UNIVERSIDADE CATÓLICA PORTUGUESA — FACULDADE DE CIÊNCIAS ECONÓMICAS E EMPRESARIAIS

LICENCIATURAS EM ECONOMIA E GESTÃO

ESTATÍSTICA I

2ª Frequência – 5 de Junho de 2009

APRESENTE TODOS OS CÁLCULOS EFECTUADOS
JUSTIFIQUE TODAS AS SUAS RESPOSTAS
RESPONDA A CADA GRUPO NUMA FOLHA SEPARADA

I (5,0 valores)

O João é vendedor de automóveis e, utilizando os seus conhecimentos de estatística e a sua larga experiência como vendedor, estabeleceu a seguinte função de probabilidade conjunta entre as variáveis aleatórias X e Y assim definidas:

X = Número de automóveis vendidos numa semana

Y = Número de demonstrações realizadas numa semana (apresentação do automóvel ao potencial comprador, realização de um teste de condução, ...).

X (vendas) \ Y	1	2	3
0	0,30	0,20	0,10
1	0,07	0,08	0,15
2	0	0,04	0,05
3	0	0	0,01

a) Calcule as seguintes probabilidades, explicitando a função utilizada:
   i) Probabilidade de o João vender mais de 1 automóvel numa semana;
   ii) Probabilidade de o João vender mais de 1 automóvel numa semana em que realiza mais do que uma demonstração.

b) Obtenha a Função Geradora de Momentos (*FGM*) da variável aleatória X.

c) A remuneração semanal do João é determinada pela fórmula $R=50+5X$. Utilizando a *FGM* obtida em *b)*, determine:
   i) Valor esperado de R
   ii) Variância de R.

d) "*O número de automóveis que consigo vender, numa semana, não depende do número de demonstrações que faço*", afirmou o João muito desanimado.
Discuta a validade desta afirmação calculando o valor da *covariância entre X e Y*. Interprete o valor obtido.

II (5,0 valores)

A Margarida adora sair à noite com os amigos, à quinta-feira e ao sábado. Ao sábado, a Margarida pode sempre sair, mas à quinta-feira só está disponível 2 vezes por mês; assim, em cada mês, a Margarida sai à noite 6 vezes.

a) Sabemos que a Margarida foi sair à noite: qual a probalidade de essa saída ter sido à 5ª feira? E ao sábado?

Quando sai à quinta-feira, a Margarida pode ir ao *BCB* em 10% dos casos, à *LisboaK* em 80% dos casos e ao *Lolpop* nos restantes casos.

Quando sai ao sábado, opta pelo *BCB* ou pela *LisboaK* com 70 % e 30% de probabilidade, respectivamente.

A Margarida considera que o ambiente no *Lolpop* está sempre *bom*.

No *BCB*, há 80% de probabilidade de o ambiente estar *bom* e 20% de probabilidade de estar *mau*.

Na *LisboaK* estas probabilidades dependem de haver muita gente ou não: se estiver cheia, o ambiente está bom em 60% dos casos; se estiver vazia, o ambiente estará sempre mau. Sabe-se que a probabilidade de a *LisboaK* estar cheia e o ambiente não estar bom é igual a 30%.

b) Determine a probabilidade de a Margarida ir para a *LisboaK*;

c) Determine a probabilidade de a *LisboaK* estar cheia;

d) Uma amiga contou-nos que a Margarida adorou a sua última saída pois o ambiente estava muito *bom*. Determine a probabilidade de ela ter estado no *BCB*. Justifique.

e) A Joana é amiga da Margarida e sai às 5ª feiras à noite em 50% das vezes. Determine a probabilidade de as 2 amigas se encontrarem sabendo que as suas decisões são independentes. Justifique.

III (4,0 valores)

O Sr. Manuel tem dois cafés na zona de Lisboa: o "*Baixa Café*" e o "*Alta Café*".

