

**LICENCIATURAS EM ECONOMIA E GESTÃO**  
**ESTATÍSTICA I - 1º TESTE - 4 DE ABRIL DE 2012**

Responda em **folhas separadas para cada grupo**. Se não fizer algum grupo, entregue em branco a folha respectiva devidamente identificada, para efeitos de controlo. O teste deve ser efectuado a tinta.

**Leia cuidadosamente a totalidade de cada grupo antes de o responder.**

Explicite todas as hipóteses e os cálculos que tiver de fazer para a resolução dos problemas. Use um mínimo de **quatro** casas decimais. Os grupos ou as perguntas podem não estar pela ordem em que a matéria foi leccionada. Um grupo pode incluir diferentes matérias.

O teste é constituído por quatro grupos.

## I (6,0 valores)

Durante os três meses de férias de Verão, a Cristina decidiu investir as suas poupanças num negócio de venda de toalhas, raquetes e bolas na praia. Para testar a reacção da procura, decidiu variar mensalmente os preços dos 3 bens. A informação conhecida sobre os preços e as quantidades vendidas dos três bens encontra-se na tabela seguinte:

t	Toalhas		Raquetes		Bolas	
	Preço	Quantidade	Preço	Quantidade	Preço	Quantidade
Mês 1	5	100	5	150	5	100
Mês 2	8	?	4	?	7	?
Mês 3	10	200	2	100	5	100

- Sabe-se ainda que, entre o mês 1 e o mês 2, as receitas do negócio relativas a estes três bens aumentaram 10%.

- a) Qual a taxa média de crescimento do preço das toalhas entre o mês 1 e o mês 3?
- b) i) Calcule o Índice de Paasche para a variação das quantidades, para cada um dos três meses, com base no mês 1. Interprete.
- ii) Partindo dos resultados de b) i), calcule um índice de quantidades para o mês 3 com base no mês 2 e indique o pressuposto que teve de utilizar nesse cálculo. O resultado obtido é um índice de Paasche? Justifique analiticamente.

Entretanto descobriu que a Cristina também tinha vendido sombrinhas durante o Verão, tendo sabido também que:

- O índice de preços simples das sombrinhas no mês 2, com base no mês 1, foi de 0,50.
- O índice de preços simples das sombrinhas no mês 3, com base no mês 2, foi de 1,75.
- O  $I_{2/1}^P(L)$  para os quatro bens foi de 0,90.
- A contribuição de cada bem para a receita total no mês 2 foi a seguinte:

	Toalhas	Raquetes	Bolas	Sombrinhas
% Receita Total	40%	16,7%	20,3%	23%

- c) Calcule o Índice de Laspeyres de preços para o mês 3, com base no mês 2, para os quatro bens, com base na informação já disponibilizada relevante.

Suponha agora que ficou também a saber que no mês 2 a Cristina teve uma receita de 2500 euros com os quatro bens, a qual aumentou 15% no mês 3 face ao mês 2.

- d) Qual o valor do total da receita dos quatro bens:
- i) No mês 3 e no mês 2, a preços constantes do mês 1 [usando os índices já calculados ou disponibilizados];
- ii) No mês 1, a preços constantes do mês 1 [cálculo exacto].

## II (6,0 valores)

A Universidade **A** está a organizar uma viagem de formação para os alunos da cadeira de Negócios Internacionais do MBA. Todos os alunos que decidam participar terão de pagar um mesmo valor, “preço”, por esta viagem. A Universidade tem de estabelecer este preço para depois, em função dele, definir o programa da viagem.

Para apoiar a sua tomada de decisão resolveu proceder à realização de um inquérito aos 100 alunos dessa cadeira. Neste inquérito pergunta-se o preço que o aluno está disposto a pagar pela viagem (na pressuposição de que para um preço superior ao referido o aluno decide não participar na viagem).

