UNIVERSIDADE CATÓLICA PORTUGUESA

FACULDADE DE CIÊNCIAS ECONÓMICAS E EMPRESARIAIS

LICENCIATURAS EM ECONOMIA E GESTÃO

ESTATÍSTICA I

2° Teste - 14 de Janeiro de 2010

Responda em **folhas separadas para cada grupo**. Se eventualmente não fizer algum grupo, entregue em branco a folha respectiva devidamente identificada.

Explicite todas as hipóteses e os cálculos que tiver de fazer para a resolução dos problemas. Use um mínimo de **quatro** casas decimais. Leia cuidadosamente a totalidade de cada grupo antes de o responder.

Os grupos ou as perguntas podem não estar pela ordem em que a matéria foi leccionada. Um grupo pode incluir diferentes matérias.

I (6,0 valores)

O número de unidades procuradas mensalmente dos produtos X e Y de uma determinada empresa, é uma variável aleatória com a seguinte função de probabilidade conjunta $f(x,y)$:

		***Y* (Unidades procuradas do produto Y)**			
		0	2	4	6
***X* (unidades procuradas do produto X)**	0	0,05	0,10	0,15	0,20
	1	0,04	0,08	0,12	0,16
	2	0,01	0,02	0,03	0,04

a) O director de vendas da empresa está preocupado porque suspeita que, ao vender simultaneamente os dois produtos da empresa, quando o número de unidades procuradas de um dos produtos sobe, o número de unidades procuradas do outro produto desce.

   i) O director de vendas da empresa tem razão? (Justifique quantificadamente calculando o indicador adequado).

   ii) A empresa pretende agora separar as suas actividades por duas empresas, uma para o produto X e outra para o produto Y, para desta forma reduzir a variação das unidades procuradas conjuntas de X e de Y. Considera esta atitude correcta? Justifique.

b) A empresa conseguiu saber que no próximo mês não haverá procura do produto Y. Tendo em conta esta informação, calcule o valor esperado e a variância das unidades procuradas do produto X, a partir da função geradora de momentos.

c) Sabendo-se que o produto X é vendido a 2000 euros a unidade e o produto Y a 1000 euros a unidade, e que ambos têm um custo de produção de 500 euros por unidade,

   i) Qual a função de probabilidade do lucro mensal da empresa se esta produzir 1 unidade do produto X e 4 unidades do produto Y?

   ii) Qual o lucro que a empresa deverá esperar nas circunstâncias referidas em ci)?

II (8,0 valores)

O Sr. Anacleto é dono de um pequeno bar na praia da “Vaga”. Ele vai casar a sua filha Etelvina no final do ano de 2010 e declarou que o número de convidados dependeria do valor das vendas realizadas durante o Verão. Se o valor das vendas for menor ou igual a 26.000 euros convida apenas a família, caso contrário convida a família e os amigos.

As vendas do Restaurante dependem de duas variáveis independentes entre si: as temperaturas médias do Verão e a existência ou não de Bandeira Azul.

- Se o Verão estiver muito quente as vendas serão de 20.000 euros. Se o Verão estiver fresco as vendas serão de 15.000 euros.
- A existência de Bandeira azul proporciona um acréscimo de vendas, em relação aos resultados anteriores, de 5.000 euros.
- A probabilidade do Verão ser muito quente é de 0,6 e a probabilidade de a praia da Vaga ter Bandeira azul é de 0,5.

É possível que o Sr. Anacleto também faça vendas para a praia ao lado no valor de 10.000 euros. Se o Verão estiver muito quente a probabilidade de fazer estas vendas é de 0,7 enquanto que se o Verão for fresco esta probabilidade passa para 0,4.