Após vários anos de experiência, concluiu que a intensidade da procura no "*Alta Café*" pode ser ilustrada através da variável aleatória *X* com a seguinte função densidade de probabiliadade:

$$f(x) = \begin{cases} k\,(4-x) & 1 \le X \le 2 \\ 0 & outros\ valores\ de\ X \end{cases}$$

a) Verifique que $k = 0,4$;

b) Determine a função de distribuição a variável aleatória *X*;

c) Utilizando a função de distribuição obtida em *b)*, calcule:

i) $Prob\,(X > 1,7)$

ii) $Prob\,(X > 1,7 \mid X > 1,5)$

iii) $Prob\,(X < 1,3 \mid X > 1,5)$

d) O Sr. Manuel está agora a estudar a possibilidade de expansão do negócio e a sua decisão de investimento vai depender da procura *X*:

Se *X* for maior que 1.5, decide investir no "*Alta Café*" - Decisão *A*

Se *X* for menor ou igual a 1.5, decide investir no "*Baixa Café*" - Decisão *B*

As probabilidades de obter lucros *(L)*, com cada uma das decisões de investimento (*A* ou *B*) são as seguintes:

$Prob\ (L \mid A) = 0,7$ $\qquad$ $Prob\ (L \mid B) = 0,5$

Sabendo que o Sr. Manuel obteve lucros, qual a probabilidade de ter investido no "*Alta Café*" ? Justifique.

IV (6,0 valores)

A função densidade de probabilidade conjunta das variáveis aleatórias X e Y é dada por:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x\,y}{8} & 0<Y<2X<4\\ 0 & \textit{outros valores de } X,Y\end{cases}$$

a) Verifique que a função de densidade de probabilidade marginal da variável X é dada pela seguinte expressão:

$$f(x)=\frac{x^3}{4} \qquad 0<X<2$$

b) Obtenha a função de densidade de probabilidade marginal da variável Y;

c) Obtenha a função de densidade de probabilidade condicional da variável Y dado X;

d) Calcule $E(Y|\,X=1{,}5)$

e) Calcule $Prob\,(Y>X)$.

UNIVERSIDADE CATÓLICA PORTUGUESA
FACULDADE DE CIÊNCIAS ECONÓMICAS E EMPRESARIAIS

LICENCIATURAS EM ECONOMIA E GESTÃO

ESTATÍSTICA I - 2ª Frequência – 5 de Junho de 2009
CORRECÇÃO

I

X = Número de automóveis vendidos numa semana

Y = Número de demonstrações realizadas numa semana (inclui a apresentação do automóvel ao potencial comprador e a realização de um teste de condução).

X (vendas) \ Y	1	2	3
0	0,30	0,20	0,10
1	0,07	0,08	0,15
2	0	0,04	0,05
3	0	0	0,01

i) Função de probabilidade marginal da variável X

X (vendas)	f(x)
0	0,60
1	0,30
2	0,09
3	0,01

Prob (X>1) = Prob (X=2) + Prob (X=3) = 0,09+0,01=0,10

ii) Função de probabilidade condicional da variável X, dado Y>1

X (vendas)	f (x | y>1)
0	0,30 / 0,63 = 0,48
1	0,23 / 0,63 = 0,36
2	0,09 / 0,63 = 0,14
3	0,01 / 0,63 = 0,02

ii)

Prob (X>1|Y>1) = Prob (X=2|Y>1) + Prob (X=3|Y>1) = 0,14+0,02=0,16

b) Função Geradora de Momentos (*FGM*) da variável aleatória X (utilizando a função de probabilidade marginal de X já calculada)

$$M_x(t) = E\left(e^{tx}\right) = \sum_{i=0}^{3} e^{tx_i} f(x_i) = e^{0t} \times f(0) + e^{1t} \times f(1) + e^{2t} \times f(2) + e^{3t} \times f(3)$$

$$M_x(t) = 0{,}6 + 0{,}3e^{1t} + 0{,}09e^{2t} + 0{,}01e^{3t}$$

c) $R=50+5X$

$E(R)=50+5E(X)$

$Var(50+5X)=5^2 Var(X)$

$$\frac{dM_x(t)}{dt} = 0{,}3e^{1t} + 2\times 0{,}09e^{2t} + 3\times 0{,}01e^{3t}$$

