# Second exam
# June 19, 2008
# Statistics II

1. (5 points) Num bar existe uma máquina de bebidas que está regulada de modo a servir uma média de 120 ml por copo. Sabe-se que, se forem usados copos de 170 ml a probabilidade dos mesmos transbordarem é de 0.62%. Sabe-se, ainda, que a quantidade de bebida servida por copo segue uma distribuição normal. (**No cálculo das probabilidades, use sempre as tabelas estatísticas ao seu dispor.**)

   (a) Determine a percentagem de copos que transbordarão, se forem usados copos de 140 ml?

   **Solution:** $X$ = quantidade de bebida servida por copo em ml
   $\Longrightarrow X \sim \mathcal{N}(\mu = 120, \sigma^2)$
   Quer-se calcular $\mathbb{P}(X > 140)$, mas é preciso descobrir o valor de $\sigma$:
   $\mathbb{P}(X > 170) = 0.0062 \iff 1 - \mathbb{P}(X \leq 170) = 0.0062 \iff \mathbb{P}(X \leq 170) = 0.9938 \iff \mathbb{P}[Z \leq (170 - 120)/\sigma] = 0.9938 \iff (170 - 120)/\sigma = 2.5 \iff \sigma = 20$

   $$\begin{aligned} \mathbb{P}(X > 140) &= 1 - \mathbb{P}(X \leq 140) = 1 - \mathbb{P}\left(Z \leq \frac{140 - 120}{20}\right) = \\ &= 1 - \Phi(1) = 1 - 0.8413 = 0.1587 \end{aligned}$$

   Se não conseguiu calcular a variância da variável definida em (a, assuma daqui para a frente que é igual a 400.

   (b) Qual deve ser a capacidade mínima dos copos para que transbordem no máximo 2.5% das vezes ao encher?

   **Solution:** $\mathbb{P}(X \geq a) = 0.025 \iff \mathbb{P}(X < a) = 0.975 \iff (a - 120)/20 = 1.96 \iff a = 159.2$

   (c) Foi recolhida uma amostra aleatória de 60 copos enchidos pela máquina. Qual é a probabilidade de que no máximo 15 copos tenham menos de 110 ml?

   **Solution:** $Y$ = número de copos com menos de 110 ml em 60 copos
   $\Longrightarrow Y \sim \mathrm{b}(N = 60, p)$

   $$p = \mathbb{P}(X \leq 110) = \mathbb{P}\left(Z \leq \frac{110 - 120}{20}\right) = 1 - \Phi(0.5) = 1 - 0.6915 = 0.3085$$

   Como $N \geq 20$ e $p \geq 0.1$ a distribuição binomial pode ser aproximada à normal
   $\Longrightarrow Y \overset{a}{\sim} \mathcal{N}(\mu = Np = 18.51, \sigma^2 = Np(1 - p) = 12.7997)$
   Ao aproximarmos uma distribuição discreta a uma contínua temos de proceder

à correcção de continuidade:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y \leq 15 + 0.5) &= \mathbb{P}(Y \leq 15.5) = \mathbb{P}\left(Z \leq \frac{15.5 - 18.51}{3.578}\right) = \\ &= \Phi(-0.84) = 1 - \Phi(0.84) = 1 - 0.7995 = 0.2005\end{aligned}$$

(d) Em 25% das vezes será necessário esperar mais de meio minuto para se encher um novo copo. Qual é a probabilidade da máquina encher no máximo 15 copos em 9 minutos?

**Solution:** $T$ = tempo decorrido entre o enchimento de dois copos consecutivos, em minutos $\Longrightarrow T \sim \exp(\lambda)$
$\mathbb{P}(T > 0.5) = 0.25 \iff \mathbb{P}(T \leq 0.5) = 0.75 \iff 1 - e^{-0.5\lambda} = 0.75 \iff \lambda = 2.7726$
$G$ = número de copos enchidos em 9 minutos
$\Longrightarrow G \sim \mathcal{P}(\lambda = 9 \cdot 2.7726 = 24.95)$
Como $\lambda > 20$ a disrtibuição de Poisson pode ser aproximada à normal
$\Longrightarrow G \overset{a}{\sim} \mathcal{N}(\mu = \lambda = 24.95, \sigma^2 = \lambda = 24.95)$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(G \leq 15 + 0.5) &= \mathbb{P}\left(Z \leq \frac{15.5 - 24.95}{4.995}\right) = \Phi(-1.89) = \\ &= 1 - \Phi(1.89) = 1 - 0.9706 = 0.0294\end{aligned}$$