Ainda, os primos da Etelvina prometem que no caso de não se conseguirem vendas na praia ao lado, e se o Verão estiver fresco, organizam um campeonato de surf que fará de certeza aumentar as vendas em 7.000 euros.

a) Represente a situação descrita através de um diagrama em árvore.

b) Sabendo-se que houve vendas para a praia ao lado, qual a probabilidade da praia da Vaga ter recebido Bandeira Azul?

c) Qual a probabilidade da Etelvina conseguir convidar os seus amigos para o casamento?

d) Sabendo-se que apenas a família foi convidada para o casamento, qual a probabilidade de o Verão ter estado muito quente?

e) Construa a função de probabilidade e calcule o valor esperado das vendas.

III (6,0 valores)

Considere a função densidade de probabilidade conjunta:

$$f(x,y) = \begin{cases} 1{,}5 - y \;, & \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1 \end{cases} \\ 0 & \text{outros valores de } x \text{ e de } y \end{cases}$$

a) Verifique que é, efectivamente, uma função densidade de probabilidade conjunta.

b) Calcule $P(X - Y > 0)$.

c) Calcule o valor esperado e a variância de Y.

d) Obtenha a função densidade condicional $f(y \backslash x)$. Calcule, a partir dela, $F(y \backslash x)$ e $P(Y \le 0{,}5 \backslash X = 0{,}25)$.

e) Calcule a covariância de (X,Y).

f) Determine a expressão da função de distribuição de probabilidade conjunta, apenas para a parte do domínio onde $f(x,y) \neq 0$.

GRUPO I

a) i) $cov(X,Y) = ?$

$$cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

$$E(XY) = \sum_x \sum_y xy\, f(x,y) =$$

$$= 0+0+0+0+0+(1\times 2)\times 0{,}08+(1\times 4)\times 0{,}12+(1\times 6)\times 0{,}16+$$

$$+0+(2\times 2)\times 0{,}02+(2\times 4)\times 0{,}03+(2\times 6)\times 0{,}04 =$$

$$= 0{,}16+0{,}48+0{,}96+0{,}08+0{,}24+0{,}48 = 2{,}4$$

$$E(X) = 0\times 0{,}50 + 1\times 0{,}40 + 2\times 0{,}10 = 0{,}60$$

$$E(Y) = 0\times 0{,}10 + 2\times 0{,}20 + 4\times 0{,}30 + 6\times 0{,}40 = 4$$

$$cov(X,Y) = 2{,}4 - 0{,}60\times 4 = 2{,}4 - 2{,}4 = 0$$

R: O director não tem razão pois a covariância entre as variáveis é nula.

VERIFICA-SE QUE X E Y SÃO INDEPENDENTES, POIS

$f(x,y) = f_1(x)\times f_2(y)$ para todos os valores do domínio.

ii) $V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2\,cov(X,Y) = V(X)+V(Y)$

porque $cov(X,Y)=0$

Não faz pois sentido separar as actividades.

b) $E(X \setminus Y=0) = ?$

$$f(X\setminus Y=0) = \begin{cases} 0{,}5 = \dfrac{0{,}05}{0{,}10} & , x=0 \\ 0{,}4 = \dfrac{0{,}04}{0{,}10} & , x=1 \\ 0{,}1 = \dfrac{0{,}01}{0{,}10} & , x=2 \\ 0 & \text{out. val de } x \end{cases}$$

Como são independentes,

$$f(X\setminus Y=0) = f_1(x)$$

$$E(X\setminus Y=0) = 0\times 0{,}5 + 1\times 0{,}4 + 2\times 0{,}10 = 0{,}60$$

$$M_x(t) = E[e^{tx}] = \sum_x e^{tx} f(x) =$$

$$= e^{t\times 0} \times 0{,}50 + e^{t\times 1} \times 0{,}40 + e^{t\times 2} \times 0{,}10 =$$

$$= 0{,}50 + 0{,}40 \times e^{t} + 0{,}10 \times e^{2t}$$

$$\frac{dM(t)}{dt} = 0{,}40 \times e^{t} + 0{,}20\, e^{2t}$$

$$\left.\frac{dM(t)}{dt}\right|_{t=0} = 0{,}40 + 0{,}20 = 0{,}60 = \mu_1' = \mu = E(X)$$

