First exam
October 24, 2007
Statistics II

1. (6.5 points) Suponha que a procura diária num determinado estabelecimento é uma variável aleatória com distribuição Poisson e variância igual a 3.

   (a) Determine o stock mínimo de artigos no início de cada dia para que haja ruptura de stock no máximo em 20% dos dias?

   > **Solution:** X = procura diária num determinado estabelecimento
   > $X \sim \mathcal{P}(\lambda = 3)$
   > $\mathbb{P}(X > s) \leq 0.2 \iff \mathbb{P}(X \leq s) \geq 0.8 \iff s = 4$

   (b) Tendo em conta o stock calculado na alínea anterior (assuma o valor 3 caso não a tenha conseguido resolver), calcule a probabilidade de numa semana (5 dias úteis) haver no máximo dois dias com ruptura de stock.

   > **Solution:** Y = número de dias com procura excedentária em 5
   > $Y \sim \mathrm{b}(5, p)$
   > $$p = \mathbb{P}(X > 4) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 4) = 1 - 0.8153 = 0.1874 \approx 0.2$$
   > $\Longrightarrow Y \sim \mathrm{b}(5, 0.2)$
   > $\mathbb{P}(Y \leq 2) = 0.9421$

   Sempre que a procura atinge 5 unidades o gerente do estabelecimento dá o dia por terminado (fechando a loja).

   (c) Calcule a probabilidade do gerente encerrar a loja na primeira metade do dia de trabalho.

   > **Solution:** V = procura em $\frac{1}{2}$ dia num determinado estabelecimento
   > $V \sim \mathcal{P}(\lambda = 1.5)$
   > $$\mathbb{P}(V \geq 5) = 1 - \mathbb{P}(V \leq 4) = 1 - 0.9814 = 0.0186$$

   Todos os meses o dono do estabelecimento sorteia prémios monetários pelos seus 200 colaboradores. Sabe-se que o valor esperado do prémio por colaborador é de 50€ correspondendo a um desvio padrão de 25€.

   (d) Calcule a probabilidade de num determinado mês serem distribuídos mais de 10500€ em prémios pela totalidade dos colaboradores.

   > **Solution:** P = prémio atribuído por colaborador
   > $\mathbb{E}(P) = 50$, $\mathbb{V}\mathrm{ar}(P) = 625$

Pelo teorema do limite central,

$SP = \sum_{i}^{200} P_i \overset{a}{\sim} \mathcal{N}\left(50 \cdot 200 = 10000, 625 \cdot 200 = 125000\right)$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(SP > 10500\right) &= 1 - \mathbb{P}\left(SP \leq 10500\right) = 1 - \mathbb{P}\left(Z \leq \frac{10500 - 10000}{\sqrt{125000}}\right) = \\ &= 1 - \Phi\left(1.41\right) = 0.0793 \end{aligned}$$

(e) Em média quantos meses se tem de esperar para que seja distribuído um montante de prémios superior a 10500€?

Solution: R = número de meses até se obter um com prémio superior a 10500€
$R \sim \mathrm{bn}\left(1, 0.0793\right)$

$$\mathbb{E}\left(R\right) = \frac{1}{0.0793} = 12.61 \approx 13$$

2. (6.5 points) O consumo de cerveja, numa festa, por um qualquer rapaz, entre os 16 e os 20 anos, segue uma distribuição normal com média $\mu = 5$ e variância $\sigma^2 = 16$. O consumo de cerveja, numa festa, por uma qualquer rapariga entre os 16 e os 20 anos segue uma distribuição normal com média $\mu = 4$ e variância $\sigma^2 = 9$.

Considera-se que o consumo de cerveja de um rapaz é independente do consumo de cerveja de uma rapariga. Considera-se também que o consumo de cerveja de um rapaz é independente do consumo de cerveja dos outros rapazes, e que o consumo de cerveja de uma rapariga é independente do consumo de cerveja das outras raparigas.

(a) Numa festa que reúne 9 rapazes, qual a probabilidade do consumo de cerveja médio, por rapaz, não ultrapassar as 6 unidades?

