(2b^2 + a^2)$$

2. Sem calcular os determinantes, prove que:

$$\begin{vmatrix} 2a_1 & 2a_2+2a_3 & -2a_4 \\ 2ba_1 & 2ba_2 & -2ba_2 \\ -2a_1 & -2a_4-2a_2 & 2a_4 \end{vmatrix} = 8a_1 \begin{vmatrix} 1 & a_2+a_3 & -a_4 \\ b & ba_2 & -ba_2 \\ -1 & -a_4-a_2 & a_4 \end{vmatrix} = 8a_1 \left(\begin{vmatrix} 1 & a_2 & -a_4 \\ b & ba_2 & -ba_2 \\ -1 & -a_2 & a_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & a_3 & -a_4 \\ b & 0 & -ba_2 \\ -1 & -a_4 & a_4 \end{vmatrix} \right) = \\
 = 8a_1 \left(0 + \begin{vmatrix} 1 & a_3 & -a_4 \\ b & 0 & -ba_2 \\ -1 & -a_4 & a_4 \end{vmatrix} \right) = 8a_1 \begin{vmatrix} 1 & a_3 & -a_4 \\ b & 0 & -ba_2 \\ -1 & -a_4 & a_4 \end{vmatrix} = -8a_1 \begin{vmatrix} 1 & a_3 & -a_4 \\ b & 0 & -ba_2 \\ 1 & a_4 & -a_4 \end{vmatrix} = 8a_1 b \begin{vmatrix} 1 & a_3 & a_4 \\ 1 & 0 & a_2 \\ 1 & a_4 & a_4 \end{vmatrix} = \\
 = 8a_1 \begin{vmatrix} b & a_3 & a_4 \\ b & 0 & a_2 \\ b & a_4 & a_4 \end{vmatrix} \xrightarrow{T} 8a_1 \begin{vmatrix} b & b & b \\ a_3 & 0 & a_4 \\ a_4 & a_2 & a_4 \end{vmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} -8a_1 \begin{vmatrix} b & b & b \\ a_4 & a_2 & a_4 \\ a_3 & 0 & a_4 \end{vmatrix} \xrightarrow{C_2 \leftrightarrow C_3} 8a_1 \begin{vmatrix} b & b & b \\ a_4 & a_4 & a_2 \\ a_3 & a_4 & 0 \end{vmatrix}$$

3. Calcule o determinante:

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} 0 & x_1 & x_1 & x_1 & \cdot & \cdot & \cdot & x_1 & x_1 \\ x_1 & 0 & y_1 & y_1 & \cdot & \cdot & \cdot & y_1 & y_1 \\ x_1 & y_1 & 0 & y_1 & \cdot & \cdot & \cdot & y_1 & y_1 \\ x_1 & y_1 & y_1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & y_1 & y_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_1 & y_1 & y_1 & y_1 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & y_1 \\ x_1 & y_1 & y_1 & y_1 & \cdot & \cdot & \cdot & y_1 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} = \\ L_3 - L_2 \\ L_4 - L_2 \\ L_n - L_2 \\ L_{n+1} - L_2 \end{matrix} \begin{vmatrix} 0 & x_1 & x_1 & x_1 & \cdot & \cdot & \cdot & x_1 & x_1 \\ x_1 & 0 & y_1 & y_1 & \cdot & \cdot & \cdot & y_1 & y_1 \\ 0 & y_1 & -y_1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & y_1 & 0 & -y_1 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & y_1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & -y_1 & 0 \\ 0 & y_1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & -y_1 \end{vmatrix} =$$

$$= -x_1 \begin{vmatrix} x_1 & x_1 & x_1 & \cdot & \cdot & \cdot & x_1 & x_1 \\ y_1 & -y_1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ y_1 & 0 & -y_1 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & -y_1 & 0 \\ y_1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & -y_1 \end{vmatrix} = -x_1 \begin{vmatrix} nx_1 & x_1 & x_1 & \cdot & \cdot & \cdot & x_1 & x_1 \\ 0 & -y_1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -y_1 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & -y_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & -y_1 \end{vmatrix} = -x_1 nx_1 (-y_1)^{n-1}$$

$$C_1 \rightarrow C_1 + C_2 + C_3 + \dots + C_n \quad \quad \quad = n(-1)^n x_1^2 y_1^{n-1}$$

