UNIVERSIDADE CATÓLICA PORTUGUESA — FACULDADE DE CIÊNCIAS ECONÓMICAS E EMPRESARIAIS

LICENCIATURAS EM ECONOMIA E GESTÃO

ESTATÍSTICA I

2º Teste - 4 de Junho de 2010

O teste é constituído por quatro grupos. Responda em **folhas separadas para cada grupo**. Se eventualmente não fizer algum grupo, entregue em branco a folha respectiva devidamente identificada.

Leia cuidadosamente a totalidade de cada grupo antes de o responder. Dê respostas mais simples sempre que o enquadramento teórico o permitir.

Explicite todas as hipóteses e os cálculos que tiver de fazer para a resolução dos problemas. Use um mínimo de **três** casas decimais. Os grupos ou as perguntas podem não estar pela ordem em que a matéria foi leccionada. Um grupo pode incluir diferentes matérias.

I (5,0 valores)

Num determinado concurso televisivo cada concorrente procede ao "Lançamento de dois dados perfeitos", um azul (A) e um branco (B), numerados de um a 6.

a) (i) Calcule o valor esperado e a variância dos pontos obtidos no lançamento do dado azul. Como interpreta esses resultados?

(ii) Confirme o valor esperado e a variância obtidos em a) (i) através da função geradora de momentos.

Na primeira fase do concurso o concorrente ganha 10 euros por cada ponto que sai no dado azul e 20 euros por cada ponto que sai no dado branco.

b) Calcule o valor esperado e a variância da soma dos euros ganhos no lançamento dos dois dados. [nesta alínea e nas seguintes não precisa de usar a função geradora de momentos].

A passagem do concorrente à fase seguinte do jogo exige que seja bem sucedido no lançamento dos dados. Sabe-se que, dos 36 resultados possíveis ao lançar os dois dados, só 9 permitem a aprovação do candidato nesta etapa. Caso contrário, é eliminado e o jogo reinicia-se com outro jogador.

Considere X a variável aleatória que representa o número de concorrentes eliminados sucessivamente até ao primeiro apurado.

c) Determine a função de probabilidade de X e demonstre que esta apresenta as propriedades necessárias.

d) Determine a expressão analítica da função de distribuição [probabilidade acumulada] e, através desta, calcule a probabilidade de $(5 \leq X < 10)$.

II (6,0 valores)

Uma empresa oferece seguros de saúde e cuidados médicos. Relativamente ao total dos seus clientes, a probabilidade de um deles ser internado num hospital é de 3%.

A probabilidade de um cliente ser internado depende de ser saudável, ter doenças ligeiras ou ter doenças graves. A prevalência de doenças num indivíduo varia consoante a sua idade, nomeadamente depende de ter mais ou menos de 65 anos. 20% dos clientes desta empresa têm mais de 65 anos.

Sabendo que um cliente tem mais de 65 anos, a probabilidade de ser saudável é de 40% e a probabilidade de ter doenças ligeiras é o dobro da probabilidade de ter doenças graves.

Sabendo que um cliente tem menos de 65 anos, a probabilidade de ter uma doença ligeira é quatro vezes a probabilidade de ter uma doença grave.

Tanto para o grupo com mais de 65 anos como para o grupo com menos de 65 anos, a probabilidade de um cliente com doenças ligeiras ser internado é de 5% e, também para os dois grupos de idade, para os clientes com doenças graves esta probabilidade é de 30%. Os clientes saudáveis nunca são internados.

a) Represente a situação descrita através de um diagrama de árvore, a qual deve incluir todos os valores das probabilidades em causa.

   Nota: Se não conseguir chegar a todas as probabilidades pedidas, arbitre valores coerentes para as probabilidades em falta na árvore pedida. A adequação da árvore e o uso da informação do texto inicial serão tomados em conta nas cotações das alíneas seguintes.

b) Qual a probabilidade de um cliente escolhido ao acaso ter mais de 65 anos e não ser saudável?

c) Sabendo que o António foi internado, qual a probabilidade de ele ter mais de 65 anos?

d) A Maria e a Leonor são clientes desta empresa. Sabendo que a Maria tem 70 anos e a Leonor 40, e não tendo qualquer informação sobre o seu estado de saúde, qual a probabilidade de ambas terem sido internadas? Assuma que o estado de saúde e a necessidade de internamento de cada uma delas é independente do da outra.