— " —

$$\frac{d^2M(t)}{dt^2} = 0{,}40\, e^{t} + 0{,}40\, e^{2t}$$

$$\left.\frac{d^2M(t)}{dt^2}\right|_{t=0} = 0{,}40 + 0{,}40 = 0{,}80 = \mu_2' = E(X^2)$$

— " —

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 0{,}80 - 0{,}60^2 = 0{,}80 - 0{,}36 = 0{,}44$$

c) Se produz 1 de X e 4 de Y este é o máximo que pode vender.

A probabilidade das unidades vendidas* passará a ser:

$f(x,y)^*$		0	2	4	6	$f_1(x)$
X	0	0,05	0,10	0,35		0,50
	1	0,05	0,10	0,35	—	
	2	—	—	—	—	—
$f_2(Y)$		0,10	0,20	0,70	—	1

VALOR DAS VENDAS = 2000 × x + 1000 × Y

		0	2000	4000	—	
X	0	0	2000	4000	—	
	2000	2000	4000	6000	—	
	—	—	—	—	—	

O CUSTO É SEMPRE 1 × 500 + 4 × 500 = 2500

LUCRO = 2000 × x + 1000 × Y − 25000

LUCRO	-2000	0	2000	—	
-500	-2500	-500	1500	—	
1500	-500	1500	3500	—	
—	—	—	—	—	

π = LUCRO

$$f(\pi) = \begin{cases} 0{,}05 & , \pi = -2500 \\ 0{,}15 & , \pi = -500 \\ 0{,}45 & , \pi = 1500 \\ 0{,}35 & , \pi = 3500 \\ 0 & \text{out. valores de } \pi \end{cases}$$

$$E(\pi) = -2500 \times 0{,}05 - 500 \times 0{,}15 + 1500 \times 0{,}45 + 3500 \times 0{,}35 =$$
$$= 1700$$

NOTA: Podia ser calculado separadamente para X e Y.