(e) Admita que o dono do bar adquiriu uma nova máquina igual à anterior. Determine a probabilidade da quantidade total servida em dois copos, um em cada máquina, estar compreendida entre os 235 e 275 ml? Explicite o(s) pressuposto(s) usados.

**Solution:** $W$ = quantidade servida por copo pela segunda máquina, em ml
$\Longrightarrow W \sim \mathcal{N}(\mu = 120, \sigma^2 = 20^2)$
Como queremos saber a quantidade total servida em dois copos usando as duas máquinas temos de criar uma nova variável:
$Q = X + W \sim \mathcal{N}(\mu = 120 + 120 = 240, \sigma^2 = 20^2 + 20^2 = 800) \Longrightarrow$ Aditividade da Normal (pressuposto: as máquinas são independentes entre si)

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(235 \leq Q \leq 275) &= \mathbb{P}\left(\frac{235 - 240}{28.28} \leq Z \leq \frac{275 - 240}{28.28}\right) = \\ &= \mathbb{P}(-0.18 \leq Z \leq 1.24) = \Phi(1.24) - \Phi(-0.18) = 0.4639\end{aligned}$$

(f) Considere que retira uma amostra aleatória de 18 copos da primeira máquina. Determine a probabilidade da variância amostral corrigida ser no mínimo de 336 $\text{ml}^2$?

**Solution:**

$$Q = \frac{(N-1)\,S'^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{N-1} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{17 \cdot S'^2}{400} \sim \chi^2_{17}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(S'^2 \geq 336\right) &= 1 - \mathbb{P}\left(S'^2 < 336\right) = 1 - \mathbb{P}\left[\frac{(N-1)\,S'^2}{\sigma^2} < \frac{17 \cdot 336}{400}\right] = \\ &= 1 - \mathbb{P}\left(\chi^2_{17} < 14.28\right) = 1 - 0.355 = 0.645 \end{aligned}$$

2. (6 points) Numa grande empresa no sector da distribuição, 15% das encomendas feitas online são entregues utilizando pequenas carrinhas comerciais. A empresa dispõe de uma frota de 40 carrinhas deste tipo, sendo que 30 têm pintado o seu logotipo.

(a) Qual a probabilidade de em 16 encomendas, seleccionadas aleatoriamente da totalidade das encomendas online feitas num dia, mais de 9 não terem sido entregues pelas pequenas carrinhas comerciais?

**Solution:** $X$ = número de encomendas que não são entregues pelas pequenas carrinhas comerciais (em 16)
$\Longrightarrow X \sim \mathrm{b}\,(N = 16, p = 0.85)$
$\mathbb{P}\,(X > 9) = \mathbb{P}\,(Y < 16 - 9) = \mathbb{P}\,(Y \leq 6) = 0.9944$
Onde $Y = N - X \sim \mathrm{b}\,(N = 16, p = 0.15)$

(b) Qual a probabilidade de serem recebidas até 2 encomendas numa hora (só é recebida uma encomenda de cada vez), sabendo que após receber uma encomenda 66% das vezes passam mais de 10 minutos até ser recebida outra encomenda?

**Solution:** $V$ = número de encomendas recebidas por hora
$V \sim \mathcal{P}\,(\lambda_V)$ (supondo válidas as três condições do processo de Poisson)
Quer-se calcular $\mathbb{P}\,(V \leq 2)$, mas é preciso descobrir o valor de $\lambda$
$T$ = tempo de espera (em minutos) entre o recebimento de duas encomendas online
$T \sim \exp\,(\lambda)$ com $F\,(t) = 1 - e^{-\lambda t}$
$\mathbb{P}\,(T > 10) = 0.66 \Longleftrightarrow e^{-10\lambda} = 0.66 \Longleftrightarrow -10\lambda = \ln 0.66 \Longleftrightarrow \lambda = 0.0415515$
Como cada hora tem 60 minutos, o número médio de encomendas recebidas por hora é $\lambda_V = 60 \cdot 0.0415515 \approx 2.5$

Por consulta da tabela da Função de Probabilidade da Poisson, verifica-se que $\mathbb{P}(V \leq 2) = 0.5438$

(c) Sabendo que em cada dia só são utilizadas 25 pequenas carrinhas comerciais para entregar as encomendas (escolhidas aleatoriamente), qual a probabilidade de num determinado dia menos de 17 terem o logotipo da empresa pintado?

