CATOLICA LISBON
SCHOOL OF BUSINESS & ECONOMICS

UNIVERSIDADE CATÓLICA PORTUGUESA

LICENCIATURAS EM ECONOMIA E GESTÃO

ESTATÍSTICA I - 2º TESTE - 8 DE JUNHO DE 2013

Responda em **folhas separadas para cada grupo**. Se não fizer algum grupo, entregue em branco a folha respectiva devidamente identificada, para efeitos de controlo. O teste deve ser efectuado a tinta.

Leia cuidadosamente a totalidade de cada grupo antes de o responder. Sempre que o enquadramento teórico o permite dê respostas mais simples.

Explicite todas as hipóteses e os cálculos que tiver de fazer para a resolução dos problemas. Use um mínimo de **quatro** casas decimais. Os grupos ou as perguntas podem não estar pela ordem em que a matéria foi leccionada. Um grupo pode incluir diferentes matérias.

O teste é constituído por quatro grupos.

I (7,0 valores)

Os registos do IMTT (Instituto de Mobilidade e Transporte Terrestre) mostram que todos os motoristas que circulam no IC 19 [via rápida que liga Lisboa a Sintra] cometem um de dois tipos de transgressões de trânsito, classificadas como tipo A e tipo B, não existindo evidência de nenhum caso em que o mesmo motorista cometa ambas as transgressões.

Sabe-se ainda que 80% das transgressões no IC 19 são do tipo B e que a probabilidade de um motorista cometer uma transgressão do tipo A e não ser multado é de 8%. Por outro, lado em 24% das situações, os motoristas cometem transgressões do tipo B e são multados.

a) Ilustre a situação descrita acima através de um diagrama em árvore que inclua as probabilidades em causa.

> Nota: Se não conseguir chegar a todas as probabilidades pedidas, arbitre valores coerentes para as probabilidades em falta na árvore pedida. A adequação da árvore e o uso da informação do texto inicial serão tomados em conta nas cotações das alíneas seguintes.

b) Qual a probabilidade de um motorista ser multado no IC19?

c) Um motorista foi multado no IC19. Qual a probabilidade de ter cometido a transgressão A? E a transgressão B?

d) Como designa os resultados de c) e como é que os relaciona com o teorema de Bayes? [Responda apenas por palavras].

Admita agora que as transgressões do tipo A, por serem mais difíceis de processar pela polícia, implicam um procedimento burocrático muito complexo, que faz com que a taxa de cobrança efetiva das respetivas multas seja três vezes menor do que a taxa de cobrança efetiva das transgressões de tipo B, acabando frequentemente por prescrever. Assim, apenas 25,2% dos motoristas do IC 19 acabam por pagar multa pelas suas transgressões.

e) Qual a probabilidade de uma transgressão do tipo A vir a ser paga? E do tipo B?

A multa de cada transgressão de tipo A rende 120 euros e a multa de cada transgressão de tipo B rende 40 euros.

f) Construa a função de probabilidade e calcule o valor esperado da receita efetiva que é obtida com cada multa.

II (6,0 valores)

Uma empresa produz dois bens, X e Y. Considere-se X o número de unidades produzidas, num dia, do bem X e Y o número de unidades produzidas, num dia, do bem Y, com a seguinte função de probabilidade conjunta:

Função de probabilidade conjunta *f(xi,yj)*

		Y [Produção diária de Y]		
		10	**15**	**20**
X [Produção diária de X]	**5**	0,05	0,20	0,15
	10	0,10	0,10	0,10
	15	0,05	0,20	0,05

Sabe-se ainda que $E(XY)=145$, $E(X)=9,5$ e $V(X)=17,25$

a) Serão X e Y independentes? Justifique.

b) Calcule o valor esperado da diferença entre as quantidades produzidas de X e de Y.

c) Num dia em que se produz 10 unidades de X qual a probabilidade da produção de Y ser igual ou superior a 15 unidades?

d) Qual o valor esperado da produção de Y nos dias em que se produz 5 unidades do bem X?

e) Construa a função de probabilidade acumulada conjunta de X e Y e, através desta, calcule a probabilidade de ambas as produções estarem entre a 10 unidades (exclusive) e 15 unidades (inclusive)?