ESTATÍSTICA I, FCEE

2º TESTE, 2010.01.14

GRUPO II

A : VERÃO MUITO QUENTE

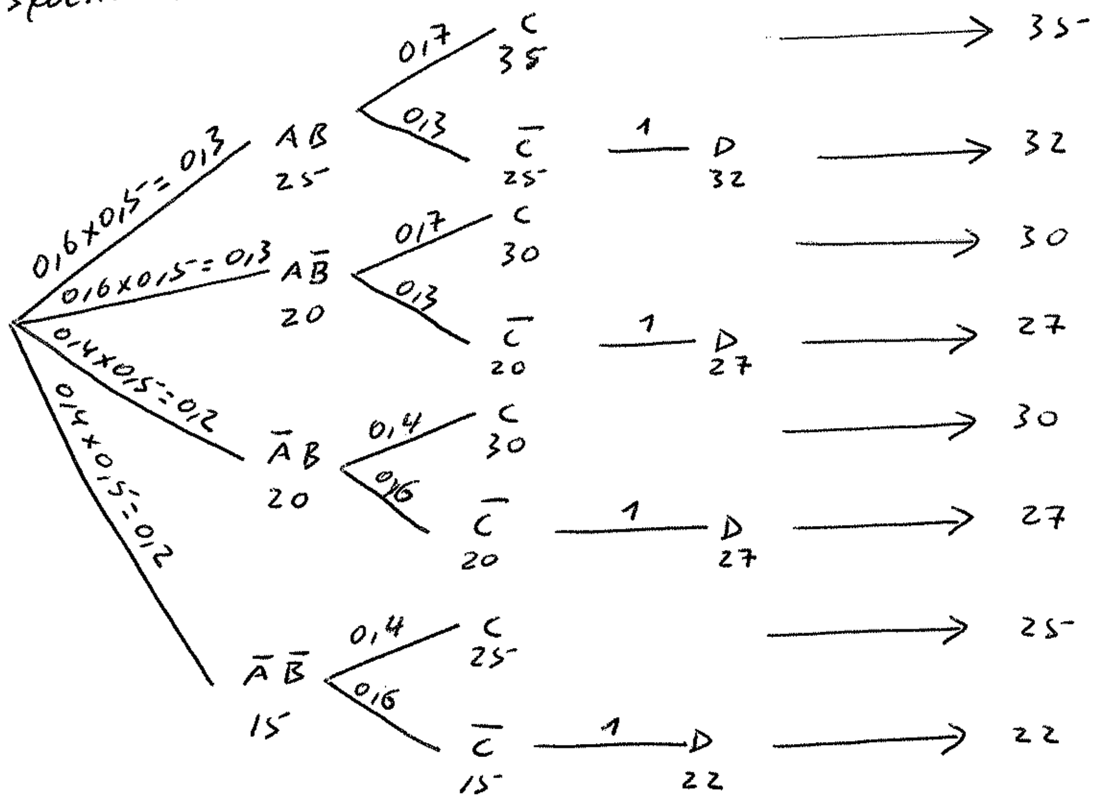
B : BANDEIRA AZUL

C : PRAIA AO LADO ENCOMENDA

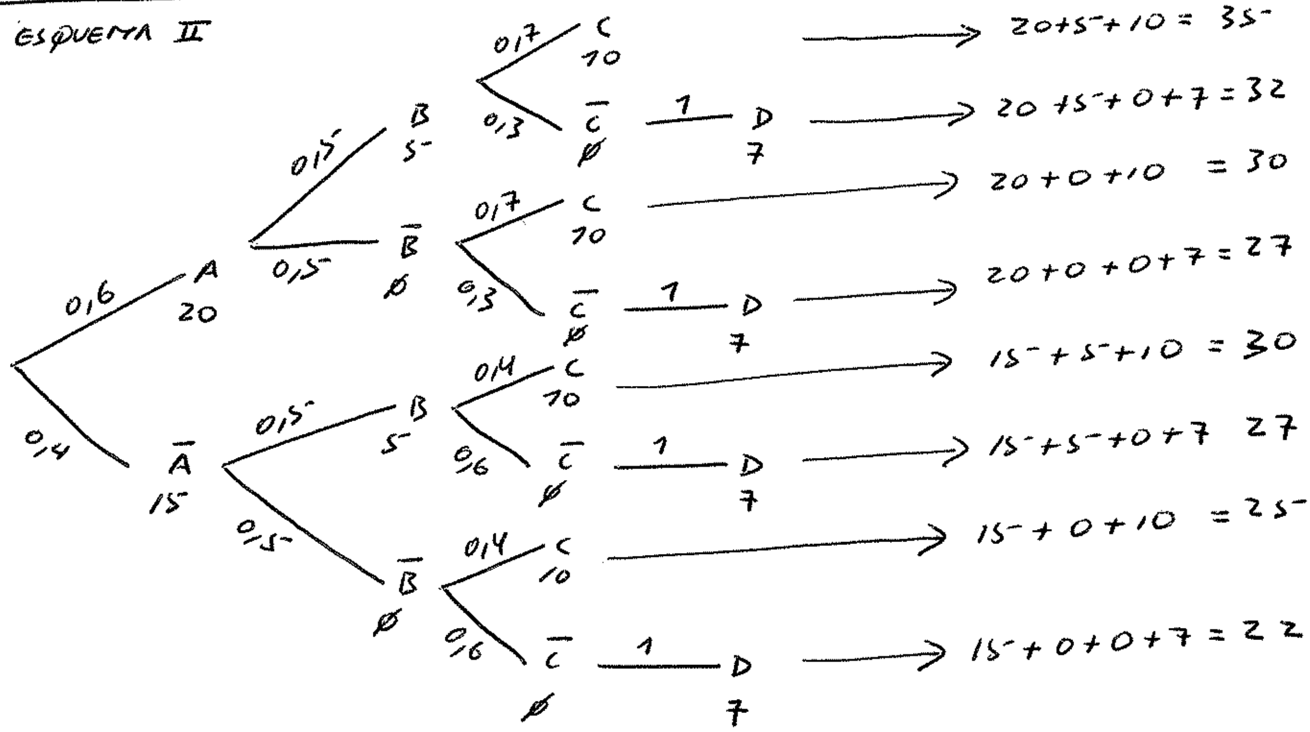
D : CAMPIONATO DE SURF

a)

ESQUEMA I



ESQUEMA II



b) $P(B \backslash c) = \dfrac{0{,}6 \times 0{,}5 \times 0{,}7 + 0{,}4 \times 0{,}5 \times 0{,}4}{\underline{0{,}6 \times 0{,}5 \times 0{,}7} + 0{,}6 \times 0{,}5 \times 0{,}7 + \underline{0{,}4 \times 0{,}5 \times 0{,}4} + 0{,}4 \times 0{,}5 \times 0{,}4} =$

$= \dfrac{0{,}21 + 0{,}08}{0{,}21 + 0{,}21 + 0{,}08 + 0{,}08} = \dfrac{0{,}29}{0{,}58} = 0{,}5$

c) $P(\text{VENDAS} > 26) = ?$

V: VENDAS	P(VENDAS)	
22	$0{,}2 \times 0{,}6 \times 1 =$	0,12
25	$0{,}2 \times 0{,}4 =$	0,08
27	$0{,}3 \times 0{,}3 \times 1 + 0{,}2 \times 0{,}6 \times 1 =$	0,21