$$\frac{dM_x(t)}{dt}|\, t=0 \Rightarrow 0{,}3 + 2\times 0{,}09 + 3\times 0{,}01 = 0{,}51 = \mu_x = E(x)$$

$$\frac{d^2M_x(t)}{dt^2} = 0{,}3e^{1t} + 2\times 0{,}18e^{2t} + 3\times 0{,}09e^{3t}$$

$$\frac{d^2M_x(t)}{dt^2}|\, t=0 \Rightarrow 0{,}3 + 2\times 0{,}18 + 3\times 0{,}09 = 0{,}75 = \mu'_2$$

$$Var(X) = E(X-\mu)^2 = \mu'_2 - \mu^2 = 0{,}75 - 0{,}51^2 = 0{,}4899$$

i) $E(R)=50+5E(X) = 50 + 5\times 0{,}51 = 52{,}55$

ii) $Var(50+5X)=5^2 Var(X) = 25\times 0{,}4899 = 24{,}495$

d) $Cov(X,Y) = E\left[(X-\mu_x)(Y-\mu_y)\right] = E(XY) - E(X)E(Y)$

$E(X) = 0{,}51$

Função de probabilidade marginal da variável Y

Y	f(y)
1	0,37
2	0,32
3	0,31

$$E(Y) = 1\times 0{,}37 + 2\times 0{,}32 + 3\times 0{,}31 = 1{,}94$$

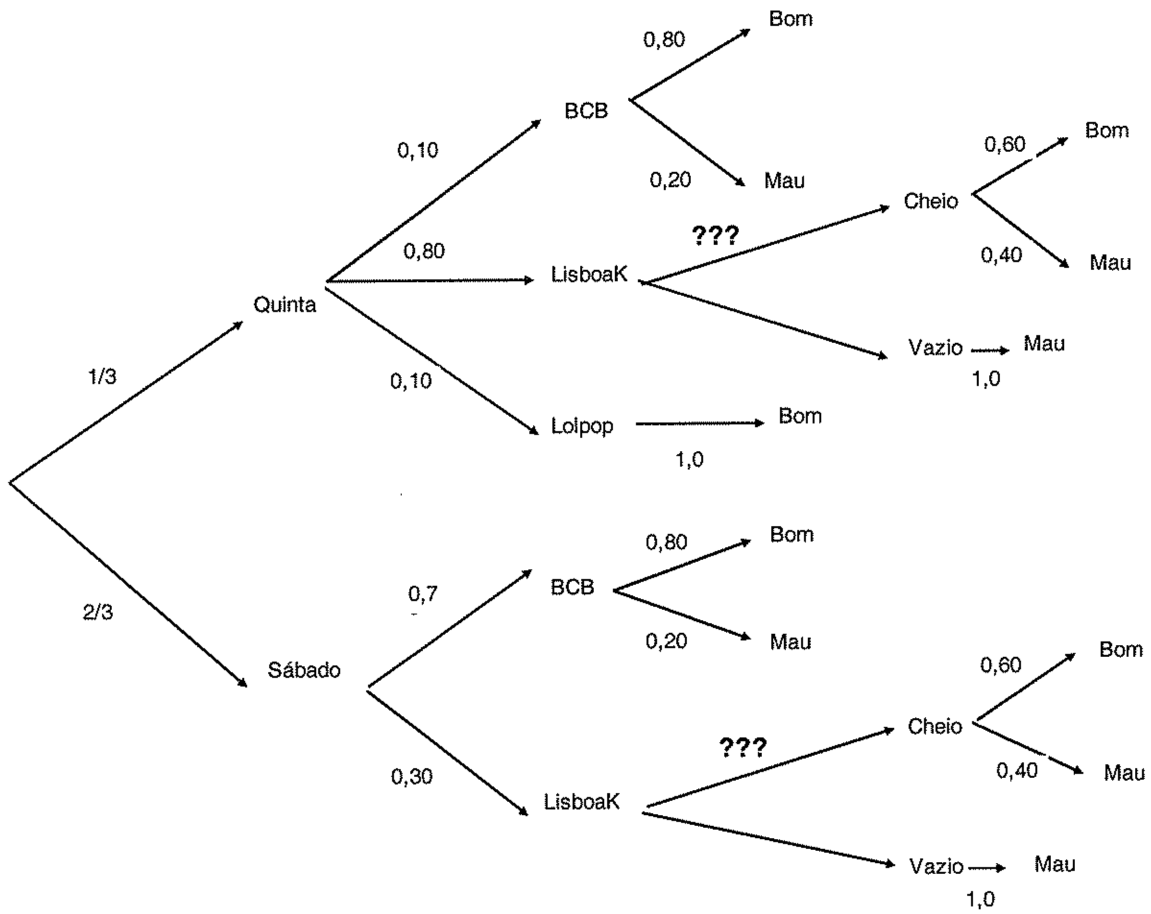
$$E(XY) = \sum_x \sum_y xy\, f(x,y)$$

$$E(XY) = 0\times1\times0,30 + 0\times2\times0,20 + 0\times3\times0,10 +$$
$$+1\times1\times0,07 + 1\times2\times0,08 + 1\times3\times0,15 +$$
$$+2\times1\times0 + 2\times2\times0,04 + 2\times3\times0,05 +$$
$$+3\times1\times0 + +3\times2\times0 + 3\times3\times0,01 = 1,23$$

$$Cov(X,Y) = 1,23 - 0,51\times1,94 = +0,2406$$

A covariância **positiva** entre as variáveis sugere que, quando Y sobe X também sobe, o que não confirma a afirmação do vendedor.

II



a)

Em 6 saídas, 4 são ao Sábado e 2 à 5ª feira:

$$Prob(Quinta\text{-}feira) = Prob(Q)$$

$$Prob(Q) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$Prob(Sabado) = Prob(S)$$

$$Prob(S) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

b)

$$Prob(LisboaK) = Prob(LK)$$

$$Prob(LK) = Prob(Q) \times Prob(LK \mid Q) + Prob(S) \times Prob(LK \mid S) =$$