**Solution:** $W =$ número de pequenas carrinhas comerciais com o logotipo pintado numa amostra de 20, retirada aleatoriamente e sem reposição, de um total de 40
$\Longrightarrow W \sim \mathrm{h}(M = 40, N = 20, p = 0.75)$
com $\max\{0, 25 - 10\} \leq x \leq \min\{(25, 30)\}$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X < 17) &= \mathbb{P}(X = 15) + \mathbb{P}(X = 16) = \\ &= \frac{C_{15}^{30} C_{10}^{10}}{C_{25}^{40}} + \frac{C_{16}^{30} C_{9}^{10}}{C_{25}^{40}} = 0.003856 + 0.036152 = 0.04\end{aligned}$$

(d) No refeitório da referida empresa, em 10% dos dias há gelado de limão como sobremesa. Qual a probabilidade dos empregados da empresa terem de esperar no máximo 15 dias até haver gelado de limão?

**Solution:** $L =$ número de dias de espera até a sobremesa ser gelado de limão
$\Longrightarrow L \sim \mathrm{bn}(k = 1, 0.1)$
$\mathbb{P}(L \leq 15) = 1 - 0.915 = 0.7941$

(e) Sabe-se que a idade dos empregados que trabalham na empresa é uma variável aleatória $(Y)$ com distribuição normal com média igual a 30 anos e desvio-padrão igual a 2.611 anos. Qual a probabilidade da idade média numa amostra de 40 empregados ser superior a 31 anos?

**Solution:** $Y =$ idade dos trabalhadores da empresa
$Y \sim \mathcal{N}(\mu = 30, \sigma = 2.611) \Longrightarrow Z = \dfrac{\overline{Y} - \mu}{\sigma/\sqrt{N}} \sim \mathcal{N}(0, 1)$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\overline{Y} > 31\right) &= \mathbb{P}\left(Z > \frac{31 - 30}{2.611/\sqrt{40}}\right) = \mathbb{P}(Z > 2.42) = \\ &= 1 - \mathbb{P}(Z < 2.42) = 1 - 0.9922 = 0.0078\end{aligned}$$

3. (7 points) Diga se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas. Justifique as suas respostas.

(a) Um agente de seguros vende apólices a cinco indivíduos, todos da mesma idade. Segundo estatísticas passadas, a probabilidade de um indivíduo com essa idade viver mais 30 anos é 0.4. Supondo independencia entre os indivíduos, a probabilidade de pelo menos um indivíduo ainda estar vivo daqui a 30 anos é maior que 0.5.

**Solution:** $X$ = número de indivíduos (em 5) que ainda estão vivos daqui a 30 anos

$\Longrightarrow X \sim \mathrm{b}\,(5, 0.4)$

Probabilidade de pelo menos um indivíduo ainda estar vivo daqui a 30 anos:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\,(X \geq 1) &= 1 - \mathbb{P}\,(X = 0) = 1 - \binom{5}{0} 0.4^5 0.6^0 = \\ &= 1 - 0.07776 = 0.92224 > 0.5\end{aligned}$$

Assim, a afirmação é **VERDADEIRA**.

(b) O número de clientes que entram numa loja em $t$ minutos segue uma distribuição Poisson. Sabe-se que, em média, entram 2 clientes por minuto na loja. A loja abre às 8 horas. Se um dia o vendedor se atrasa e abre a loja às 8 horas e 3 minutos, a probabilidade de não ter perdido nenhum cliente é 0.32.