30	$0{,}3 \times 0{,}7 + 0{,}2 \times 0{,}4 =$	0,29
32	$0{,}3 \times 0{,}3 \times 1 =$	0,09
35	$0{,}3 \times 0{,}7 =$	0,21
	SOMA:	1,00

d) $P(\text{FAMÍLIA SER CONVIDADA}) = P(V > 26) =$

$= 1 - P(V \leq 26) = 1 - 0{,}20 = 0{,}80$

$P(A \backslash V>26) = \dfrac{P(A \wedge V>26)}{P(V>26)} = \dfrac{P(A)}{P(V>26)} = \dfrac{0{,}6}{0{,}8} = 0{,}75$

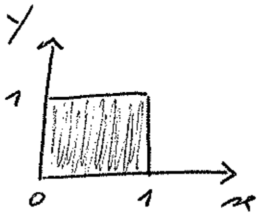
e) $E(V) = 22 \times 0{,}12 + 25 \times 0{,}08 + 27 \times 0{,}21 + 30 \times 0{,}29 +$

$+ 32 \times 0{,}09 + 35 \times 0{,}21 = 29{,}24$ MILHARES DE EUROS

ESTATÍSTICA I - FCEE
2º TESTE, 2010.01.14

GRUPO III

$$f(x,y) = \begin{cases} 1{,}5 - y & , \ 0 \le x \le 1, \ 0 \le y \le 1 \\ 0 & \text{out. val. de } x, y \end{cases}$$



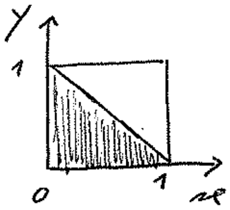
a) 1) $f(x,y) \geq 0$ para todos os valores de (x,y) onde está definida.