A empresa aceitou fazer um novo seguro a um grupo de 100 pessoas, relativamente aos quais não sabe a idade, tendo apresentado a esse grupo uma proposta com um preço global, ou seja para o grupo, de 6000 euros para situações de internamento. O grupo achou que esse valor era muito alto e entregou a informação relativa aos seus membros, tendo-se verificado que todos tinham mais de 65 anos.

e) Atendendo a que o custo para a seguradora com o internamento de cada pessoa é de 2000 euros, a proposta da seguradora deve ser revista? Justifique de forma quantificada.

III (4,0 valores)

1. Suponha que um aluno da Faculdade de Teologia da UCP sabe por tradição que 90% dos Católicos vivem no Continente A e 10% no Continente B. Desejando aprofundar os seus conhecimentos estudou a teoria de Bayes [Rev. Thomas Bayes da Igreja Presbiteriana Inglesa] e, consultando muitos registos das paróquias dos dois continentes, obteve a informação adicional de que, a percentagem de católicos do continente A era igual à percentagem do continente B. Terá ganho alguma coisa em termos de informação sobre as probabilidades estudar aqueles registos? Justifique quantitativamente utilizando uma árvore de decisão.
2. Considere a variável aleatória *X*, definida no intervalo $[0;b]$, tal que $\text{Prob}(X > x) = 1 - 0,01x^2$
   a) Determine o valor de *b*.
   b) Obtenha a expressão da função de densidade de probabilidade.
3. A probabilidade de uma variável aleatória estar compreendida entre os valores 0,2 e 0,8 é pelo menos igual a 0,75. Calcule a média e a variância desta variável aleatória.

IV (5,0 valores)

As variáveis aleatórias *X* e *Y* correspondem a indicadores químicos que medem o nível de determinadas substâncias químicas e que permitem avaliar a qualidade de um determinado produto, quando sujeito a análise.

Estima-se que estas variáveis *X* e *Y* tenham a seguinte função densidade de probabilidade conjunta:

$$f(x,y) = \begin{cases} 0,25 \quad , & \begin{cases} 0 < x < 2 \\ 0 < y < 4 \\ y + 2x \leq 4 \end{cases} \\ 0 & \text{outros valores de } x \text{ e de } y \end{cases}$$

Um produto para o qual *X* tome valores superiores a 1 ou *Y* tome valores superiores a 2 é considerado de qualidade inferior, sendo destruído.

a) Em Média, qual o valor que se espera que um produto analisado apresente para o indicador *X*?

b) Como se altera o valor da alínea anterior sabendo que o indicador *Y* toma o valor de 1. O que pode concluir sobre a independência entre os indicadores *X* e *Y*?

c) Calcule a Função de Distribuição Conjunta de (*X*,*Y*) e utilize-a para calcular a probabilidade de um produto sujeito a análise não ser destruído.

Novas especificações impostas por lei obrigam à construção de dois novos indicadores, expresso como $W = (X^3 + 2Y)$ e como $Z = (XY)$.

d) Para um qualquer produto sujeito a análise qual o valor esperado do novo indicador *W* e do novo indicador *Z*?

FLEE – ESTATÍSTICA I

2º TESTE , 2010/06/04

I

a) (i) A: pontos saídos no dado azul

$$f(a) = \begin{cases} 1/6 & a = 1,2,3,4,5,6 \\ 0 & \text{outros valores de } a \end{cases}$$

$$E(A) = \sum_a a f(a) = (1+2+3+4+5+6) \times \frac{1}{6} = 3{,}5 \text{ pontos}$$

$$V(A) = \sum_a a^2 f(a) - E(A)^2 = (1+4+9+16+25+36) \times \frac{1}{6} - 3{,}5^2 =$$

$$= \frac{91}{6} - 12{,}25 = 15{,}16(6) - 12{,}25 = 2{,}91(6)$$

Se forem efectuadas sucessivas experiências aleatórias de lançar o dado, a média e a variância tendem para os valores indicados à medida que o nº de experiências aleatórias aumenta. No limite são os valores encontrados.

