First exam
March 26, 2007
Statistics II

1. (7 points) Na fábrica de relógios "Sempre a tempo" o tempo que um relógio leva a ser fabricado segue uma distribuição exponencial negativa. Sabendo que a probabilidade de um relógio levar mais de uma hora a ser fabricado é de 5% calcule:

   (a) O número médio de relógios produzidos por dia (admita que na fábrica se trabalham 6 horas por dia).

   > **Solution:** Seja T = tempo que um relógio leva a ser fabricado em horas $\Longrightarrow T \sim \exp(\lambda)$
   >
   > $\mathbb{P}(T > 1) = 0.05 \Longleftrightarrow \exp(-\lambda) = 0.05 \Longleftrightarrow \lambda = 3$
   >
   > X = número de relógios fabricados por hora $\Longrightarrow X \sim \mathcal{P}(\lambda = 3)$
   >
   > Y = número de relógios produzidos por dia $\Longrightarrow Y \sim \mathcal{P}(\lambda = 3 \cdot 6 = 18)$
   >
   > Em média são produzidos 18 relógios por dia.

   (b) Qual a probabilidade da fábrica produzir mais de 400 relógios num mês em que se trabalhem 20 dias?

   > **Solution:** W = número de relógios produzido em 20 dias
   >
   > $\Longrightarrow W \sim \mathcal{P}(\lambda = 18 \cdot 20 = 360) \Longrightarrow W \overset{a}{\sim} \mathcal{N}(\mu = 360, \sigma^2 = 360)$
   >
   > $\mathbb{P}(W > 400 + 0.5) = 1 - \mathbb{P}(W \leq 400.5) = 1 - \Phi(2.13) = 1 - 0.9834 = 0.0166$

   O dono da loja considera que teve um dia **muito bom** sempre que são produzidos mais de 25 relógios e considera que teve um dia **bom** quando são produzidos entre 20 (exclusive) e 25 (inclusive) relógios.

   (c) Calcule a probabilidade do dono da loja ter de esperar mais de 2 dias até ter um dia muito bom.

   > **Solution:** Represente Y o número de relógios produzidos por dia $\Longrightarrow Y \sim \mathcal{P}(\lambda = 3 \cdot 6 = 18)$
   >
   > $\mathbb{P}(Y > 25) = 1 - \mathbb{P}(Y \leq 25) = 1 - 0.9554 = 0.0446 \approx 0.05$
   >
   > M = número de dias até ter um dia muito bom $\Longrightarrow M \sim \text{bn}(m; 1, 0.05)$
   >
   > $\mathbb{P}(M > 2) = 1 - \mathbb{P}(M \leq 2) = 1 - \text{bn}(0; 1, 0.05) - \text{bn}(1; 1, 0.05) - \text{bn}(2; 1, 0.05) = 1 - (0.05 + 0.0475) = 0.9025$

   Sabendo que o dono da fábrica distribui pelos empregados um prémio de 1000€ sempre que tem um dia muito bom e 500€ sempre que tem um dia bom, calcule:

   (d) O valor esperado do prémio diário pago pelo dono da fabrica.

   > **Solution:** Represente Y = o número de relógios produzidos por dia $\Longrightarrow Y \sim \mathcal{P}(\lambda = 3 \cdot 6 = 18)$

$\mathbb{P}(Y > 25) = 1 - \mathbb{P}(Y \leq 25) = 1 - 0.9554 = 0.0446$
$\mathbb{P}(20 < Y \leq 25) = \mathbb{P}(Y \leq 25) - \mathbb{P}(Y \leq 20) = 0.9554 - 0.7307 = 0.2247$
$U =$ premio diário pago pelo dono da fábrica
$\mathbb{E}(U) = 1000 \cdot 0.0446 + 500 \cdot 0.2247 = 156.95$€

(e) A probabilidade do dono da fábrica pagar mais de 5000€ em prémios num determinado mês (admita que o mês tem 30 dias úteis).