4. Considere a equação matricial: $AXC^{-1} = \left[(C^T)^{-1} A^T C \right]^T - (CA^{-1})^{-1}$, sabendo que A e C são matrizes regulares e que $C^T - I = B$ e $|B| = 2$. Calcule $|X|$.

$$AXC^{-1} = \left[(C^T)^{-1} A^T C \right]^T - (CA^{-1})^{-1} \Leftrightarrow AXC^{-1} = C^T AC^{-1} - AC^{-1} \Leftrightarrow AXC^{-1} = (C^T - I)AC^{-1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow AXC^{-1}C = BAC^{-1}C \Leftrightarrow A^{-1}AX = A^{-1}BA \Leftrightarrow X = A^{-1}BA$$

Então:

$$|X| = |A^{-1}BA| \Leftrightarrow |X| = \frac{1}{|A|} |B| |A| \Leftrightarrow |X| = |B| = 2$$

5. Duas matrizes A e B dizem-se equivalentes, se existe uma matriz P tal que $B = P^{-1}AP$.

Mostre que duas matrizes equivalentes têm os mesmos valores próprios.

$$|B - \lambda I| = |P^{-1}AP - \lambda I| = |P^{-1}AP - \lambda P^{-1}P| = |P^{-1}(A - \lambda I)P| = \frac{1}{|P|} |A - \lambda I| |P| = |A - \lambda I|$$

Como a equação caraterística é igual, pois $|B - \lambda I| = |A - \lambda I|$, então os valores próprios também são iguais.

6. Mostre que se λ_1 é valor próprio de A , então λ_1^k é valor próprio de A^k , $k \in \mathbb{R}$.

Se λ_1 é valor próprio de A , então:

$$(A - \lambda_1 I)X = 0 \Leftrightarrow AX = \lambda_1 X \Leftrightarrow AX = \lambda_1 X, \quad X \in \mathbb{R}^n, X \neq 0$$

Multiplicando ambos os membros por A , fica: $AAX = A\lambda_1 X \Leftrightarrow A^2 X = \lambda_1 AX \Leftrightarrow A^2 X = \lambda_1 \lambda_1 X \Leftrightarrow A^2 X = \lambda_1^2 X$

Generalizando: $A^k X = A^k \lambda_1 X \Leftrightarrow A^k X = \lambda_1 A^{k-1} X \Leftrightarrow A^k X = \lambda_1 \lambda_1^{k-1} X \Leftrightarrow A^k X = \lambda_1^k X$ c.q.d.

Grupo II

7. Discuta o sistema face aos valores de $a, b \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} x + y + 2z = 1 - b \\ x + (a+1)y + (3-b)z = 1 \\ 2x + (a+2)y + 4z + 2b = 2 \\ ax + (2a+3b-3)z + 3b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 2z = 1 - b \\ x + (a+1)y + (3-b)z = 1 \\ 2x + (a+2)y + 4z = 2 - 2b \\ ax + (2a+3b-3)z = -3b \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & \vdots & 1-b \\ 1 & a+1 & 3-b & \vdots & 1 \\ 2 & a+2 & 4 & \vdots & 2-2b \\ a & 0 & 2a+3b-3 & \vdots & -3b \end{pmatrix} \begin{matrix} L_2 - L_1 \\ L_3 - 2L_1 \\ L_4 - aL_1 \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & \vdots & 1-b \\ 0 & a & 1-b & \vdots & b \\ 0 & a & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & -a & 3b-3 & \vdots & -3b-a+ab \end{pmatrix} \begin{matrix} L_3 - L_2 \\ L_4 + L_2 \end{matrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & \vdots & 1-b \\ 0 & a & 1-b & \vdots & b \\ 0 & 0 & b-1 & \vdots & -b \\ 0 & 0 & 2b-2 & \vdots & -2b-a+ab \end{pmatrix} \begin{matrix} L_4 - 2L_3 \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & \vdots & 1-b \\ 0 & a & 1-b & \vdots & b \\ 0 & 0 & b-1 & \vdots & -b \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & ab-a \end{pmatrix} \begin{matrix} L_4 + 3L_3 \end{matrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & \vdots & 1-b \\ 0 & a & 1-b & \vdots & b \\ 0 & 0 & b-1 & \vdots & -b \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & a(b-1) \end{pmatrix} \quad SI: \quad a \neq 0 \quad \wedge \quad b-1 \neq 0 \Leftrightarrow \quad a \neq 0 \quad \wedge \quad b \neq 1$$