(ii) $$M_x(t) = E(e^{tx}) = \sum_x e^{tx} f(x)$$

$$= (e^t + e^{2t} + e^{3t} + e^{4t} + e^{5t} + e^{6t}) \times \frac{1}{6}$$

$$M'_x(t) = (e^t + 2e^{2t} + 3e^{3t} + 4e^{4t} + 5e^{5t} + 6e^{6t}) \times \frac{1}{6}$$

$$M'_x(t=0) = (1+2+3+4+5+6) \times \frac{1}{6} = 3{,}5 = E(X)$$

$$M''_x(t) = (e^t + 2^2 e^{2t} + 3^2 e^{3t} + 4^2 e^{4t} + 5^2 e^{5t} + 6^2 e^{6t}) \times \frac{1}{6}$$

$$M''_x(t=0) = (1 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2) \times \frac{1}{6} = \frac{91}{6} = E(X^2)$$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{91}{6} - 3{,}5^2 = 2{,}91(6)$$

b) B : Pontos saídos no dado branco

Tem a mesma distribuição dos pontos saídos no dado azul.

$E(10A + 20B) = 10E(A) + 20E(B) =$

$= 10 \times 3{,}5 + 20 \times 3{,}5 = 35 + 70 = 105$ EUROS

$V(10A + 20B) = 10^2 V(A) + 20^2 V(B) + 2 \times 10 \times 20 \times COV(A, B)$

$= 100 \times 2{,}91(6) + 400 \times 2{,}91(6) + 0$

$= 291{,}(6) + 1166{,}(6) = 1458{,}(3)$

OS PONTOS OBTIDOS EM A E B SÃO RESULTADOS INDEPENDENTES PELO QUE COV(A,B) DÁ ZERO.

c) X: N.º de concorrentes eliminados sucessivamente até ao primeiro apurado

$$P(X=0) = \frac{9}{36} \times \left(\frac{27}{36}\right)^0 = 0{,}25 \times 0{,}75^0 = 0{,}25$$

$$P(X=1) = 0{,}25 \times 0{,}75^1$$

$$P(X=2) = 0{,}25 \times 0{,}75^2$$

$$\ldots$$

$$P(X=n) = 0{,}25 \times 0{,}75^n \rightarrow f(x) = \begin{cases} 0{,}25 \times 0{,}75^x, & x = 0,1,2,\ldots \\ 0 & \text{out. val. de } x \end{cases}$$

PROPRIEDADES:

1) $0{,}2 \times 0{,}75^x \geq 0$ para todos os valores de $x \in \mathbb{N}_0$

2) $$\lim_{x \to \infty} 0{,}25 \times \frac{1-0{,}75^x}{1-0{,}75} = 0{,}25 \times \frac{1}{1-0{,}75} = \frac{0{,}25}{0{,}25} = 1$$

Os dois requisitos estão cumpridos

d) $$F(x) = P(X \leq x) = \underbrace{0{,}25 + 0{,}25 \times 0{,}75^1 + \cdots + 0{,}25 \times 0{,}75^x}_{x+1 \text{ TERMOS}} =$$

$$= 0{,}25 \times \frac{1-0{,}75^{x+1}}{1-0{,}75} = 1 - 0{,}75^{x+1} \quad , x = 0,1,2,\ldots$$