Solution: $U =$ prémio diário pago pelo dono da fábrica
$\mathbb{E}(U) = 1000 \cdot 0.0446 + 500 \cdot 0.2247 = 156.95$€
$\mathbb{V}\mathrm{ar}(U) = \mathbb{E}(U^2) - [\mathbb{E}(U)]^2 = 100775 - 156.95^2 = 76141.7$
Pelo teorema do límite central
$S = \sum_{i=1}^{30} U \overset{a}{\sim} \mathcal{N}(\mu = 30 \cdot 156.95 = 4708.5, \sigma^2 = 30 \cdot 76141.7 = 2284251)$
$\mathbb{P}(S > 5000) = 1 - \mathbb{P}(S \leq 5000) = 1 - \Phi(0.19) = 1 - 0.57647 = 0.42353$

2. (7 points) A Autocomércio é uma das muitas empresas que comercializam automóveis da marca Rspeed em Portugal. Esta empresa dispõe de 10 vendedores na região da Grande Lisboa (que integram o Departamento de vendas de Lisboa) e de 6 vendedores na região Sul do país (que integram o Departamento de vendas do Sul).

Sabe-se que existem em Portugal várias empresas, a comercializar a marca Rspeed, e que existem inúmeros vendedores, para cima de 200, a vender esta marca. Sabe-se ainda que:

- A variável X, "Vendas mensais, de um qualquer vendedor de automóveis da marca Rspeed, na região da Grande Lisboa", segue uma distribuição normal com média de 7 unidades e desvio padrão de 4 unidades.
- A variável Y, "Vendas mensais, de um qualquer vendedor de automóveis da marca Rspeed, na região Sul do país", segue uma distribuição, também normal, com média de 5 unidades e desvio padrão de 3 unidades.

(a) Qual a probabilidade das vendas mensais totais da Autocomércio ultrapassarem as 120 unidades?

(b) O director do Departamento de vendas de Lisboa fez a seguinte afirmação: "As vendas mensais médias, por vendedor, no meu Departamento são sempre superiores a 5 unidades". Concorda com esta afirmação? Justifique, indicando a probabilidade de que este fenómeno possa ocorrer.

(c) Por sua vez o director do Departamento de vendas do Sul afirmou: "Há meses em que as vendas mensais médias, por vendedor, no meu departamento ultrapassam as vendas mensais médias, por vendedor, no departamento de Lisboa". Concorda com esta afirmação? Justifique e em caso afirmativo indique a probabilidade de que este fenómeno possa ocorrer.

(d) Calcule a probabilidade de num determinado mês, a variância corrigida das vendas mensais de um vendedor do Departamento de vendas de Lisboa ser superior a 26.

3. (6 points) Diga se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas. Justifique as suas respostas.

(a) Nos sacos de farinha indica-se que o seu peso é 100 quilogramas, mas na realidade costuma haver diferenças entre o peso marcado e o peso real. Suponhamos que a diferença entre o peso real dum saco e o peso marcado de 100 quilogramas é uma variável aleatória com função de densidade

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}(1-x^2) & \text{se } x \in (-1,1) \\ 0 & \text{no caso contrário} \end{cases}$$

Se seleccionarmos 10 sacos ao acaso, a probabilidade de houver 8 ou mais sacos com menos de 99.5 quilogramas é menor que 0.5.

Solution: "Sucesso"=pesar menos do que 99.5 kg

Probabilidade de sucesso (p)

$$\begin{aligned} p &= \mathbb{P}(\text{peso} < 99.5) = \mathbb{P}(\text{peso} - 100 < -0.5) = \\ &= \int_{-1}^{-0.5} \frac{3}{4}\left(1-x^2\right)\mathrm{d}x = 0.15625. \end{aligned}$$

Y = número de sacos, entre os 10 seleccionados, que pesam menos de 99.5 kg
$\Longrightarrow Y \sim \mathrm{b}(10, 0.15625)$

$$\mathbb{P}(Y \geq 8) = \mathbb{P}(Y=8) + \mathbb{P}(Y=9) + \mathbb{P}(Y=10) = 0.00001 + 0 + 0 = 0.00001$$

Assim, a afirmação é **VERDADEIRA**.

