



UNIVERSIDADE CATÓLICA PORTUGUESA

ESTATÍSTICA I

PROVAS DE AVALIAÇÃO

RESOLUÇÕES OU NOTAS DE RESOLUÇÃO

Regente: José Adelino Afonso

Caros alunos,

As provas de avaliação de *Estatística I* são elaboradas pela equipa que lecciona a cadeira num determinado ano. São feitas com um triplo propósito: avaliar os alunos, ajudá-los a apreender melhor as matérias e, sempre que possível, pô-los em contacto com situações reais às quais pode ser aplicada a análise estatística.

À medida que cada matéria vai sendo acabada podem ir fazendo exercícios de teste relativos a essa matéria. Tenham no entanto em conta que um grupo de um teste pode abordar diferentes matérias e que não existe necessariamente uma resolução única.

A resolução pode não estar igual à que foi considerada para cotar as perguntas quando o teste foi efectuado, podendo haver resoluções que foram objecto de correcção/ alteração. Chama-se a atenção de que, em geral, devem ser apresentados todos os cálculos e justificadas todas as respostas.

Sugerimos que, antes de cada avaliação, pelo menos uma prova seja feito em condições de simulação, ou seja, sem olhar para a resolução, com o tempo limitado e sem consulta ou apenas com a consulta permitida. Em geral as provas são de 2h30 mas este tempo pode ser diferente.

Bom trabalho,
José Adelino Afonso

Fevereiro de 2012

LICENCIATURAS EM ECONOMIA E GESTÃO

ESTATÍSTICA I

1ª Frequência - 25 de Outubro de 2007

I (6 valores)

Numa prova de ciclismo em que os concorrentes são avaliados pelo tempo que demoram a percorrer determinado trajecto (variável X), obtiveram-se os seguintes resultados:

Tempo (segundos)	x_i (ponto médio da classe)	Número de Concorrentes	$S_i(\leq)$	$\tilde{S}_i(>)$	$s_i(\leq)$
600 – 690	645	A	8	F	0,16
690 – 720	705	B	D	G	0,26
720 – 750	735	10	23	27	0,46
750 – 780	765	7	30	20	I
780 – 840	810	12	42	8	0,84
840 – 900	870	8	E	H	J
Total		C			

$$\sum_i x_i = 4\,530$$

$$\sum_i x_i^2 = 3\,451\,500$$

$$\sum_i x_i F_i = 38\,070$$

$$\sum_i x_i F_i^2 = 342\,210$$

$$\sum_i x_i^2 F_i = 29\,240\,550$$

$$\sum_i x_i^2 F_i^2 = 264\,669\,750$$

- Determine os valores identificados de A a F, indicando todos os cálculos que efectuar (utilize apenas a informação contida no quadro).
- Represente, sob a forma poligonal, a frequência relativa acumulada, à direita, para a variável X .
- Determine a mediana da variável X e represente-a no gráfico traçado em b).
- Utilizando algumas das medidas de localização que conhece, o que pode dizer quanto à assimetria da distribuição da variável X ? Comprove as suas conclusões através do cálculo de uma medida apropriada.
- Realizou-se uma outra prova de ciclismo em que os concorrentes são avaliados pelo número de obstáculos transpostos no tempo regulamentar (variável Y). Para a variável Y , sabemos que a média é igual a 7, a variância é igual a 16 e o desvio-padrão é igual a 4.

Compare, sob o ponto de vista da dispersão, a distribuição da variável “tempo de prova” (X) com a distribuição da variável “número de obstáculos” (Y). Justifique a escolha do indicador utilizado.

II (9 valores)

A) Numa empresa de montagem de produtos electrónicos foi realizado um estudo que relaciona, para cada operário, o número de horas dormidas numa noite (variável X) com a qualidade do seu desempenho na fábrica, no dia seguinte, medido pelo número de erros cometidos nas operações de montagem (variável Y).