$$P(5 \leq X < 10) = P(5 < X \leq 10) - P(X=10) + P(X=5) =$$

$$= F(10) - F(5) - f(10) + f(5) =$$

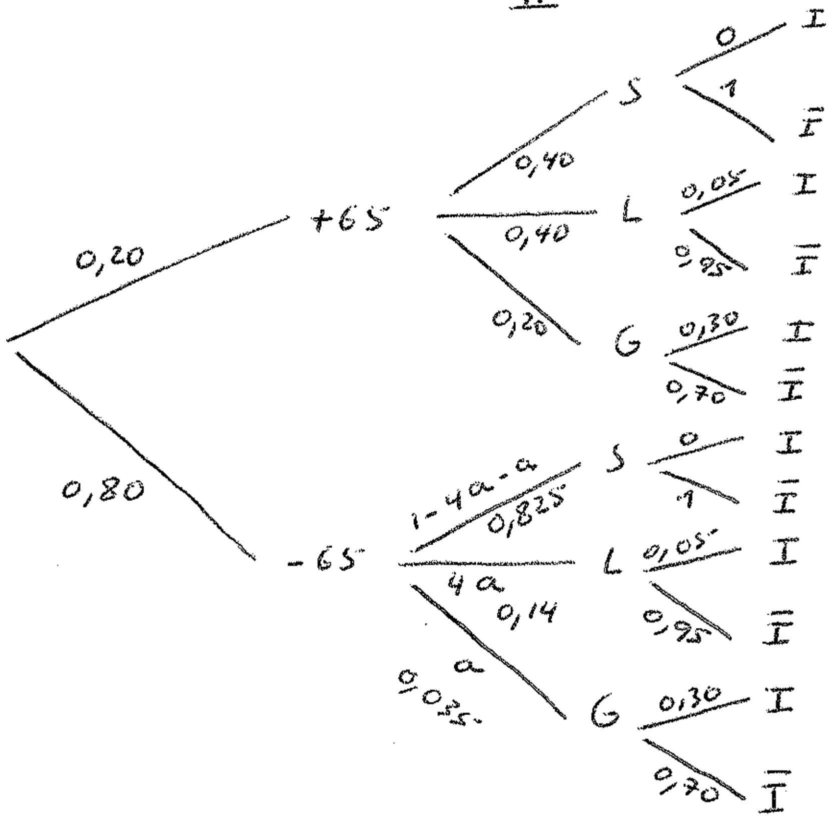
$$= (1-0{,}75^{11}) - (1-0{,}75^6) - 0{,}25 \times 0{,}75^{10} + 0{,}25 \times 0{,}75^5 =$$

$$= 0{,}95776 - 0{,}82202 - 0{,}01408 + 0{,}05933 = 0{,}18099$$

FCEE - ESTATÍSTICA I
2º TESTE, 2010/06/04

II

a)



$0{,}40 + 2\,P(G \mid +65) + P(G \mid +65) = 1$

$\Leftrightarrow P(G \mid +65) = \dfrac{1-0{,}40}{3} = 0{,}20$

$P(L \mid +65) = 2\,P(G \mid +65) = 2 \times 0{,}20 = 0{,}40$

$P(I) = 0{,}03$ [PARÁGRAFO INICIAL DO ENUNCIADO]

$P(I) = 0{,}20 \times 0{,}40 \times 0{,}05 + 0{,}20 \times 0{,}20 \times 0{,}30 +$

$+ 0{,}80 \times 4a \times 0{,}05 + 0{,}80 \times a \times 0{,}30 =$

$= 0{,}004 + 0{,}012 + 0{,}16a + 0{,}24a =$

$= 0{,}016 + 0{,}4a$

JUNTANDO AS DUAS CONDIÇÕES

$0{,}016 + 0{,}4a = 0{,}03 \Leftrightarrow 0{,}4a = 0{,}014 \Leftrightarrow a = 0{,}035$

$P(G \mid -65) = 0{,}035$

$P(L \mid -65) = 4 \times 0{,}035 = 0{,}14$

$P(S \mid -65) = 1 - 0{,}035 - 0{,}14 = 0{,}825$

b) $P(+65 \cap \bar{S}) = P(+65 \cap L) + P(+65 \cap G) =$

$= P(+65) \times P(L \mid +65) + P(+65) \times P(G \mid +65) =$

$= 0{,}20 \times 0{,}40 + 0{,}20 \times 0{,}20 = 0{,}08 + 0{,}04 = 0{,}12$

c) $P(I \mid +65) = ?$

$$P(I \mid +65) = \frac{P(+65 \cap L \cap I) + P(+65 \cap G \cap I)}{P(I)} =$$

$$= \frac{0{,}20 \times 0{,}40 \times 0{,}05 + 0{,}20 \times 0{,}20 \times 0{,}30}{0{,}03 \quad \text{(INFORMAÇÃO INICIAL)}} =$$

$$= \frac{0{,}004 + 0{,}012}{0{,}03} = \frac{0{,}016}{0{,}03} = 0{,}533(3)$$

d) $P(\text{MARIA INTERNADA}) = P(I \mid +65) = 0{,}40 \times 0{,}05 + 0{,}20 \times 0{,}30 =$

$= 0{,}08$

$P(\text{LEONOR INTERNADA}) = P(I \mid -65) = 0{,}14 \times 0{,}05 + 0{,}035 \times 0{,}30 =$

$= 0{,}0175$

$P(\text{MARIA INTERNADA} \cap \text{LEONOR INTERNADA}) = 0{,}08 \times 0{,}0175 = 0{,}0014$

e) Número de internamentos esperados:

$100 \times P(I \mid +65) = 100 \times 0{,}08 = 8$ pessoas

Custo dos internamentos:

$8 \times 2000 = 16000$ euros

A seguradora deve subir o seu preço em pelo menos:

$16000 - 6000 = 10000$ euros.