Os dados apurados, relativos aos 100 alunos inquiridos, foram os seguintes:  
 $X$  = Preço que o aluno da Universidade **A** está disposto a pagar pela viagem

$X = \text{Preço}$ (em milhares de euros)	$f_i$
[10 – 12]	0,20
[12 – 14]	0,25
[14 – 16]	0,15
[16 – 20]	0,30
[20 – 24]	0,10

- a) Represente graficamente as frequências absolutas simples da variável  $X$  através de um Histograma adequado. Determine graficamente a Moda e calcule analiticamente o seu valor, comentado o seu significado neste caso concreto.
- b) Calcule a Mediana da variável  $X$  e comente o seu significado neste caso concreto.
- c) O responsável da agência de viagens contactada pela Universidade, que teve acesso aos resultados do inquérito, afirma que o preço a fixar não deve ser o preço médio, uma vez que este afastaria da viagem a maioria dos alunos. Concorda com esta afirmação? Justifique quantitativamente.

A Universidade **B** resolveu organizar de modo semelhante a sua viagem da cadeira de Negócios Internacionais. Os resultados obtidos foram os seguintes:

$Y = \text{Preço}$  (em milhares de euros) que o aluno da Universidade **B** está disposto a pagar pela viagem.

Indicadores da variável $Y$	Valor do indicador
Média	16,5
Variância	55
Mínimo	10
Máximo	27,5
Intervalo Interquartis	4,5
Coefficiente de Assimetria de Pearson	- 2

- d) Compare a dispersão das variáveis  $X$  e  $Y$  utilizando toda a informação disponível. [Proceda aos cálculos e use os indicadores que considerar necessários para a variável  $X$ ].
- e) O responsável da agência de viagens, que também foi contactado pela Universidade **B**, afirmou: “Curioso, na Universidade **B** os alunos estão dispostos a pagar mais pela viagem. Um preço de 16,3 excluía menos de metade dos alunos.” Comente esta afirmação.

### III (4,0 valores)

No ano de 2010, o parque de camiões de mercadorias por conta de outrem, de acordo com a idade e o peso bruto desses camiões, era o indicado no quadro abaixo.

PARQUE DE CAMIÕES DE MERCADORIAS POR CONTA DE OUTREM  
POR ESCALÕES DE IDADE E PESO BRUTO [ano de 2010]

		Variável X [idade, em anos]						Total
		] 0 – 5 ]	] 5 – 10 ]	] 10 – 15 ]	] 15 – 20 ]	] 20 – 30 ]	> 30	
Variável Y [peso bruto, em ,000 kg]	] 0 - 7,5 ]	457	535	659	272	250	11	2184
	] 7,5 -12 ]	560	633	519	327	159	6	2204
	] 12-19 ]	972	1197	1639	796	717	34	5355
	] 19-26 ]	621	800	1113	691	675	45	3945
	> 26	790	589	529	314	135	3	2360
	Informação insuficiente	163	39	33	17	11	0	263
Total		3563	3793	4492	2417	1947	99	16311

Fonte: IMTT - Instituto da Mobilidade e dos Transportes Terrestres, I.P.

- a) Indique, justificando, se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas:
- i) A ausência de informação sobre o peso dos camiões é independente da sua idade;
  - ii) Tomando em consideração todas as observações, apenas uma medida de tendência central pode ser calculada para ambas as variáveis  $X$  e  $Y$ ;
  - iii) Tomando em consideração todas as observações, sem fazer qualquer cálculo podemos concluir que as variáveis  $X$  e  $Y$  não são independentes.
- b) Calcule a covariância entre a variável  $X$  e a variável  $Y$ , para os camiões com 12 toneladas ou menos e 10 anos ou menos. Que conclusões é possível tirar com este cálculo?
- c) Pretendendo fazer o planeamento das inspecções aos camiões no ano de 2013, o departamento governamental competente solicitou-lhe para:
- i) Com base no quadro acima, calcular a probabilidade de um camião, escolhido ao acaso de entre todos os camiões, ter 7,5 toneladas ou menos;
  - ii) Com base no quadro acima, calcular a probabilidade de um camião, escolhido ao acaso de entre todos os camiões com mais de 30 anos, ter 7,5 toneladas ou menos;
  - iii) Referir a diferença conceptual entre as probabilidades pedidas em c) i) e c) ii)?
  - iv) Desenhar um diagrama de Venn que permita visualizar o cardinal [nº de elementos] dos acontecimentos em causa no cálculo de c) ii) e o seu enquadramento no total do parque de camiões.
  - v) Explicar por palavras a diferença entre uma frequência relativa considerada na estatística descritiva e uma probabilidade.