Sabe-se que o custo total diário da empresa pode ser descrito como:

$CT = 100 + 2X + 4Y$

Onde:
- Custo fixo, independente da quantidade produzida = 100 €
- Custo de produção de cada unidade de $X = 2$ €
- Custo de produção de cada unidade de $Y = 4$ €

f) Qual o valor esperado e a variância do custo total diário desta empresa?

g) O preço [P] de venda do produto X é uma variável aleatória, independente da quantidade produzida, que pode assumir os valores 2, 4, 6, 8 e 10 euros, todos com a mesma probabilidade. Qual o valor esperado das receitas com a venda de X?

III (3,0 valores)

Numa determinada unidade fabril são produzidas componentes de aço de elevada resistência utilizadas na produção de automóveis. Admita que a obtenção das componentes anteriormente referidas passa por 2 processos distintos: i) a Fundição, usada para obter as componentes do motor e ii) a Soldagem, como forma de obter o formato desejado e unir a estrutura.

Sobre os tempos de trabalho em cada um desses processos sabe-se o seguinte:

$f(x) = \left(\frac{x}{4}\right)^3, \; 0 < x \leq 4$ em que X designa o tempo despendido na **Fundição** de cada componente, em horas, e $f(x)$ designa a função densidade de probabilidade da variável X.

$P(Y \geq y) = \frac{8-y^2-2y}{8}, \; 0 < y \leq 2$ em que Y designa o tempo despendido na **Soldagem** de cada componente, em horas.

Os tempos de trabalho em cada um desses processos de fabrico são variáveis aleatórias independentes uma da outra.

a) Calcule o valor esperado e a variância do tempo de Fundição de uma componente.

b) Calcule a mediana [x_m] para a variável X e interprete o valor obtido.

c) Qual a probabilidade de o tempo com a Soldagem duma componente estar entre 1 e 1,5 horas, sabendo que o tempo despendido com a Soldagem dessa componente foi inferior a 2 horas.

d) Qual a probabilidade de o tempo de Soldagem de uma componente ser inferior ao tempo de Fundição?

IV (4,0 valores)

Com o objectivo de analisar o impacto ecológico da produção do aço, a Associação Mundial do Aço analisa anualmente os dados disponibilizados pelas empresas que utilizam aço nos seus processo de fabrico. A informação diz respeito a dois indicadores:

X: Eficiência Energética, ou seja, energia consumida por tonelada de aço, medida em GJ [*Gigajoules*], para cada empresa

Y: Emissão de dióxido de carbono (CO_2), ou seja, CO_2 emitido por tonelada de aço, medido em toneladas, para cada empresa

Admita que estas variáveis seguem a seguinte função densidade de probabilidade conjunta:

$$f(x;y) = \frac{1}{765}x(x+y), \qquad 1 \leq x \leq 10; \quad 0 \leq y \leq 2$$

Nota: Nos cálculos pode facilitar manter em evidência $\frac{1}{765}$

a) Confirme que $f(x;y)$ é efetivamente uma função densidade de probabilidade.

Está em discussão legislação ambiental, a incidir sobre todas as empresas que utilizam aço no seu processo de fabrico. Foram propostos dois indicadores de controlo:

i. Limitação da energia consumida a um valor máximo de 4 GJ por tonelada de aço;

ii. Limitação da energia consumida a um valor máximo de 9 GJ por tonelada de aço e das emissões de CO_2 a 1,5 toneladas por tonelada de aço. [A empresa não pode exceder qualquer um destes limites].

Uma vez aprovada a legislação, as empresas terão de pagar uma coima [multa] sempre que ultrapassarem o limite imposto.

b) Calcule a probabilidade de pagar uma coima associada a cada um dos indicadores propostos (i e ii) e conclua sobre a opção mais vantajosa para as empresas deste sector.

c) Qual o valor esperado de emissões de CO_2 por tonelada de aço de uma empresa que consuma no seu processo de fabrico exactamente 8 GJ por tonelada de aço?