Para os 100 operários da fábrica foram apurados os seguintes resultados:

		Variável X (Número de Horas Dormidas)				Total
		[0- 4]] 4- 6]] 6- 8]] 8- 10]	
Variável Y (Número de Erros)	0	0	2	10	16	28
	1	4	4	6	4	18
	2	6	5	8	0	19
	3	10	9	16	0	35
Total		20	20	40	20	100

- Considere a variável “*número de erros praticados pelos operários, sabendo que estes dormiram entre 4 e 6 horas*”. Para esta variável, calcule as seguintes medidas:
 - Média;
 - Mediana;
 - Moda.
- Calcule o desvio absoluto médio da variável “*número de horas dormidas, no caso dos operários que cometeram 0 erros*”.
- Verifique se as variáveis X e Y são estatisticamente independentes, justificando analiticamente a sua resposta.
- Suponha que o coeficiente de correlação linear entre as variáveis X e Y é igual a $-0,9$. Interprete cuidadosamente o significado deste resultado (máximo 5 linhas).
- De modo a incentivar os operários a melhorarem o seu desempenho, cometendo menos erros, foi decidido introduzir um prémio de produtividade em função dos erros cometidos em cada dia. O valor monetário do prémio (P) é calculado pela fórmula: $P = 18 - \beta Y^2$, sabendo-se que para os operários que cometem 3 erros o prémio será nulo. Compare o valor médio do prémio a receber pelos operários que dormem 4 horas ou menos com o valor médio do prémio dos operários que dormem mais de 8 horas. Comente o resultado

B) Considere as variáveis X e Y com as seguintes distribuições de frequências:

x	1	2	3
$f(x)$	0,20	0,40	0,40

y	5	10
$f(y)$	0,40	0,60

Sabendo que as variáveis X e Y são independentes, calcule:

- a) A distribuição de frequências relativas conjuntas de X e Y [disponha essas frequências num quadro de dupla entrada].
- b)
 - i) A média da variável Y;
 - ii) A média da variável Y quando os valores da variável X são inferiores a 3;
 - iii) Compare os valores obtidos em i) e ii) e interprete.

III (5 valores)

1) No Boletim Económico do Banco de Portugal (Verão 2007, pg. 9), pode ler-se:

“As perspectivas para a economia portuguesa no período 2007-2008 caracterizam-se pela continuação da aceleração gradual da actividade económica. (...). Após o fraco crescimento registado em 2005 (0,5 por cento), estima-se que o Produto Interno Bruto (PIB) tenha crescido 1,3 por cento em 2006, projectando-se uma aceleração para 1,8 e 2,2 por cento em 2007 e 2008, respectivamente (...).”

Admitindo que todas as previsões enunciadas se venham a verificar, qual será a taxa de crescimento do PIB entre 2005 e 2008? Justifique.

2) No passado dia 17 de Outubro, Dia Internacional de Erradicação da Pobreza, o Instituto Nacional de Estatística (INE) divulgou alguns indicadores do Inquérito às Condições de Vida e Rendimento de 2005. Nesse documento pode ler-se:

“Em 2005, à quinta parte da população residente com menores rendimentos correspondia 7% do rendimento monetário das famílias, enquanto que aos 20% da população com maiores rendimentos correspondia cerca de 45% do total do rendimento.”

Com base nestes dados, faça um breve comentário sobre a desigualdade observada na distribuição do rendimento, incluindo o cálculo de uma estimativa do valor do Índice de Gini correspondente a esta distribuição do rendimento tal como é descrita.