#### IV (4,0 valores)

No ano de 2010, a dimensão das empresas de transporte nacional rodoviário em veículos pesados de passageiros por conta de outrem, de acordo com o número de veículos da empresa, era a indicada no quadro abaixo, o qual tem também algumas informações adicionais.

TRANSPORTE NACIONAL RODOVIÁRIO EM VEÍCULOS PESADOS DE PASSAGEIROS POR CONTA DE OUTREM [ano de 2010]

	TRANSPORTE REGULAR				REGIME ESPECIAL OCASIONAL	
	URBANO		INTERURBANO			
DIMENSÃO DA EMPRESA POR Nº DE VEÍCULOS	Nº DE EMPRESAS	Nº DE VEÍCULOS	Nº DE EMPRESAS	Nº DE VEÍCULOS	Nº DE EMPRESAS	Nº DE VEÍCULOS
0 a 9	1	9	20	82	223	667
10 a 19	6	84	21	320	12	158
20 a 49	2	53	33	987	5	163
50 a 99	1	73	24	1723	--	--
100 a 199	2	234	8	1072	--	--
200 e mais	2	1082	9	3397	--	--
<b>Total</b>	<b>14</b>	<b>1535</b>	<b>115</b>	<b>7581</b>	<b>240</b>	<b>988</b>
Idade média dos veículos (em anos)		9,0		13,2		10,4

Fonte: IMTT - Instituto da Mobilidade e dos Transportes Terrestres, I.P.

Com base na informação do quadro disponibilizado acima:

- a) Quantifique o erro que ocorre no cálculo da média da dimensão, para o caso das empresas de **regime especial ocasional** de transporte, quando se consideram as classes indicadas para classificar as empresas de acordo com o número de veículos, ao invés de considerar os dados originais. Como se chama este tipo de erro?
- b) Calcule a **idade média da totalidade dos veículos dos três segmentos** (urbano, interurbano e regime especial ocasional).
- c) i) Compare, através de um indicador quantitativo, a concentração no segmento de transporte regular **urbano** com a concentração no segmento de transporte regular **interurbano**. Indique também em qual destes segmentos se verifica menor concorrência do ponto de vista económico.
- ii) Suponha que lhe foi dada a seguinte informação adicional: na última classe das empresas de transporte regular **urbano** a concentração que de facto se verifica é a concentração máxima compatível com os dados disponibilizados.
- Utilize esta informação, e a informação disponibilizada anteriormente, para verificar se é verdadeira ou falsa a afirmação de que “a classificação dos dados por classes conduz à subestimação [valores mais baixos] da concentração”. Justifique graficamente e quantitativamente a sua resposta com base na informação relativa às empresas de transporte regular **urbano**.
  - Utilize também esta análise para interpretar, por palavras, os pressupostos da análise da concentração quando os dados estão agregados por classes.



**LICENCIATURAS EM ECONOMIA E GESTÃO**

**ESTATÍSTICA I**

**FORMULÁRIO**

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_i x_i F_i = \sum_i x_i f_i$$

$$\bar{x} = \sum_i w_i x_i \quad (\text{com } \sum_i w_i = 1)$$

$$\bar{x}_g = \sqrt[n]{x_1^{F_1} \times x_2^{F_2} \times \dots}$$

$$\bar{x}_h = \frac{1}{\frac{1}{n} \sum_i F_i \frac{1}{x_i}} = \frac{1}{\sum_i f_i \frac{1}{x_i}}$$

$$M = l_m + k \times \frac{F_m - F_{m-1}}{(F_m - F_{m+1}) + (F_m - F_{m-1})}$$

$$M_e = l_{m_e} + k_{m_e} \frac{0,5 - s(l_{m_e})}{s(L_{m_e}) - s(l_{m_e})}$$

$$Q_l = l_l + k_l \frac{0,25 - s(l_l)}{s(L_l) - s(l_l)}$$

$$Q_{III} = l_{III} + k_{III} \frac{0,75 - s(l_{III})}{s(L_{III}) - s(l_{III})}$$

$$IV = \max_{x_i} \{x_i\} - \min_{x_i} \{x_i\}$$

$$IIQ = Q_{III} - Q_l$$

$$DAM_x = \frac{1}{n} \sum_i F_i |x_i - \bar{x}| = \sum_i f_i |x_i - \bar{x}|$$

$$s_x^2 = \frac{1}{n} \sum_i F_i (x_i - \bar{x})^2 = \sum_i f_i (x_i - \bar{x})^2 = \sum_i f_i x_i^2 - \bar{x}^2$$