Solution: X = consumo de cerveja por um rapaz
$X \sim \mathcal{N}\left(5, 16\right) \iff \overline{X} \sim \mathcal{N}\left(5, \frac{16}{9}\right)$

$$\mathbb{P}\left(\overline{X} < 6\right) = \mathbb{P}\left(Z < \frac{6-5}{4/3}\right) = \mathbb{P}\left(Z < 0.75\right) = 0.7734$$

(b) E quantos rapazes deveriam estar reunidos numa festa para que essa probabilidade aumentasse para 0.8944 (para que seja de 0.8944 a probabilidade do consumo de cerveja médio não ultrapassar as 6 unidades).

Solution: Agora temos de encontrar o valor de N tal que $\mathbb{P}\left(\overline{X} < 6\right) = 0.8944$

$$\mathbb{P}\left(Z < \frac{6-5}{4/\sqrt{N}}\right) = 0.8944$$

$$\iff \frac{6-5}{4/\sqrt{N}} = 1.25 \iff N = 25$$

(c) Comente a veracidade da seguinte afirmação: *"A probabilidade da variância corrigida do consumo de cerveja dos* 9 *rapazes ser superior a* 10 *é de* 60%*"*.

Solution:

$$\mathbb{P}\left(S^2 > 10\right) = \mathbb{P}\left[\frac{(N-1)\,S^2}{\sigma^2} > \frac{8 \cdot 10}{16}\right] = \mathbb{P}\left(\chi^2_8 > 5\right) \approx 0.25$$

Assim, a afirmação é falsa.

(d) Imagine agora uma festa que onde estão presentes 49 rapazes e 49 raparigas. Qual a probabilidade de o consumo de cerveja médio das raparigas ser superior ao consumo de cerveja médio dos rapazes?

Solution: Y = consumo de cerveja por uma rapariga

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\overline{Y} - \overline{X} > 0\right) &= \mathbb{P}\left[\frac{\left(\overline{Y} - \overline{X}\right) - (\mu_Y - \mu_X)}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{N_X} + \frac{\sigma_Y^2}{N_Y}}} > \frac{0 - (4-5)}{\sqrt{\frac{16}{49} + \frac{9}{49}}}\right] = \\ &= \mathbb{P}\left(Z > \frac{7}{5}\right) = 1 - 0.9192 = 00808\end{aligned}$$

(e) Considerando ainda a mesma festa, com os 49 rapazes e as 49 raparigas, quantas unidades de cerveja devem existir na festa, de forma a assegurar que toda a procura de cervejas seja satisfeita, com uma probabilidade superior a 90%.

Solution:

$$\begin{matrix} X \sim \mathcal{N}(5, 16) \\ Y \sim \mathcal{N}(4, 9) \end{matrix} \iff \begin{matrix} 49X \sim \mathcal{N}\left(5 \cdot 49 = 245, 16 \cdot 49^2 = 38416\right) \\ 49Y \sim \mathcal{N}\left(4 \cdot 49 = 196, 9 \cdot 49^2 = 21609\right) \end{matrix}$$

$$\iff S = 49X + 49Y \sim \mathcal{N}\left(245 + 196 = 441, 38416 + 21609 = 60025\right)$$

$$\mathbb{P}(S < k) > 0.9 \iff \mathbb{P}\left(Z < \frac{k - 441}{\sqrt{60025}}\right) > 0.9$$

donde temos que

$$\frac{k-441}{245} > 1.282 \qquad \Longleftrightarrow \qquad k > 755.09 \approx 755$$

3. (7 points) Diga se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas. Justifique as suas respostas.

(a) Sabemos que o número de chamadas que uma central telefónica recebe por um minuto é uma variável aleatória com distribuição Poisson e que a probabilidade de receber pelo menos uma chamada num minuto é de 0.63212. Podemos então assegurar que, em média, o centro recebe uma chamada por minuto.

Solution: X = número de chamadas recebidas por minuto, $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$
Probabilidade de receber pelo menos uma chamada:

$$\mathbb{P}(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 0.63212$$

Então, $\mathbb{P}(X = 0) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^0}{0!} = 1 - 0.63212 = 0.36788$
$\Longleftrightarrow\ e^{-\lambda} = 0.36788 \ \Longleftrightarrow\ \lambda = -\ln(0.36788) = 1 = \mathbb{E}(X)$
Assim, a afirmação é **VERDADEIRA**.