LICENCIATURAS EM ECONOMIA E GESTÃO

ESTATÍSTICA I

1ª Frequência - 25 de Outubro de 2007

CORRECÇÃO

I

a)

$$A=F_1=S_1=8$$

$$A=8$$

$$0,16 = \frac{8}{n} \Leftrightarrow n = \frac{8}{0,16} \Leftrightarrow n = 50$$

$$C=50$$

$$B=50-8-10-7-12-8=5$$

$$B=5$$

$$D=S_2=8+5=13$$

$$D=13$$

$$E=S_6=n=50$$

$$E=50$$

$$H = \tilde{S}_6 = 0$$

$$H=0$$

$$F = \tilde{S}_1 = 50 - 8 = 42$$

$$F=42$$

$$G = \tilde{S}_2 = 50 - (8 + 5) = 37$$

$$G=37$$

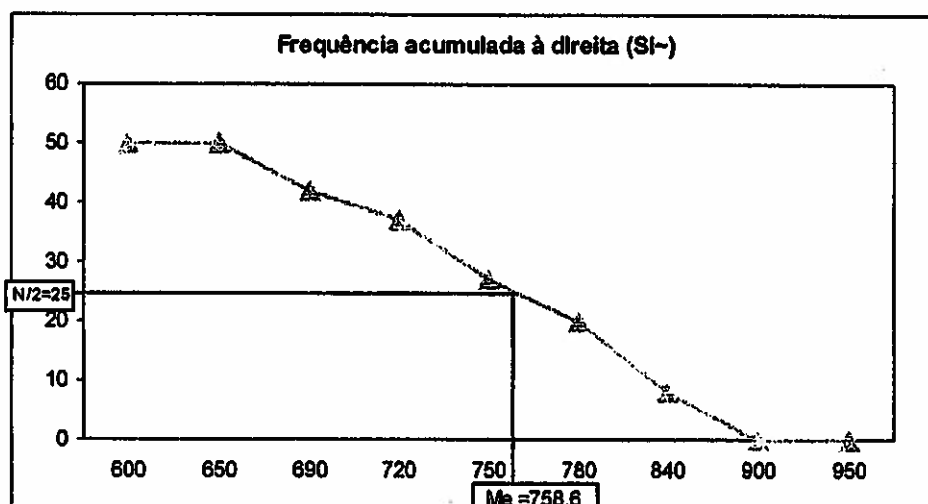
$$I = s_4 = \frac{30}{50} = 0,6$$

$$I=0,6$$

$$J = s_6 = 1$$

$$J=1$$

b)



$$c) Me = 750 + 30 \times \frac{0,5 \times 50 - 23}{7} = 758,6$$

d) $\bar{X} = 761,4$ $Me(X) = 758,6$

$Mo(X)$:

	hi	Fi	Di
600-690	90	8	0,089
690-720	30	5	0,167
720-750	30	10	0,333
750-780	30	7	0,233
780-840	60	12	0,200
840-900	60	8	0,133

Classe modal; 720-750

$$Mo(X) = 720 + 30 \times \frac{0, (3) - 0,1(6)}{(0, (3) - 0,1(6)) + (0, (3) - 0,2(3))} = 738,75$$

Relação entre as medidas de tendência central:

$738,75 < 758,6 < 761,4$, isto é, $Mo < Me < Média$: distribuição assimétrica positiva ou enviesada à esquerda.

Um indicador apropriado: pode usar-se o CA_p ou o CA_B .

$$CA_p = \frac{X - Mo}{S_x} = \frac{761,4 - 738,75}{71,3} = 0,31767$$

$CA_p > 0$, isto é, distribuição assimétrica positiva.

e) $X = \text{"Tempo de prova"}$

$Y = \text{"Número de obstáculos"}$

$$\bar{X} = \frac{38070}{50} = 761,4$$

$$\bar{Y} = 7$$

$$VAR(X) = \frac{29240550}{50} - 761,4^2 = 5081,04$$

$$STD(X) = \sqrt{5081,04} = 71,3$$

$$STD(Y) = 4$$

$$CV(X) = \frac{71,3}{761,4} \times 100 = 9,4$$

$$CV(Y) = \frac{4}{7} \times 100 = 57,1$$

A variável Y é mais dispersa que a variável X , pois tem um CV superior.