$$s_x = +\sqrt{s_x^2}$$

$$C_v = \frac{s_x}{\bar{x}} \times 100$$

$$CA_p = \frac{\bar{X} - M_o}{s}$$

$$CA_B = \frac{Q_3 + Q_1 - 2M_e}{Q_3 - Q_1}$$

$$K_{Fisher} = \frac{\sum_{i=1}^m (x_i - \bar{X})^4 F_i / n}{\left[ \sum_{i=1}^m (x_i - \bar{X})^2 F_i / n \right]^2}$$

$$K = \frac{Q_3 - Q_1}{2(P_{90} - P_{10})}$$

$$IG = 1 - \sum_{j=1}^m (q_j + q_{j-1}) \times (p_j - p_{j-1})$$

$$F_i^{(x)} = F_i(X = x_i) = \sum_j F_{ij}$$

$$F_j^{(y)} = F_j(Y = y_j) = \sum_i F_{ij}$$

$$f(y_j | x_i) = \frac{F(x_i, y_j)}{F_i^{(x)}} = \frac{f(x_i, y_j)}{f_i^{(x)}}$$

$$f(x_i | y_j) = \frac{F(x_i, y_j)}{F_j^{(y)}} = \frac{f(x_i, y_j)}{f_j^{(y)}}$$

$$COV(X, Y) = \frac{1}{n} \sum_k (x_k - \bar{x})(y_k - \bar{y}) = \frac{1}{n} \sum_k x_k y_k - \bar{x} \bar{y}$$

$$COV(X, Y) = \frac{1}{n} \sum_i \sum_j F_{ij} (x_i - \bar{X})(y_j - \bar{Y}) = \sum_i \sum_j f_{ij} (x_i - \bar{x})(y_j - \bar{y}) = \sum_i \sum_j (x_i y_j f_{ij}) - \bar{x} \bar{y}$$

$$r(X, Y) = \frac{COV(X, Y)}{s_x s_y}$$

Nota: As fórmulas abaixo têm 100 como referência para o ano base.

$$I_{t/0}^{(p)} = \frac{P_t}{P_0} \times 100 \quad I_{t/0}^{(q)} = \frac{q_t}{q_0} \times 100 \quad I_{t/0}^{(v)} = \frac{P_t q_t}{P_0 q_0} \times 100 \quad I_{t/0}^{(p)} = \frac{\sum_{i=1}^n P_{ti}}{\sum_{i=1}^n P_{0i}} \times 100$$

$$I_{(t/0)}^{(p)} = \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n \frac{P_{ti}}{P_{0i}} \right) \times 100$$

$$I_{t/0}^{(q)} = \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n \frac{q_{ti}}{q_{0i}} \right) \times 100$$

$$I_{(t/0)}^{(p)} = \left( \sum_{i=1}^n \frac{P_{ti}}{P_{0i}} \times w_i \right) \times 100$$

$$I_{t/0}^{(q)} = \left( \sum_{i=1}^n \frac{q_{ti}}{q_{0i}} \times w_i \right) \times 100$$

$$I_{t/0}^{(p)}(L) = \frac{\sum_{i=1}^n P_{ti} q_{0i}}{\sum_{i=1}^n P_{0i} q_{0i}} \times 100$$

$$I_{t/0}^{(q)}(L) = \frac{\sum_{i=1}^n P_{0i} q_{ti}}{\sum_{i=1}^n P_{0i} q_{0i}} \times 100 ;$$

$$I_{t/0}^{(p)}(P) = \frac{\sum_{i=1}^n P_{ti} q_{ti}}{\sum_{i=1}^n P_{0i} q_{ti}} \times 100$$

$$I_{t/0}^{(q)}(P) = \frac{\sum_{i=1}^n P_{ti} q_{ti}}{\sum_{i=1}^n P_{ti} q_{0i}} \times 100$$

$$I_{t/0}(F) = \sqrt{I_{t/0}(L) \times I_{t/0}(P)}$$

Nota: o formulário não esgota todos os tratamentos estatísticos possíveis.