2) $$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy\,dx = \int_0^1 \left[\int_0^1 (1{,}5 - y)\,dy\right] dx =$$

$$= \int_0^1 \left[1{,}5y - \frac{y^2}{2}\right]_0^1 dx = \int_0^1 \left(1{,}5 - \frac{1}{2}\right) dx = \int_0^1 1\,dx = \left[x\right]_0^1 = 1$$

Estão pois cumpridos os dois requisitos para ser função densidade de probabilidade.

b)



$x + y < 1 \Leftrightarrow y < 1 - x \Leftrightarrow x < 1 - y$

↳ VER PÁG. SEGUINTE.

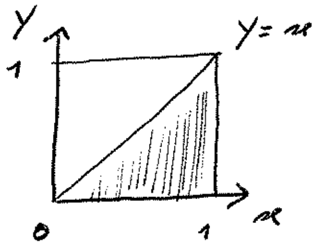
NOTA: VER b) NA PÁG. SEGUINTE. O CÁLCULO QUE ESTÁ NESTA PÁGINA NÃO É O PEDIDO

$$P(X + Y < 1) = \int_0^1 \left[\int_0^{1-x} (1{,}5 - y)\,dy\right] dx = \int_0^1 \left[1{,}5y - \frac{y^2}{2}\right]_0^{1-x} dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \left(3y - y^2\right)_0^{1-x} dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(3 - 3x - 1 + 2x - x^2\right) dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \left(2 - x - x^2\right) dx = \frac{1}{2}\left[2x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 =$$

$$= \frac{1}{2}\left(2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = \frac{12}{12} - \frac{3}{12} - \frac{2}{12} = \frac{7}{12}$$

b) 

$x - y > 0 \Leftrightarrow x > y$ ou $y < x$

$$P(X-Y>0) = P(Y<X) = \int_0^1 \left[\int_0^x (1{,}5 - y)\, dy \right] dx =$$

$$= \int_0^1 \left[1{,}5y - \frac{y^2}{2} \right]_0^x dx = \int_0^1 \left(1{,}5x - \frac{x^2}{2} \right) dx = \left[1{,}5 \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right]_0^1 =$$

$$= \frac{1{,}5}{2} - \frac{1}{6} = \frac{4{,}5 - 1}{6} = \frac{3{,}5}{6} = 5{,}8(3)$$

c) $f_1(x)=\int_{D_y} f(x,y)\,dy = \int_0^1 (1{,}5-y)\,dy = \left[1{,}5y - \frac{y^2}{2}\right]_0^1 =$

$= \left(1{,}5 - \frac{1}{2}\right) = 1 \longrightarrow f_1(x) = \begin{cases} 1 & , 0\le x \le 1 \\ 0 & \text{out. val. } x \end{cases}$

NÃO FOI PEDIDO NESTA ALÍNEA

$E(X) = \int_{D_x} x f_1(x)\,dx = \int_0^1 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$

$E(X^2) = \int_{D_x} x^2 f_1(x)\,dx = \int_0^1 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$

$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{4}{12} - \frac{3}{12} = \frac{1}{12}$

$f_2(y) = \int_{D_x} f(x,y)\,dx = \int_0^1 (1{,}5-y)\,dx = \left[1{,}5x - yx\right]_0^1 =$

$= 1{,}5 - y \longrightarrow f_2(y) = \begin{cases} 1{,}5 - y & , 0 \le y \le 1 \\ 0 & \text{out. val. } y \end{cases}$

NOTA: $\int_{D_y} f_2(y)\,dy = \int_0^1 (1{,}5y - y)\,dy = \left[1{,}5y - \frac{y^2}{2}\right]_0^1 = 1{,}5 - \frac{1}{2} = 1$

$E(Y) = \int_{D_y} y f_2(y)\,dy = \int_0^1 y(1{,}5-y)\,dy = \int_0^1 (1{,}5y - y^2)\,dy =$

$= \left[1{,}5\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1{,}5}{2} - \frac{1}{3} = \frac{4{,}5 - 2}{6} = \frac{2{,}5}{6} = 0{,}41(6)$ ou $\frac{5}{12}$