II		
Y_i	$f(Y_i X \in]4-6])$	s_i
0	$2/20 = 0,10$	0,10
1	$4/20 = 0,20$	0,30
2	$5/20 = 0,25$	0,55
3	$9/20 = 0,45$	1,00
		1,00

$$i) \bar{Y} = \sum_i y_i f_i(X \in]4-6]) = 0 \times 0,10 + 1 \times 0,20 + 2 \times 0,25 + 3 \times 0,45 = 2,05$$

$M_o = 3$ (Valor da variável com mais elevada frequência)

$M_e = ?$ 30% das observações são ≤ 1

55% das observações são ≤ 2 ,

logo haverá 50% das observações ≤ 2 ,

$M_e = 2$

b)

Classes	x_i	$f(X_i Y = 0)$	$x_i - \bar{X}$	$ x_i - \bar{X} f_i$
[0-4]	2	$0/28 = 0$	-6	0
]4-6]	5	$2/28 = 0,07$	-3	0,21
]6-8]	7	$10/28 = 0,36$	-1	0,36
]8-10]	9	$16/28 = 0,57$	+1	0,57
		1,00		1,14

$$\bar{X} = 2 \times 0 + 5 \times 0,07 + 7 \times 0,36 + 9 \times 0,57 = 8$$

$$DAM = |x_i - \bar{X}| f_i = 1,14$$

c) Haverá independência estatística se $f(x_i, y_j) = f_x(x_i) \times f_y(y_j)$ para todos os valores de i e j , i.e., se a distribuição conjunta for igual ao produto das marginais.

Vamos mostrar que, neste exemplo, há pelo menos um caso em que tal não se verifica: quando $X \in]8-10]$ e $y=2$.

Para estes valores das variáveis, pelas distribuições marginais relativas de X e Y vemos que: $f_x(X \in]8-10]) = 0,20$ e $f_y(y=2) = 0,19$ enquanto que a frequência relativa conjunta é: $f(X \in]8-10], y=2) = 0$. Logo, neste caso (e haverá outros que poderiam ser utilizados para o exercício), se verifica: $f(x_i, y_j) \neq f_x(x_i) \times f_y(y_j)$.

Conclusão: as variáveis X e Y não são estatisticamente independentes.

(Nota: a resposta poderia também ser dada utilizando a definição de independência através das distribuições condicionais).

d) Interpretação do coeficiente de correlação linear.

e) $P = 18 - \beta Y^2$

Y	$P = 18 - \beta Y^2$	$P = 18 - 2Y^2$
0	18	18
1	$18 - \beta$	16
2	$18 - 4\beta$	10
3	$18 - 9\beta = 0 \Rightarrow \beta = 2$	0

Y	$P = 18 - 2Y^2$	$f(Y X \in [0-4])$	$f(Y X \in]8-10])$
0	18	$0/20 = 0$	$16/20 = 0,8$
1	16	$4/20 = 0,2$	$4/20 = 0,2$
2	10	$6/20 = 0,3$	$0/20 = 0$
3	0	$10/20 = 0,5$	$0/20 = 0$
		1,00	1,00

Prémio Médio no caso em que o trabalhador dorme entre 0 e 4 horas por noite:

$$\bar{P} = 18 \times 0 + 16 \times 0,2 + 10 \times 0,3 + 0 \times 0,5 = 6,2$$

Prémio Médio no caso em que o trabalhador dorme entre 8 e 10 horas por noite:

$$\bar{P} = 18 \times 0,8 + 16 \times 0,2 + 10 \times 0 + 0 = 17,6$$

B)

Sendo as variáveis independentes, sabemos que $f(x_i, y_j) = f_x(x_i) \times f_y(y_j)$, logo:

X	Y		f(x)
	5	10	
1	0,08	0,12	0,2
2	0,16	0,24	0,4
3	0,16	0,24	0,4
f(y)	0,4	0,6	1

b)