CATÓLICA LISBON

UNIVERSIDADE CATÓLICA PORTUGUESA

LICENCIATURAS EM ECONOMIA E GESTÃO

Estatística I - Formulário

$n > p$	$n = p$	Combinações Simples
Arranjos simples $A_p^n = \dfrac{n!}{(n-p)!}$	**Permutações Simples** $P_n = n!$	$C_p^n = \dfrac{n!}{(n-p)!\,p!}$
$n > p$	$n = p$	**Combinações Completas**
Arranjos Completos $\alpha_p^n = n^p$	**Permutações Completas** $P_n^{comp} = n^n$	$\beta_p^n = C_p^{n+p-1}$
	Permutações c/ Esquema de Partição $P_{n_1..n_k} = \dfrac{n!}{n_1!\,n_2!\ldots n_k!}$	

$$P\left(A_j \mid Z_k\right) = P\left(A_j\right) \times \frac{P\left(Z_k \mid A_j\right)}{\sum_i \left[P\left(A_i\right) \times P\left(Z_k \mid A_i\right)\right]}$$

$$f(x)=P(X=x) \qquad F(x)=P(X\le x)=\sum_{t\le x} f(t)$$

$$P(a<X\le b)=F(b)-F(a)$$

$$f(x,y)=P(X=x,Y=y)$$

$$F(x,y)=P(X\le x,Y\le y)=\sum_{s\le x}\sum_{t\le y} f(s,t)$$

$$P(x_1<X\le x_2,y_1<Y\le y_2)=F(x_2,y_2)-F(x_1,y_2)-F(x_2,y_1)+F(x_1,y_1)$$

$$f_1(x)=\sum_y f(x;y) \qquad f_2(y)=\sum_x f(x;y)$$

$$F_1(x)=P(X\le x;Y\le +\infty)=\sum_{s\le x} f(s)$$

$$F_2(y)=P(X\le +\infty;Y\le y)=\sum_{t\le x} f(t)$$

$$f(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_2(y)} \qquad f(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_1(x)}$$

$$P(a\le X\le b)=\int_a^b f(x)\,dx \qquad F(x)=P(X\le x)=\int_{u=-\infty}^{x} f(u)\,du$$

$$P[(X,Y)\in A]=\int_{x\in A}\left[\int_{y\in A} f(x,y)\,dy\right]dx$$

$$F(x,y)=P(X\le x;Y\le y)=\int_{u=-\infty}^{x}\left[\int_{v=-\infty}^{y} f(u,v)\;dv\right]du$$

$$\mathrm{f}_1(x)=\int_{Dy} f(x,y)\,dy \qquad \mathrm{f}_2(y)=\int_{Dx} f(x,y)\,dx$$

$$\mathrm{F}_1(x)=P[X\le x,Y\le +\infty]=\int_{-\infty}^{x} \mathrm{f}_1(u)\,du$$

$$\mathrm{F}_2(y)=P[X\le +\infty,Y\le y]=\int_{-\infty}^{y} \mathrm{f}_2(v)\,dv$$

$$\mu_X = E(X) = \sum_x x f(x) \qquad E\left[Z(X)\right] = \sum_x z(x) f(x)$$

$$\mu_X = E(X) = \int_{Dx} x f(x) dx \qquad E\left[Z(X)\right] = \int_{Dx} z(x) f(x) dx$$

$$\sigma_X^2 = V(X) = E(X^2) - \left[E(X)\right]^2$$

$$Cov\ (X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

$$E(XY) = \sum_i x_i y_i \times f(x_i, y_i) \qquad E(XY) = \sum_i \sum_j x_i y_j \times f(x_i, y_j)$$

$$E(XY) = \int_{Dx} \left[\int_{Dy} xy\, f(x,y) dy \right] dx$$

$$V(aX + bY) = a^2 V(X) + b^2 V(Y) + 2ab\, Cov(XY)$$

$$\rho_{xy} = \frac{Cov\ (X,Y)}{\sigma_x \sigma_y}$$

$$P\left[\mu_X - r\ \sigma_X < X < \mu_X + r\ \sigma_X\ \right] \geq 1 - \frac{1}{r^2}$$