(b) Um agente investe em onze acções diferentes. A probabilidade de cada uma destas acções ter uma rentabilidade superior a 10% no próximo mês é 0.6, sendo a rentabilidade de cada acção independente da rentabilidade das outras acções. Então o número médio de acções com rentabilidade superior a 10% é 5.

Solution: X = número de acções, entre as 11, com rentabilidade superior a 10%
$\Longrightarrow X \sim \mathrm{b}(11, 0.6)$
Número médio de acções com rentabilidade superior a 10%: $\mathbb{E}(X) = 11 \cdot 0.6 = 6.6 \neq 5$
Assim, a afirmação é **FALSA**.

(c) Um vendedor de seguros sabe que se fizer muitos contactos com clientes será mais provável vender um seguro. Sabe-se que a probabilidade de uma pessoa comprar um seguro depois da visita do vendedor é 0.15, e que o resultado duma visita é independente do resultado obtido nas outras visitas. Neste caso, o vendedor deverá realizar pelo menos 10 visitas para que a probabilidade de vender pelo menos um seguro seja no mínimo 0.9.

Solution: X = número de seguros vendidos depois de n visitas
$\Longrightarrow X \sim \mathrm{b}(n, 0.15)$
Temos que encontrar n tal que

$$\mathbb{P}(X \geq 1) \geq 0.9$$

Ou,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \geq 1) &= 1 - \mathbb{P}(X = 0) = 1 - \binom{n}{0} 0.15^0 0.85^n = \\ &= 1 - 0.85^n \geq 0.9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 - 0.85^n &\geq 0.9 \\ 0.1 &\geq 0.85^n \\ \ln 0.1 &\geq n \ln 0.85 \\ -2.30259 &\geq -0.16252n \\ 14.1681 &\leq n \end{aligned}$$

$\Longrightarrow n > 15$
Assim, a afirmação é **FALSA**.

(d) A duração das chamadas telefónicas (em minutos) feitas a partir de uma cabina telefónica é uma variável aleatória X com distribuição exponencial de média 1. Se cada chamada custa 0.5 euros por minuto completo, e as fracções de minuto pagam-se como um minuto completo, a probabilidade duma chamada custar mais de 2 euros é menor que 0.5.

Solution: X = duração das chamadas telefónicas feitas a partir de uma cabina telefónica
$X \sim \exp(1)$
A chamada custa mais do que 2 euros se demora mais do que 4 minutos

$$\mathbb{P}(X > 4) = 1 - F(4) = e^{-4} = 0.01832 < 0.5$$

Assim, a afirmação é **VERDADEIRA**.

(e) O comprimento dos parafusos (em cm) fabricados por uma máquina tem distribuição $\mathcal{N}(5, 0.25)$. Um parafuso considera-se defeituoso se o seu comprimento difere de 5 cm em mais de 0.2 cm. Então a probabilidade dum parafuso ser defeituoso é 0.3108.

Solution: X = comprimento de um parafuso (em cm), $X \sim \mathcal{N}(5, 0.25)$
Definindo $Z = \dfrac{X-5}{0.5}$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\text{defeituoso}) &= \mathbb{P}(X \geq 5.2) + \mathbb{P}(X \leq 4.8) = \\ &= \mathbb{P}(Z \geq 0.4) + \mathbb{P}(Z \leq -0.4) = 2 \cdot 0.3446 = \\ &= 0.6892 \neq 0.3108 \end{aligned}$$

Assim, a afirmação é **FALSA**.

(f) Seja $X_1, \ldots, X_5$ uma amostra aleatória com distribuição normal padrão, e seja $\overline{X}$ a média desta amostra. Além disso, seja X_6 outra variável aleatória normal padrão, independente das anteriores. A probabilidade de W ser maior que 4.35 é 0.5 se

$$W = X_6^2 + \sum_{i=1}^{5} \left(X_i - \overline{X}\right)^2.$$

Solution: Se $X_6 \sim \mathcal{N}(0,1) \implies X_6^2 \sim \chi_1^2$

$$\sum_{i=1}^{5} \left(X_i - \overline{X}\right)^2 = 5 \cdot S^2 \sim \chi_4^2$$

$\implies W \sim \chi_5^2$

$$\mathbb{P}\left(W > 4.35 \mid W \sim \chi_5^2\right) = 0.5$$

Assim, a afirmação é **VERDADEIRA**.