$$Prob(LK) = \frac{1}{3} \times 0,8 + \frac{2}{3} \times 0,3 = 0,46(6)$$

c) $Prob(LisboaK \;\; cheia) = Prob(C) = ?$

Sabemos, em relação à LisboaK, que:

- A probabilidade de estar cheia e o ambiente não estar bom é 30% $\rightarrow$ $Prob(C \cap Mau) = 0{,}30$;

- A probabilidade de o ambiente estar bom quando está cheia é 60%, logo a probabilidade de estar mau, quando está cheia, é 40%: $\rightarrow Prob(Mau|C) = 0{,}40$

Utilizando o conceito de probabilidade condicional,

$$Prob(Mau|C) = \frac{Prob(C \cap Mau)}{Prob(C)}$$

$$0{,}4 = \frac{0{,}3}{Prob(C)} \Rightarrow Prob(C) = \frac{0{,}3}{0{,}4} = 0{,}75$$

d)

$$Prob(BCB|Bom) = \frac{Prob(BCB \cap Bom)}{Prob(Bom)}$$

$$\begin{aligned}
&Prob(Bom) = \\
&Prob(Q) \times Prob(BCB|Q) \times Prob(Bom|BCB \cap Q) + \\
&Prob(Q) \times Prob(LisboaK|Q) \times Prob(Cheio) \times Prob(Bom|Cheio) + \\
&Prob(Q) \times Prob(Lolpop|Q) \times Prob(Bom|Lolpop \cap Q) + \\
&Prob(S) \times Prob(BCB|S) \times Prob(Bom|BCB \cap S) + \\
&Prob(S) \times Prob(LisboaK|S) \times Prob(Cheio) \times Prob(Bom|Cheio) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&Prob(Bom) = \\
&\frac{1}{3} \times 0{,}10 \times 0{,}80 + \frac{1}{3} \times 0{,}80 \times 0{,}75 \times 0{,}60 + \frac{1}{3} \times 0{,}10 \times 1 + \\
&\frac{2}{3} \times 0{,}70 \times 0{,}80 + \frac{2}{3} \times 0{,}30 \times 0{,}75 \times 0{,}60 = \\
&= 0{,}64(3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&Prob(Bom \cap BCB) = \\
&Prob(Q) \times Prob(BCB|Q) \times Prob(Bom|BCB \cap Q) \\
&Prob(S) \times Prob(BCB|S) \times Prob(Bom|BCB \cap S) =
\end{aligned}$$