$$E\left[X^r\right] = \mu_r' \qquad E\left[x - \mu_x\right]^r = \mu_r$$

$$E\ \left[X^r Y^s\ \right] = \mu_{r,s}' \qquad E\left[(x - \mu_x)^r (y - \mu_y)^s\right] = \mu_{r,s}$$

$$M_X(t) = E\left(e^{tx}\right)$$

$$e^{tx} = 1 + tx + \frac{t^2 x^2}{2!} + \cdots + \frac{t^r x^r}{r!} + \cdots$$

Nota: O formulário não é exaustivo e não esgota todos os tratamentos estatísticos possíveis.

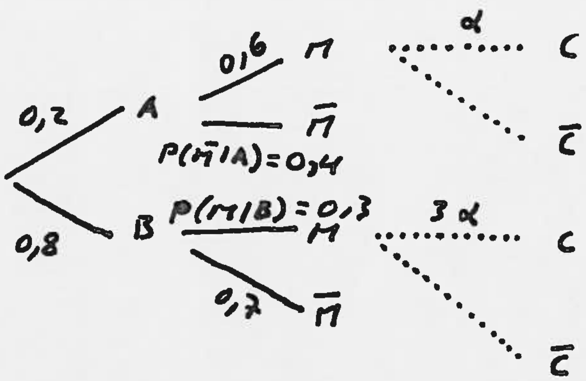
ESTATÍSTICA I

2° T, 2013.06.08

EST. I, 2°T, 2013.06.08

I

a)



A : TRANSGRESSÃO TIPO A
B : " " B
M : MULTA
C : COBRANÇA DA MULTA

$P(B)=0,8 \qquad P(A)=1-P(B)=0,2$

$P(A\cap\bar{M}) = P(A)\times P(\bar{M}|A) = 0,08 \Rightarrow 0,2\times P(\bar{M}|A)=0,08 \Leftrightarrow P(\bar{M}|A) =$

$= \dfrac{0,08}{0,2} = 0,4$

$P(B\cap M) = P(B)\times P(M|B) = 0,24 \Rightarrow 0,8\times P(M|B) = 0,24 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(M|B) = \dfrac{0,24}{0,8} = 0,3$

b) $P(M) = 0,2\times 0,6 + 0,8\times 0,3 = 0,12 + 0,24 = 0,36$

c) $P(A|M) = \dfrac{P(A\cap M)}{P(M)} = \dfrac{P(A)\times P(M|A)}{P(M)} = \dfrac{0,2\times 0,6}{0,36} = \dfrac{0,12}{0,36} = 0,3333$

$P(B|M) = \dfrac{P(B\cap M)}{P(M)} = \dfrac{P(B)\times P(M|B)}{P(M)} = \dfrac{0,8\times 0,3}{0,36} = \dfrac{0,24}{0,36} = 0,6667$

d) $P(A|M)$ e $P(B|M)$ são probabilidades à posteriori. São calculadas, através do teorema de Bayes, partindo das probabil. à priori. (em a) e b) calculámos probabilidades à priori).

e) $P(C) = 0,2\times 0,6\times\alpha + 0,8\times 0,3\times 3\alpha = 0,252 \Leftrightarrow 0,12\,\alpha + 0,72\,\alpha = 0,252 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 0,84\,\alpha = 0,252 \Leftrightarrow \alpha = 0,3$

$P(C|A\cap M) = 0,3 \qquad P(C|B\cap M) = 0,9$

$P(C|A) = \dfrac{0,2\times 0,6\times 0,3}{0,2} = 0,18$

$P(C|B) = \dfrac{0,8\times 0,3\times 0,9}{0,8} = 0,27$

f) X: RECEITA OBTIDA COM CADA MULTA

$x = 0 \; ; \; 40 \; ; \; 120$

$$f(x=0) = \frac{0{,}2 \times 0{,}6 + 0{,}7 + 0{,}8 \times 0{,}3 \times 0{,}1}{0{,}36} = \frac{0{,}108}{0{,}36} = 0{,}3$$