• Se $a=0$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & \vdots & 1-b \\ 0 & 0 & 1-b & \vdots & b \\ 0 & 0 & b-1 & \vdots & -b \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & \vdots & 1-b \\ 0 & 0 & 1-b & \vdots & b \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} SPI: \quad b \neq 1 \\ SI: \quad b = 1 \end{matrix}$$

- Se $b=1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & \vdots & 0 \\ 0 & a & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \quad SI: \quad \forall_{a \in \mathbb{R}}$$

- Se $a=0 \wedge b=1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \quad S.I.$$

Conclusão

Se:

$$b=1 \quad S.I.$$

$$b \neq 1 \wedge a \neq 0 \quad S.I.$$

$$b \neq 1 \wedge a = 0 \quad S.P.I.$$

8. Calcule e simplifique:

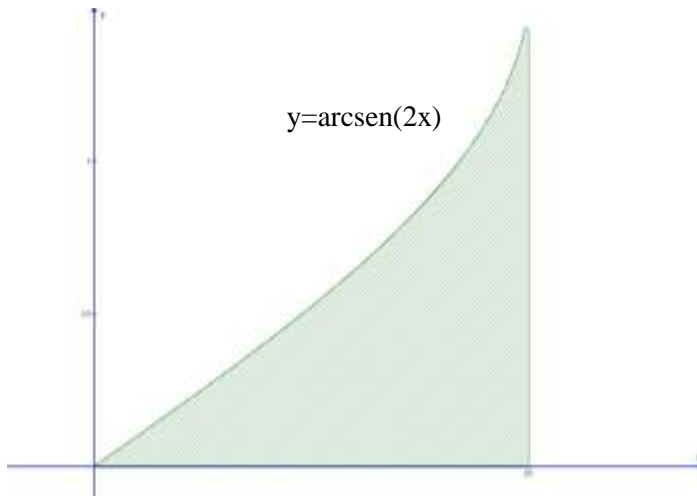
$$a. \quad P \frac{\sec^2 x + 3 \sec x - 2}{\cos^2 x} = P \frac{1 - \cos^2 x + 3 \sec x - 2}{\cos^2 x} = -P \frac{1}{\cos^2 x} - P \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} + 3P \frac{\sec x}{\cos^2 x} =$$

$$= -P(\sec^2 x) - P(1) - 3P(-\sec x \cos^{-2} x) = -\sec x - x + \frac{3}{\cos x} + C = 3 \sec x - \sec x - x + C$$

$$b. \quad P \frac{\sqrt{2x+3}}{\sqrt[3]{5+\sqrt{(2x+3)^3}}} = \frac{1}{3} P 3(2x+3)^{\frac{1}{2}} \left(5 + (2x+3)^{\frac{3}{2}} \right)^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2} \sqrt[3]{\left(5 + (2x+3)^{\frac{3}{2}} \right)^2} + C$$

$$c. \quad P e^{2 \ln x + 3x^3} = P e^{\ln x^2 + 3x^3} = P e^{\ln x^2} e^{3x^3} = \frac{1}{9} P 9x^2 e^{3x^3} = \frac{e^{3x^3}}{9} + C$$