NOTA: A seguradora terá feito as contas pela probabilidade não condicionada do internamento, já que

$100 \times P(I) = 100 \times 0{,}03 = 3$ pessoas

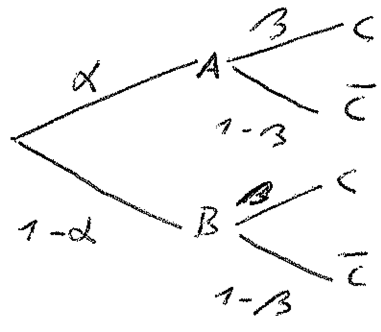
$3 \times 2000 = 6000$ euros

ESTATÍSTICA I

2º TESTE, 2010/06/04

III

1.



$P(C \mid A) = P(C \mid B) = \beta$

$$\begin{cases} \dfrac{\alpha \times \beta}{\alpha \times \beta + (1-\alpha)\times\beta} = 0{,}9 \\[2ex] \dfrac{(1-\alpha)\times\beta}{\alpha\times\beta + (1-\alpha)\times\beta} = 0{,}1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0{,}9 \\ 1-\alpha = 0{,}1 \end{cases}$$

% DA POPULAÇÃO TOTAL QUE VIVE EM A: 90%.
" " " " " " " B: 10%. > RESPOSTA, NECESSARIAM/ JUSTIFICADA

NOTA: Pode verificar-se que $P(A) = P(A \mid C)$ e $P(B) = P(B \mid C)$. Assim, ganhar em conhecimento ao saber $P(A)$ e $P(B)$. MAS NÃO GANHA EM REVER AS PROBABILIDADES JÁ QUE AS PROBABILIDADES À POSTERIORI SÃO IGUAIS ÀS PROBABILIDADES À PRIORI.

2. a) $F(x) = P(X \le x) = 1 - P(X > x) = 1 - (1 - 0{,}01x^2) = 0{,}01x^2$

$F(b) = 1 \Rightarrow 0{,}01b^2 = 1 \Leftrightarrow b^2 = 100 \Rightarrow b = 10$ [b é positivo]

b) $f(x) = \dfrac{dF(x)}{dx} = 0{,}02x \quad , \quad 0 < x < 10$

NOTA: b também pode ser obtido como:

$$\int_0^b f(x)\,dx = 1 \Rightarrow \int_0^b 0{,}02x\,dx = 1 \Leftrightarrow \left[0{,}01x^2\right]_0^b = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0{,}01b^2 = 1 \Rightarrow b = +\sqrt{100} = 10$$

3. $P(0{,}20 \le X \le 80) \ge 0{,}75$

PELO T. TCHEBYCHEV: $1 - \dfrac{1}{r^2} = 0{,}75 \Rightarrow r = 2$

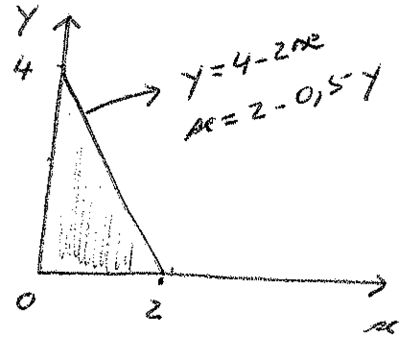
$$\begin{cases} \mu + 2\sigma = 0{,}80 \\ \mu - 2\sigma = 0{,}20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\mu = 1 \\ \text{—} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu = 0{,}5 \\ \sigma = 0{,}15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu = 0{,}5 \\ \sigma^2 = 0{,}0225 \end{cases}$$