$$f(x=40) = \frac{0{,}8 \times 0{,}3 \times 0{,}9}{0{,}36} = \frac{0{,}216}{0{,}36} = 0{,}6$$

$$f(x=120) = \frac{0{,}2 \times 0{,}6 \times 0{,}3}{0{,}36} = \frac{0{,}036}{0{,}36} = 0{,}1$$

ou

$$f(x) = \begin{cases} 0{,}3 & , x = 0 \\ 0{,}6 & , x = 40 \\ 0{,}1 & , x = 120 \\ 0 & , \text{out. val. de } x \end{cases}$$

$$E(X) = \sum x f(x) = 0 \times 0{,}3 + 40 \times 0{,}6 + 120 \times 0{,}1 = 36 \text{ EUROS}$$

II

$$f(x) = \begin{cases} 0{,}40 & , x = 5 \\ 0{,}30 & , x = 10 \\ 0{,}30 & , x = 15 \end{cases}$$

$E(X) = 5 \times 0{,}4 + 10 \times 0{,}3 + 15 \times 0{,}3 = 9{,}5$

$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$

$E(X^2) = 5^2 \times 0{,}4 + 10^2 \times 0{,}3 + 15^2 \times 0{,}3 = 107{,}5$

$V(X) = 107.5 - 9{,}5^2 = 17{,}25$

$$f(y) = \begin{cases} 0{,}20 & , y = 10 \\ 0{,}50 & , y = 15 \\ 0{,}30 & , y = 20 \end{cases}$$

$E(Y) = 10 \times 0{,}2 + 15 \times 0{,}5 + 20 \times 0{,}3 = 15{,}5$

$E(Y^2) = 10^2 \times 0{,}2 + 15^2 \times 0{,}5 + 20^2 \times 0{,}3 = 252{,}5$

$V(Y) = 252{,}5 - 15{,}5^2 = 12{,}25$

$E(XY) = \sum_i \sum_j x_i \, y_j \; f(x_i, y_j) = 145$

$5 \times 10 \times 0{,}05 = 2{,}5$

$5 \times 15 \times 0{,}20 = 15{,}0$

$5 \times 20 \times 0{,}15 = 15{,}0$

$10 \times 10 \times 0{,}10 = 10{,}0$

$10 \times 15 \times 0{,}10 = 15{,}0$

$10 \times 20 \times 0{,}10 = 20{,}0$

$15 \times 10 \times 0{,}05 = 7{,}5$

$15 \times 15 \times 0{,}20 = 45{,}0$

$15 \times 20 \times 0{,}05 = 15{,}0$

$145{,}0$

a) POSSÍVEL REQUISITO DE INDEPENDÊNCIA:

$f(x_i, y_j) = f_1(x_i) \times f_2(y_j)$ para todos os x_i, y_j do domínio

POR EXEMPLO:

$f(x=5, y=10) = 0{,}05$

$f_1(x=5) \times f_2(y=10) = 0{,}4 \times 0{,}2 = 0{,}08$

$\neq s$

Estes valores são diferentes pelo que X e Y não são independentes b)

$Z = X - Y$

$X-Y$	Y: 10	15	20
X 5	-5	-10	-15
10	0	-5	-10
15	5	0	-5

$$f(z) = \begin{cases} 0{,}15, & z = -15 \\ 0{,}30 & z = -10 \\ 0{,}20 & z = -5 \\ 0{,}05 & z = 5 \\ 0{,}30 & z = 0 \end{cases}$$

$\overline{}$ 1,00

$E(Z) = -15 \times 0{,}15 - 10 \times 0{,}3 - 5 \times 0{,}20 + 5 \times 0{,}05 + 0 \times 0{,}30 = -6$

ou $E(X-Y) = E(X) - E(Y) = 9{,}5 - 15{,}6 = -6$

c) $P(Y \geq 15 \mid X = 10) = \dfrac{P(X=10, Y \geq 15)}{P(X=10)} = \dfrac{0{,}10 + 0{,}10}{0{,}30} = 0{,}666(6)$

d) $E(Y \mid X = 5) = 10 \times \dfrac{0{,}05}{0{,}4} + 15 \times \dfrac{0{,}20}{0{,}40} + 20 \times \dfrac{0{,}15}{0{,}4} = \dfrac{6{,}5}{0{,}4} = 16{,}25$