$Prob(Bom \cap BCB)=$

$$\frac{1}{3}\times 0{,}80\times 0{,}75\times 0{,}60+\frac{2}{3}\times 0{,}70\times 0{,}80=0{,}21(3)$$

$$Prob(BCB|Bom)=\frac{Prob(BCB\cap Bom)}{Prob(Bom)}=\frac{0{,}21(3)}{0{,}64(3)}=0{,}3316$$

e) Dado que as decisões da Joana e Margarida de sair à 5ª feira são independentes, podemos escrever:

$$Prob(Joana \cap Margarida)=Prob(Joana)\times Prob(Margarida)$$

$$Prob(Joana \cap Margarida)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$

III

$$f(x)=\begin{cases} k\,(4-x) & 1\le X\le 2 \\ 0 & outros\ valores\ de\ X \end{cases}$$

a) $\int_x f(x)\,dx=1 \Rightarrow = \int_1^2 k\,(4-x)\,dx=1$

$$\Rightarrow k\left[4x-\frac{x^2}{2}\right]_1^2=k\left[\left(4\times 2-\frac{2^2}{2}\right)-\left(4\times 1-\frac{1^2}{2}\right)\right]=1\Rightarrow(\ldots)\Rightarrow k=0{,}4$$

b)

Se $X<1 \rightarrow F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int_{-\infty}^{x} 0dt=0$

Se $1\le X\le 2 \rightarrow F(x)=F(1)+\int_1^x f(t)dt=0+0{,}4\int_1^x(4-t)\,dt=(\ldots)=1{,}6x-0{,}2x^2-1{,}4$

Se $X>2 \rightarrow F(x)=F(2)+\int_2^{+\infty} f(t)dt=1+\int_2^{+\infty} 0dt=1$

$$F(x)=\begin{cases} 0 & X<1 \\ 1{,}6x-0{,}2x^2-1{,}4 & 1\le X\le 2 \\ 1 & X>2 \end{cases}$$

c)

i)

$$Prob\left(X>1{,}7\right)=1-Prob\left(X\le 1{,}7\right)=1-F\left(1{,}7\right)=$$
$$=1-\left[1{,}6\times 1{,}7-0{,}2\times 1{,}7^2-1{,}4\right]=0{,}258$$

ii)

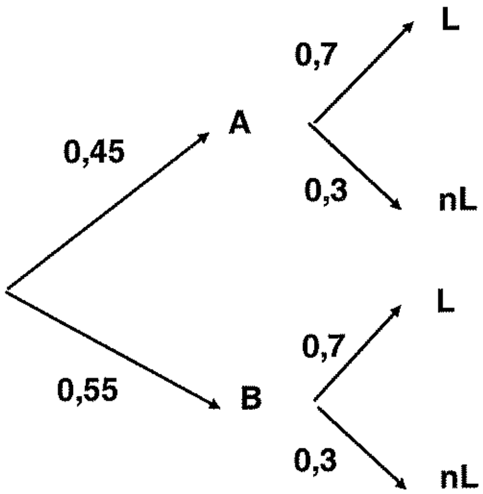
$$Prob\left(X>1{,}7\,|\,X>1{,}5\right)=\frac{Prob\left(X>1{,}7\wedge X>1{,}5\right)}{Prob\left(X>1{,}5\right)}=\frac{Prob\left(X>1{,}7\right)}{Prob\left(X>1{,}5\right)}=\frac{1-F\left(1{,}7\right)}{1-F\left(1{,}5\right)}=\frac{0{,}258}{1-0{,}55}=0{,}57(3)$$

iii)