**Solution:** $X$ = número de clientes que entram numa loja em $t$ minutos se, em média, entram 2 clientes por minuto na loja

$\Longrightarrow X \sim \mathcal{P}\,(2t)$

3 minutos de atraso $\Longrightarrow t = 3 \Longrightarrow X \sim \mathcal{P}\,(2 \cdot 3)$

Probabilidade de não ter perdido nenhum cliente:

$$\mathbb{P}\,(X = 0) = e^{-6} \frac{6^0}{0!} = 0.00248 \neq 0.32$$

Assim, a afirmação é **FALSA**.

(c) Seja $X$ uma variável aleatória com distribuição Poisson com parâmetro $\lambda$. Um investigador decide tomar como aproximação de $\lambda$ aquele valor para o qual a probabilidade de $X$ ser igual a 3 tenha o valor máximo. Então o investigador deve usar o valor 3 para $\lambda$.

**Solution:** $X \sim \mathcal{P}\,(\lambda)$

$$\mathbb{P}(X=3)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^3}{3!}=f(\lambda)$$

É necessário obter o máximo de $f(\lambda)$ em relação a $\lambda$

$$f'(\lambda)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^2(3-\lambda)}{3!}$$

Isto é positivo em $(0,3)$ e negativo se $\lambda>3 \Longrightarrow \lambda=3$ é o máximo
Assim, a afirmação é **VERDADEIRA**.

(d) Foi aberto um concurso para a realização de um determinado projecto. No concurso participam unicamente a nossa empresa e uma empresa da concorrência. O concurso será ganho pela empresa que pede menos dinheiro. Sabe-se que a quantidade de dinheiro que a outra empresa pede segue uma distribuição uniforme entre 8 e 20 milhões de euros. Se a nossa empresa pedir 12 milhões de euros para realizar o projecto, a probabilidade de ganhar o concurso é 0.3333.

**Solution:** $X=$ quantidade de dinheiro que a outra empresa pede, $X\sim \mathrm{U}(8,20)$
Probabilidade de ganhar se a nossa empresa pedir 12 milhões de euros:

$$\mathbb{P}(X>12)=\int_{12}^{20}\frac{1}{12}\,\mathrm{d}x=\left[\frac{x}{12}\right]_{12}^{20}=\frac{8}{12}=0.6667\neq 0.3333$$

Assim, a afirmação é **FALSA**.

(e) A quantidade procurada de um determinado producto (em toneladas) no próximo ano é uma variável aleatória com distribuição normal $N(1200,100^2)$. Então a probabilidade da procura ser superior a 1000 toneladas e a probabilidade da procura ser inferior a 1400 toneladas são iguais.

**Solution:** $X=$ quantidade procurada do producto, $X\sim\mathcal{N}(1200,100^2)$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X>1000) &= \mathbb{P}\left(Z>\frac{1000-1200}{100}\right)=\mathbb{P}(Z>-2)=\\ &= 1-\mathbb{P}(Z<-2)=1-\Phi(-2)=\\ &= 1-[1-\Phi(2)]=\Phi(2)\end{aligned}$$

$$\mathbb{P}(X<1400)=\mathbb{P}\left(Z<\frac{1400-1200}{100}\right)=\mathbb{P}(Z<2)=\Phi(2)$$

Assim, a afirmação é **VERDADEIRA**.

(f) Seja $X_1, \ldots, X_5$ uma amostra aleatória com distribuição normal padrão, e seja $\overline{X}$ a média desta amostra. Além disso, seja $X_6$ outra variável aleatória com distribuição normal padrão, independente das anteriores. A probabilidade de $W$ ser maior que 4.6 é 0.995 se

$$W = \frac{2X_6}{\sqrt{\sum_{i=1}^{5}\left(X_i - \overline{X}\right)^2}}.$$

**Solution:**

$$W = \frac{2X_6}{\sqrt{\sum_{i=1}^{5}\left(X_i - \overline{X}\right)^2}} = \frac{X_6}{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{5}\left(X_i - \overline{X}\right)^2}{4}}}$$

$\Longrightarrow W \sim \mathrm{t}_4$

$$\mathbb{P}\left(W > 4.6 \mid W \sim \mathrm{t}_4\right) = 1 - 0.995 = 0.005$$

Assim, a afirmação é **FALSA**.