9. Determine a área do domínio plano indicado a tracejado na figura seguinte:



$$y = \arcsen(2x) \Leftrightarrow \text{sen } y = 2x \Leftrightarrow \frac{\text{sen } y}{2} = x$$

$$\textit{Para:} \quad x = \frac{1}{2} \rightarrow y = \arcsen(1) = \frac{\pi}{2}$$

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \text{sen } y) dy = \frac{1}{2} [y + \cos y]_0^{\pi/2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} + \cos \frac{\pi}{2} - 0 - \cos 0 \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) = \frac{\pi - 2}{4}$$

SOLUÇÕES DO EXAME DE MATEMÁTICA I

26 de janeiro de 2013

Grupo I

(2 val.)

1. Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} a & 3a+1 & 1-a \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & b \\ 0 & a+1 & 1-a \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} a \\ 1 \\ 2 \\ a-b \end{bmatrix}$ e discuta o SEL $AX = B$

em função dos parâmetros reais a e b .

Solução: Aplicando o MEG, podemos concluir que o SEL dado é equivalente ao SEL com matriz ampliada:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & a+1 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-b \end{array} \right]$$

Desta forma,

- Se $a \neq b$, o SEL é impossível;
- Se $a = b \in \{-1, 0\}$, o SEL é possível e indeterminado, com grau de indeterminação 1;
- Se $a = b \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$, o SEL é possível e determinado.

(1,5 val.)

2. Determine a expressão geral das matrizes quadradas 2×2 invertíveis e que são solução da equação:

$$A^2 - AA^T = 0.$$

Solução: $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ será solução da equação $A^2 - AA^T = 0$ se, e somente se, as entradas de A forem solução do sistema:

$$\begin{cases} bc - b^2 = 0 \\ ab - ac = 0 \\ cd - bd = 0 \\ cb - c^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ c = 0 \end{cases} \vee b = c$$

e exigindo ainda a invertibilidade a A , concluímos que A tem de ser da forma $\begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix}$ com $a, b, d \in \mathbb{R}$ tais que $ad - b^2 \neq 0$.

(1,5 val.)

3. Determine a expressão simplificada do determinante de ordem $n + 1$:

$$\begin{vmatrix} (n-1)a & a & a & \cdots & a \\ (n-2)a & 0 & a & \cdots & a \\ (n-2)a & a & 0 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (n-2)a & a & a & \cdots & 0 \end{vmatrix}.$$

Solução:

$$\begin{vmatrix} (n-1)a & a & a & \cdots & a \\ (n-2)a & 0 & a & \cdots & a \\ (n-2)a & a & 0 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (n-2)a & a & a & \cdots & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{C_1 - \sum_{i=2}^{n+1} C_i} \begin{vmatrix} -a & a & a & \cdots & a \\ -a & 0 & a & \cdots & a \\ -a & a & 0 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a & a & a & \cdots & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{L_i - L_1, \substack{i=2, \dots, n+1}} \begin{vmatrix} -a & a & a & \cdots & a \\ 0 & -a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a \end{vmatrix} = (-a)^{n+1}.$$

4. Sejam E e S matrizes quadradas de ordem 3 tais que $S^{-1}ES = D$, onde $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$,

e considere $F = 2E^{11} + 10E^2 + 5E - I$.

(1 val.)

(i) Mostre que as matrizes E e D admitem a mesma equação característica.

$$|S^{-1}ES - \lambda I| = 0 \Leftrightarrow |S^{-1}(E - \lambda I)S| = 0 \Leftrightarrow |S^{-1}| |(E - \lambda I)| |S| = 0 \Leftrightarrow |E - \lambda I| = 0.$$

(2 val.)

(ii) Determine F no caso em que $S = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \\ -1 & -2 & -2 \end{bmatrix}$.

Solução:

$$F = S(2D^{11} + 10D^2 + 5D - I)S^{-1} = S \begin{bmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{12} + 49 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \times 3^{11} + 104 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & -2 & 1 \\ -4 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Grupo II

(2 val.)