$= \sum_j y_j \, f(y_j \mid x = 5)$

e)

$F(x,y)$	Y: 10	15	20
X 5	0,05	0,25	0,40
10	0,15	0,45	0,70
15	0,20	0,70	1

$P(10 < X \leq 15;\ 10 < Y \leq 15) = F(15,15) - F(15,10) - F(10,15) + F(10,10) =$

$= 0{,}70 - 0{,}20 - 0{,}45 + 0{,}15 = 0{,}20$

f) $CT = 100 + 2X + 4Y$

$E(CT) = E(100 + 2X + 4Y) = 100 + E(Y) + 4E(Y) =$

$= 100 + 2 \times 9{,}5 + 4 \times 15{,}5 = 181$

$V(CT) = 2^2 V(X) + 4^2 V(Y) + 2 \times 2 \times 4 \, \mathrm{cov}(X,Y) =$

$= 4 \times 17{,}25 + 16 \times 12{,}25 + 16 \times (145 - 9{,}5 \times 15{,}5) = 229$

g) $f(P_x) = \begin{cases} 1/5 & , P_x = 2; 4; 6; 8; 10 \\ 0 & , \text{outros valores} \end{cases}$

$E(P_x X) = ?$

As variáveis são independentes, pelo que

$E(P_x X) = E(P_x) E(X)$

$E(P_x) = \dfrac{2+4+6+8+10}{5} = \dfrac{30}{5} = 6$

$E(P_x X) = 9{,}5 \times 6 = 57$

III

$$f(x) = \begin{cases} \left(\frac{x}{4}\right)^3 & , 0 < x \leq 4 \\ 0 & , \text{out. val. } x \end{cases}$$

NOTA: $\int_{D_x} f(x)\,dx = \int_0^4 \left(\frac{x}{4}\right)^3 dx = \frac{1}{4^3}\int_0^4 x^3\,dx =$

$$= \frac{1}{4^3}\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^4 = \frac{1}{4^3} \times \frac{4^4}{4} = \frac{4^3}{4^3} = 1$$

a) $E(X) = \int_{D_x} x f(x)\,dx = \int_0^4 x\left(\frac{x^3}{4}\right)dx = \frac{1}{4^3}\int_0^4 x^4\,dx =$

$$= \frac{1}{4^3}\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^4 = \frac{1}{4^3} \times \frac{4^5}{5} = \frac{4^2}{5} = \frac{16}{5} = 3{,}2 \text{ HORAS}$$

$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$

$E(X^2) = \int_{D_x} x^2 f(x)\,dx = \int_0^4 x^2\left(\frac{x^3}{4}\right)dx = \frac{1}{4^3}\int_0^4 x^5\,dx =$

$$= \frac{1}{4^3}\left[\frac{x^6}{6}\right]_0^4 = \frac{1}{4^3} \times \frac{4^6}{6} = \frac{4^3}{6} = 10{,}666(6)$$

$V(X) = 10{,}666(6) - 3{,}2^2 = 0{,}4266(6)$

b) $\int_0^{x_m} f(x)\,dx = 0{,}5 \Rightarrow x_m = \text{mediana}$

$$\int_0^{x_m}\left(\frac{x}{4}\right)^3 dx = \frac{1}{4^3}\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^{x_m} = \frac{1}{4^3} \times \frac{x_m^4}{4} = \frac{x_m^4}{4^4}$$

$$\frac{x_m^4}{4^4} = 0{,}5 \Leftrightarrow x_m = \sqrt[4]{0{,}5 \times 4^4} = 4\sqrt[4]{0{,}5} = 3{,}363586$$

METADE DAS COMPONENTES DEMORAM MENOS DE 2,28284 HORAS A FUNDIR

OU $F(x) = P(X \leq x) = \int_0^x \left(\frac{u}{4}\right)^3 du = \frac{1}{4^3}\left[\frac{u^4}{4}\right]_0^x = \frac{x^4}{4^4}, \quad 0 < x \leq 4$