(b) Ao seleccionarmos de modo independente três artigos produzidos por uma fábrica, sabemos que a probabilidade de obter exactamente dois artigos não defeituosos é 0.243. Então podemos afirmar que a proporção de artículos correctos producidos pela fábrica é 80%.

Solution: X = número de artigos não defeituosos entre os 3 seleccionados
$\Longrightarrow X \sim \mathrm{b}(3, p)$ onde p é a proporção de artigos não defeituosos produzidos pela fábrica

Se a afirmação fosse verdadeira, seria $p = 0.8$ e portanto $\mathbb{P}(X=2) = 0.384 \neq 0.243$. Assim, a afirmação é **FALSA**.

(c) Se $X \sim \mathcal{N}(2,3)$, então $X^2 \sim \mathcal{N}(4,9)$.

Solution: O domínio de uma variável aleatória normal é $(-\infty, \infty)$, mas o domínio do seu quadrado é $[0, \infty)$. Assim, a afirmação é **FALSA**.
Além disso, sabemos que $\mathbb{E}(X^2) = \mathbb{V}\text{ar}(X) + [\mathbb{E}(X)] = 7 \neq 4$, pelo que X^2 não pode ser $\mathcal{N}(4,9)$.

(d) Se $X \sim \mathcal{N}(1, 0.5^2)$ e $Y = 3X + 2$, então $\mathbb{P}(3.5 < Y < 8) = 0.8185$.

Solution: É claro que $Y \sim \mathcal{N}(5, 1.5^2)$. Seja $Z = (Y-5)/1.5$, assim

$$\mathbb{P}(3.5 < Y < 8) = \mathbb{P}(Y < 8) - \mathbb{P}(Y < 3.5) = \mathbb{P}(Z < 2) - \mathbb{P}(Z < -1) = 0.8185.$$

Assim, a afirmação é **VERDADEIRA**.

(e) Seja $X_1, \ldots, X_{11}$ uma amostra aleatória de uma variável aleatória com distribuição normal padrão, e seja $\overline{X}$ a média amostral obtida com esta amostra. Além disso, seja X_{12} outra variável aleatória com distribuição normal padrão, independente das anteriores. Então a probabilidade de W ser maior que 0.7 é 0.5, onde W é definida como

$$W = \frac{\sqrt{10}X_{12}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{11}\left(X_i - \overline{X}\right)^2}}.$$

Solution:

$$W = \frac{\sqrt{10}X_{12}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{11}\left(X_i - \overline{X}\right)^2}} = \frac{X_{12}}{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{11}\left(X_i - \overline{X}\right)^2}{10}}}.$$

O numerador é uma variável aleatória normal $\mathcal{N}(0,1)$, enquanto o denominador é a raiz quadrada da variância amostral de $X_1, \ldots, X_{11}$, o qual segue uma distribuição χ^2 com 10 graus de liberdade. Como são independentes, $W \sim t_{10}$. Então, $\mathbb{P}(W > 0.7) = 0.25 \neq 0.5$. Assim, a afirmação é **FALSA**.

(f) A média amostral $\overline{X}$ de uma amostra aleatória dum universo com média μ e variância σ^2 satisfaz $\mathbb{E}\left(\overline{X}^2\right) = \dfrac{\sigma^2}{n} + \mu^2$.

Solution:

$$\mathbb{E}\left(\overline{X}^2\right) = \mathbb{V}\text{ar}\left(\overline{X}\right) + \left[\mathbb{E}\left(\overline{X}\right)\right]^2 = \frac{\sigma^2}{n} + \mu^2$$

Assim, a afirmação é **VERDADEIRA**.