1. Calcule $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x}{1 - \cos x} - \frac{2}{x} \right)$.

Solução: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x}{1 - \cos x} - \frac{2}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x^2 - 2 + 2 \cos x}{x(1 - \cos x)} \right) \underset{R.C.}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{2x - 2 \sin x}{1 - \cos x + x \sin x} \right) \underset{R.C.}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{2x - 2 \cos x}{2 \sin x - x \cos x} \right) \underset{R.C.}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{2 \sin x}{3 \cos x - x \sin x} \right) = 0.$

(2 val.)

2. Sejam α e β funções diferenciáveis em \mathbb{R} tais que $\alpha'(0) = 0$ e $\alpha(0)\beta'(0) \neq 0$ e considere a função ϕ definida por $\phi(x) = \alpha(x)\beta(x)$.

Mostre que a recta tangente ao gráfico de ϕ no ponto $(0, \phi(0))$ e a recta tangente ao gráfico de β no ponto $(0, \beta(0))$ se intersectam sobre o eixo dos xx .

Solução: Como $\alpha'(0) = 0$, a recta tangente ao gráfico de ϕ no ponto $(0, \phi(0))$ tem equação $y = \alpha(0)(\beta'(0)x + \beta(0))$ e a recta tangente ao gráfico de β no ponto $(0, \beta(0))$ tem equação $y = \beta'(0)x + \beta(0)$. Como $\alpha(0) \neq 0$ e $\beta'(0) \neq 0$ é fácil concluir que as duas rectas se intersectam sobre o eixo dos xx , no ponto $(-\frac{\beta(0)}{\beta'(0)}, 0)$.

Grupo III

1. Calcule:

(2 val.)

(i) $P \frac{x}{\sqrt{4x-4x^2}};$

Solução:

$$P \frac{x}{\sqrt{4x-4x^2}} = \frac{1}{2} P \left(\frac{2x-1}{\sqrt{1-(2x-1)^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-(2x-1)^2}} \right) = \frac{1}{4} \left(\arcsin(2x-1) - \sqrt{1-(2x-1)^2} \right).$$

(2 val.)

(ii) $P e^x \left(\frac{1}{e^{3x}+3e^{2x}+3e^x+1} + \frac{\tan^2(e^x)}{1-\cos^2(e^x)} \right);$

Solução:

$$P e^x \left(\frac{1}{e^{3x}+3e^{2x}+3e^x+1} + \frac{\tan^2(e^x)}{1-\cos^2(e^x)} \right) = P \frac{e^x}{(e^x+1)^3} + P \frac{e^x}{\cos^2(e^x)} = \tan(e^x) - \frac{1}{2(e^x+1)^2}.$$

(2 val.)

(iii) $\int_{\arccos(\frac{1}{4})}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \sqrt{\frac{1-2\sqrt{\cos x}}{\cos x}} dx.$

Solução: $\int_{\arccos(\frac{1}{4})}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \sqrt{\frac{1-2\sqrt{\cos x}}{\cos x}} dx = \lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{2}{3} \sqrt{(1-2\sqrt{\cos x})^3} \right]_{\arccos(\frac{1}{4})}^a = \frac{2}{3}.$

(2 val.)

2. Considere a função definida por $g(x) = \int_0^{\ln(\frac{1+\sin x}{\cos x})} h(t)dt$, para cada $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Sabendo que h é uma função positiva em \mathbb{R} , mostre que g é invertível e calcule $(g^{-1})'(0)$, a derivada da sua função inversa na origem.

Solução: Pela regra de Leibniz, $g'(x) = (\sec x)h(\ln(\frac{1+\sin x}{\cos x}))$ vindo, por hipótese, que $g'(x) > 0$, para todo o $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, e logo $g(x)$ é estritamente crescente. Em particular, g será injectiva e, portanto, invertível, e a sua derivada na origem pode ser calculada através do Teorema da derivada da função inversa: $(g^{-1})'(0) = \frac{1}{g'(0)} = \frac{1}{h(0)}$, dado que $g(0) = 0$.

Fim