$F(x) = 0{,}5 \Rightarrow \frac{x^4}{256} = 0{,}5 \Leftrightarrow x = \sqrt[4]{128} = 3{,}363586$

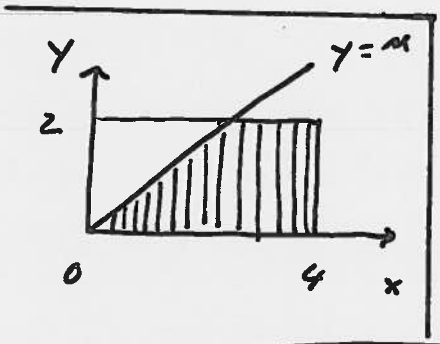
III (cont.)

c) $P(1<Y<1{,}5 \mid Y<2) = P(1<Y<1{,}5)$

$P(1<Y<1{,}5) = P(Y>1) - P(Y>1{,}5)$

$$= \frac{8-1-2}{8} - \frac{8-1{,}5^2-2\times 1{,}5}{8} = \frac{5}{8} - \frac{2{,}75}{8} = 0{,}28125$$

d) $P(Y<X) = \int_0^2 \left[\int_y^4 f(x,y)\,dx\right] dy =$



$F(Y\le y) = 1 - F(Y>y) = 1 - \left(\frac{8-y^2-2y}{8}\right) = \frac{y^2}{8} + \frac{y}{4}, \quad 0<y\le 2$

NOTA: Como Y é v.a contínua $F(Y\ge y) = F(Y>y)$

$f(y) = \frac{dF(y)}{dy} = \frac{y}{4} + \frac{1}{4}, \quad 0<y\le 2$

$f(x,y) = f_1(x) f_2(y) = \frac{x^3}{64} \times \left(\frac{y}{4} + \frac{1}{4}\right) = \frac{x^3 y}{256} + \frac{x^3}{256}$

PQ SÃO INDEPENDENTES

$\cancel{0<x\le 4,\ 2<y\le 2}$

$$= \int_0^2 \left[\int_y^4 \frac{x^3 y}{256} + \frac{x^3}{256}\,dx\right] dy = \frac{1}{256}\int_0^2 \left[\frac{x^4 y}{4} + \frac{x^4}{4}\right]_y^4 dy =$$

$$= \frac{1}{256}\int_0^2 \left(64y + 64 - \frac{y^5}{4} - \frac{y^4}{4}\right) dy = \frac{1}{256}\left[\frac{64y^2}{2} + 64y - \frac{y^6}{24} - \frac{y^5}{20}\right]_0^2 =$$

$$= \frac{1}{256}\left(128 + 128 - \frac{64}{24} - \frac{32}{20}\right) = 0{,}98(3)$$

IV

$$f(x,y)=\frac{1}{765}x(x+y) \quad , \quad 1\le x\le 10 \;;\; 0\le y\le 2$$

a)
$$\int_1^{10}\left[\int_0^2 \frac{1}{765}\,x(x+y)\,dy\right]dx = \frac{1}{765}\int_1^{10}\left[\int_0^2 (x^2+xy)\,dy\right]dx =$$

$$= \frac{1}{765}\int_1^{10}\left[x^2y+\frac{xy^2}{2}\right]_0^2 dx = \frac{1}{765}\int_1^{10}(2x^2+2x)\,dx =$$

$$= \frac{1}{765}\left[\frac{2x^3}{3}+x^2\right]_1^{10} = \frac{1}{765}\left(\frac{2\times 1000}{3}+100-\frac{2}{3}-1\right)=\frac{1}{765}\times 765 = 1$$