$$Prob\left(X<1{,}3\,|\,X>1{,}5\right)=\frac{Prob\left(X<1{,}3\wedge X>1{,}5\right)}{Prob\left(X>1{,}5\right)}=\frac{0}{Prob\left(X>1{,}5\right)}=0$$

d)

$$Prob\ \left(A\right)=\Pr ob\left(X>1{,}5\right)=1-F\left(1{,}5\right)=0{,}45$$
$$Prob\ \left(B\right)=\Pr ob\left(X\le 1{,}5\right)=F\left(1{,}5\right)=0{,}55$$



$$Prob\ \left(L\right)=Prob\ \left(A\right)\times Prob\ \left(L|A\right)+Prob\ \left(B\right)\times Prob\ \left(L|B\right)=$$
$$=0{,}45\times 0{,}7+0{,}55\times 0{,}5=0{,}59$$

$$Prob\ \left(A|L\right)=\frac{Prob\left(A\cap L\right)}{Prob\left(L\right)}=\frac{0{,}7\times 0{,}45}{0{,}59}=0{,}53$$

IV

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x\,y}{8} & 0<Y<2X<4\\ 0 & outros\ valores\ de\ X,Y\end{cases}$$

a)

$$f(x)=\int_y f(x,y)\,dy=\int_0^{2x}\left(\frac{x\,y}{8}\right)dy=\left(\frac{x}{8}\right)\int_0^{2x}(y)\,dy=(\ldots)=\frac{x^3}{4} \qquad \text{com } 0<X<2$$

b)

$$f(y)=\int_x f(x,y)\,dx=\int_{0,5y}^{2}\left(\frac{x\,y}{8}\right)dx=\left(\frac{y}{8}\right)\int_{0,5y}^{2}(x)\,dx=(\ldots)=\frac{y}{4}-\frac{y^3}{64}$$

com $0<Y<4$

c)

$$f(y\,|\,x)=\frac{f(x,y)}{f(x)}=\frac{\frac{x\,y}{8}}{\frac{x^3}{4}}=\frac{y}{2x^2} \qquad \text{com } 0<Y<2X<4$$

d)

$$E(Y\,|\,X\ \ )=\int_0^{2x} y\,f(y\,|\,X)\,dy$$

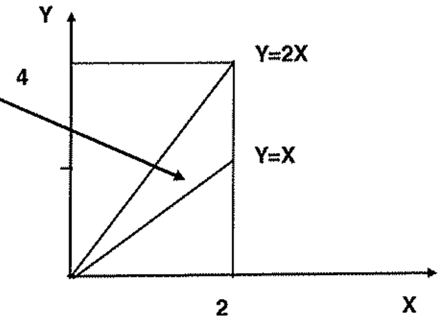
$$E(Y\,|\,X=1{,}5\ )=\int_0^{2\times 1{,}5} y\,f(y\,|\,X=1{,}5)\,dy$$

$$f(y\,|\,X=1{,}5)=\frac{y}{2(1{,}5)^2}=\frac{y}{4{,}5}$$

$$E(Y\,|\,X=1{,}5\ )=\int_0^{3} y\left(\frac{y}{4{,}5}\right)dy=\frac{1}{4{,}5}\int_0^{3}\left(y^2\right)dy=(\ldots)=2$$

e)

Área relevante



$$Prob\ (Y > X) = \int_0^2 \left[\int_x^{2x} f(x,y)\, dy \right] dx\,.$$

$$= \frac{1}{8}\int_0^2 x\left[\int_x^{2x} y\, dy \right] dx = \frac{1}{8}\int_0^2 x\left[\frac{y^2}{2} \right]_x^{2x} dx$$

$$= \frac{1}{16}\int_0^2 x\left[(2x)^2 - \left(x^2\right) \right] dx = \frac{1}{16}\int_0^2 \left(4x^3 - x^3\right) dx = \frac{3}{16}\int_0^2 x^3\, dx$$

$$= \frac{3}{16}\left[\frac{x^4}{4} \right]_0^2 = \frac{3}{16}\left(\frac{2^4}{4} \right) = 0{,}75$$