$E(Y^2) = \int_{D_y} y^2 f_2(y)\,dy = \int_0^1 y^2(1{,}5-y)\,dy = \int_0^1 (1{,}5y^2 - y^3)\,dy =$

$= \left[1{,}5\frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1{,}5}{3} - \frac{1}{4} = \frac{6-3}{12} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

$V(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 = \frac{1}{4} - \left(\frac{5}{12}\right)^2 = 0{,}25 - 0{,}1736(1) = 0{,}0763(8)$

NOTA: DETECTA-SE QUE $f(x,y) = f_1(x) \times f_2(y) \Rightarrow X$ e Y SÃO INDEPENDENTES!

d) $F(Y \backslash x) = P(Y \leq y \backslash x)$

$$f(Y \backslash x) = \frac{f(x,Y)}{f_1(x)} = \frac{1{,}5 - Y}{1} = 1{,}5 - Y$$

↳ VER c)

Verifica-se pois que $f(Y \backslash x) = f_2(Y) \Rightarrow X$ e Y são independentes

$$F(Y \backslash x) = \int_0^Y (1{,}5 - V)\,dV = \left[1{,}5V - \frac{V^2}{2}\right]_0^Y = 1{,}5Y - \frac{Y^2}{2}$$

$0 \leq Y \leq 1$

$$P(Y \leq 0{,}5 \backslash x = 0{,}25) = 1{,}5 \times 0{,}5 - \frac{0{,}5^2}{2} =$$

$$= 0{,}75 - \frac{0{,}25}{2} = 0{,}75 - 0{,}125 = 0{,}625$$

d)

NÃO FOI PEDIDO

$$f(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_2(y)} = \frac{1,5-y}{1,5-y} = 1 \quad , \quad 0 \leq x \leq 1$$

NOTA: Esta é outra forma de verificar a independência, já que $f(x|y) = f_1(x)$

$$P(X \leq 0,25 \mid Y = 0,5) = P(X \leq 0,25) = \int_0^{0,25} 1 \, dx = \left[x \right]_0^{0,25} = 0,25$$

e) $COV(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$

$$E(XY) = \int_0^1 \int_0^1 xy(1,5-y)\,dy\,dx = \int_0^1 \left[\int_0^1 (1,5xy - xy^2)\,dy \right] dx$$

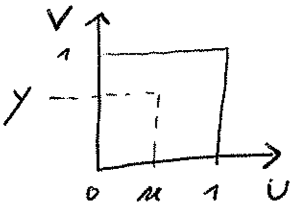
$$= \int_0^1 \left[1,5x\frac{y^2}{2} - x\frac{y^3}{3} \right]_0^1 dx = \int_0^1 \left(1,5\frac{x}{2} - \frac{x}{3} \right) dx =$$

$$= \left[1,5\frac{x^2}{4} - \frac{x^2}{6} \right]_0^1 = \frac{1,5}{4} - \frac{1}{6} = \frac{4,5}{12} - \frac{2}{12} = \frac{2,5}{12}$$

$$COV(X,Y) = \frac{\cancel{4,5}}{12} - \frac{1}{2} \times \frac{5}{12} = \frac{5}{24} - \frac{5}{24} = 0$$

Sendo as variáveis independentes podia-se logo apontar que $COV(X,Y) = 0$

f) $$F(x,y) = P(X \leq x;\ Y \leq y) = \int_0^x \left[\int_0^y (1,5-v)\,dv \right] du =$$



$$= \int_0^x \left[1,5v - \frac{v^2}{2} \right]_0^y du = \int_0^x \left(1,5y - \frac{y^2}{2} \right) du =$$

$$= \left[1,5yu - \frac{y^2}{2}u \right]_0^x = 1,5yx - \frac{y^2}{2}x =$$

$$= x\left(1,5y - \frac{y^2}{2}\right) \quad , \quad \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$$

NOTA: Podemos ver que $F(x,y) = x \times F_2(y)$

=//=