NOTAS:

$$f_1(x)=\int_0^2\frac{1}{765}(x^2+xy)\,dy = \frac{1}{765}\left[x^2y+x\frac{y^2}{2}\right]_0^2 =$$

$$= \frac{1}{765}(2x^2+2x) \quad , \quad 1\le x\le 10$$

$$\int_{D_x} f_1(x)\,dx = \int_1^{10}\frac{1}{765}(2x^2+2x)\,dx = \frac{1}{765}\left[\frac{2x^3}{3}+x^2\right]_1^{10} =$$

$$= \frac{1}{765}\left(\frac{2\times 1000}{3}+100-\frac{2}{3}-1\right)=\frac{1}{765}\times 765 = 1$$

$$f_2(y)=\int_1^{10}\frac{1}{765}(x^2+xy)\,dx = \frac{1}{765}\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2y}{2}\right]_1^{10} =$$

$$= \frac{1}{765}\left(\frac{1000}{3}+50y-\frac{1}{3}-\frac{y}{2}\right) = \frac{1}{765}\left(333+99\frac{y}{2}\right) \quad , \quad 0\le y\le 2$$

$$\int_{D_y} f_2(y)\,dy = \int_0^2\frac{1}{765}\left(333+99\frac{y}{2}\right)dy = \frac{1}{765}\left[333y+\frac{99y^2}{4}\right]_0^2 =$$

$$= \frac{1}{765}(666+99) = \frac{1}{765}\times 765 = 1$$

9.

b) i) $P(X>4) = 1 - P(X \le 4) = = \int_1^4 \frac{1}{765}(2x^2+2x)\,dx =$

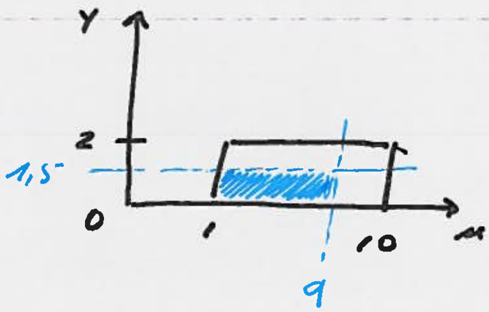
$= 1 - \frac{1}{765}\left[\frac{2x^3}{3} + x^2\right]_1^4 = 1 - \frac{1}{765}\left(2\times\frac{64}{3} + 16 - \frac{2}{3} - 1\right) =$

$= 1 - 0,07451 = 0,92549$

ou

$P(X>4) = \int_4^{10}\left[\int_0^2 \frac{1}{765}\, x(x+y)\,dy\right]dx$

ii)



$P(1<X<9\,;\,0<Y<1,5) = \int_1^9\left[\int_0^{1,5}\frac{1}{765}\, x(x+y)\,dy\right]dx =$

$= \frac{1}{765}\int_1^9\left[\int_0^{1,5}(x^2+xy)\,dy\right]dx = \frac{1}{765}\int_1^9\left[x^2y + x\frac{y^2}{2}\right]_0^{1,5}dx =$

$= \frac{1}{765}\int_1^9 (1,5x^2 + 1,125x)\,dx = \frac{1}{765}\left[\frac{1,5x^3}{3} + \frac{1,125x^2}{2}\right]_1^9 =$

$= \frac{1}{765}\left[0,5x^3 + 0,5625x^2\right]_1^9 = \frac{1}{765}(410,0625 - 1,0625) =$

$= \frac{409}{765} = 0,53464$

$1 - P(1<X<10\,;\,0<Y<1,5) = 1 - 0,53464 = 0,46536$

A probabilidade de a pagar multa é maior p/ o primeiro indicador de controlo. O indicador ii) é mais vantajoso para a empresa.

c) $E(Y \mid X=8) = ?$

$$f(Y \mid x=8) = \frac{\frac{1}{765}\, x(x+y)}{\frac{1}{765}\,(2x^2+2x)} = \frac{x(x+Y)}{2x^2+2x} \quad , \quad 0 < y \leq 2$$

$$f(Y \mid x=8) = \frac{64+8Y}{144} = 0{,}44(4) + 0{,}05(5)\,Y \quad , \quad 0 < Y \leq 2$$

$$E(Y \mid x=8) = \int_0^2 Y\left(0{,}44(4) + 0{,}0555(5)\,y\right) dy =$$

$$= \left[0{,}44(4)\frac{Y^2}{2} + 0{,}0555(5)\frac{Y^3}{3}\right]_0^2 = 1{,}03704 \text{ TONELADAS}$$