FCEE - ESTATÍSTICA I

2° TESTE, 2010/06/04

IV

$$f(x,y) = \begin{cases} 0{,}25 & \begin{cases} 0 < x < 2 \\ 0 < y < 4 \\ y + 2x \leq 4 \end{cases} \\ 0 & \text{out. val. de } x, y \end{cases}$$



a) $$f_1(x) = \int_0^{4-2x} 0{,}25\, dy = \left[0{,}25\, y\right]_0^{4-2x} = 1 - 0{,}5\, x \quad , 0 < x < 2$$

$$E(X) = \int_0^2 x\,(1 - 0{,}5\,x)\, dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{0{,}5\,x^3}{3}\right]_0^2 = 2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3} = 0{,}666(6)$$

b) $$f(x \mid y=1) = \frac{f(x, y=1)}{f_2(y=1)}$$

$$f_2(y) = \int_0^{2-0{,}5y} 0{,}25\, dx = \left[0{,}25\, x\right]_0^{2-0{,}5y} = 0{,}5 - 0{,}125\, y \quad , 0 < y < 4$$

$$f(x \mid y=1) = \frac{0{,}25}{0{,}5 - 0{,}125} = \frac{0{,}25}{0{,}375} = 0{,}666(6) \quad , \quad 0 < x < 1{,}5$$

NOTA: $\begin{cases} x = 2 - 0{,}5y \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1{,}5$

$$E[x \mid y=1] = \int_0^{1{,}5} x \times 0{,}666(6)\, dx = \left[\frac{0{,}666(6)\, x^2}{2}\right]_0^{1{,}5} =$$

$$= 0{,}75 \neq E(X) \Rightarrow X \text{ e } Y \text{ não são independentes}$$

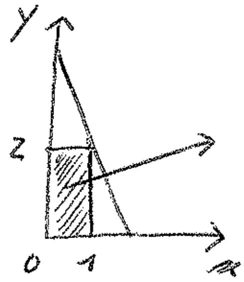
c) $F(x,y) = \int_0^{x}\left[\int_0^{y} 0{,}25\, dv\right] du =$

$= \int_0^{x}\left[0{,}25\, v\right]_0^{y} du = \int_0^{x} 0{,}25\, y\, du = \left[0{,}25\, y\, u\right]_0^{x} =$

$= 0{,}25\, y\, x = 0{,}25\, x\, y \quad , \quad \begin{cases} 0 < x < 2 \\ 0 < y < 4 \\ y + 2x \leq 4 \end{cases}$

$P(X < 1\, ,\, Y < 2) = F(2,1) = 0{,}25 \times 2 \times 1 = 0{,}5$

NOTA:



Valores para X e Y em que o produto não é destruído.

d) $E(W) = E(X^3 + 2Y) = E(X^3) + 2E(Y)$

$E(X^3) = \int_0^2 x^3 f_1(x)\, dx = \int_0^2 x^3(1 - 0{,}5x)\, dx = \int_0^2 (x^3 - 0{,}5x^4)\, dx =$

$= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{0{,}5x^5}{5}\right]_0^2 = \left[0{,}25x^4 - 0{,}1x^5\right]_0^2 = 4 - 3{,}2 = 0{,}8$

$2\, E(Y) = 2\int_0^4 y(0{,}5 - 0{,}125y)\, dy =$

$= 2\int_0^4 (0{,}5y - 0{,}125y^2)\, dy = \left[\frac{0{,}5y^2}{2} - \frac{0{,}125y^3}{3}\right]_0^4 \times 2 =$

$= 2 \times (4 - 2{,}666(6)) = 2{,}666(6) \approx 2{,}667$

$E(Z) = E(XY) = \int_0^2\left[\int_0^{4-2x} xy\, 0{,}25\, dy\right] dx = \int_0^2 \left[\frac{0{,}25\, x y^2}{2}\right]_0^{4-2x} dx =$

$= \int_0^2 \frac{0{,}25x}{2}(16 - 16x + 4x^2)\, dx = \int_0^2 (2x - 2x^2 + 0{,}5x^3)\, dx =$

$= \left[x^2 - \frac{2x^3}{3} + \frac{0{,}5x^4}{4}\right]_0^2 = 4 - \frac{16}{3} + 2 = \frac{18}{3} - \frac{16}{3} = \frac{2}{3}$