Média de $Y = 5 \cdot 0,4 + 10 \cdot 0,6 = 8$

y	$f(Y X < 3) = f(Y X = 1, 2)$
5	$(0,08 + 0,16)/A = 0,4$
10	$(0,12 + 0,24)/A = 0,6$

em que $A = 0,08 + 0,12 + 0,16 + 0,24 = 0,6$

Média condicionada de $Y = 5 \cdot 0,4 + 10 \cdot 0,6 = 8$

Sendo as variáveis independentes, as médias condicionadas são iguais às médias não condicionadas

III

1) A taxa média de crescimento anual calcula-se como a média geométrica das taxas anuais indicadas:

$$(1 + 0,005) \times (1 + 0,013) \times (1 + 0,018) \times (1 + 0,022) = (1 + x)^4$$

$$(1 + x)^4 = 1,0591906 \Rightarrow x = 0,01448$$

Taxa média de crescimento = 1,45%

2) Neste exemplo, para efeitos de medição da concentração, a população residente representa os "indivíduos" e o rendimento o "atributo" em estudo. Representemos a variável rendimento por X , sendo x_j o rendimento de cada escalão e F_j o número de indivíduos em cada escalão (frequência relativa).

"À quinta parte da população residente com menores rendimentos correspondia 7% do rendimento monetário das famílias" –

Quando escalão "menores rendimentos", i.e., quando o rendimento é inferior a x_j , temos $p_j = f(X \leq x_j) = 0,20$. Nesse escalão, temos 7% do rendimento das famílias,

i.e., do atributo acumulado: $q_j = \frac{F_j x_j}{\sum_j F_j x_j} = 0,07$.

"Aos 20% da população com maiores rendimentos correspondia cerca de 45% do total do rendimento", isto é, aos 80% da população com menores rendimentos corresponde 55% do total.

Quando $p_j = f(X \leq x_j) = 0,80 \Rightarrow q_j = \frac{F_j x_j}{\sum_j F_j x_j} = 0,55$.

Podemos assim sintetizar a informação para construir o Índice de Gini:

si=pi	qi	$p_i - p_{i-1}$	$q_i + q_{i-1}$	
		(1)	(2)	(1)*(2)
0	0			
0,2	0,07	0,2	0,07	0,014
0,8	0,55	0,6	0,62	0,372
1	1	0,2	1,55	0,31
				0,696

$$IG = 1 - \sum_{j=1}^m (q_j + q_{j-1}) \times (p_j - p_{j-1})$$

$$IG = 1 - 0,696 = 0,304.$$

LICENCIATURAS EM ECONOMIA E GESTÃO

ESTATÍSTICA I

1ª Frequência – 3 de Abril de 2008

I

Foram registados os consumos de combustível, em toneladas (variável Y) e o número de passageiros transportados (variável X), em 66 viagens efectuadas por um avião *Airbus A300*.

A- (3,0 valores)

Utilizando os dados originais recolhidos (i.e., não classificados) foram calculados os seguintes indicadores para as variáveis X e Y :

		Variável X Passageiros	Variável Y Combustível (em ton.)
Média		134,74	11,70
Desvio - Padrão		56,58	9,70
Mínimo		50,00	1,91
Máximo		231,00	40,82
Percentis	25	97,00	6,16
	50	118,50	7,65
	75	190,25	14,96

- a) i) Compare a dispersão da variável “consumo de combustível” (Y) com a dispersão da variável “número de passageiros” (X). ii) Interprete o resultado obtido
- b) i) Analise a assimetria da variável “número de passageiros” (X)
ii) Interprete o resultado obtido

B - (5,5 valores)

Os dados recolhidos foram depois classificados, tendo-se obtido o seguinte quadro para as variáveis X e Y acima referidas:

$Y \backslash X$		Consumo de Combustível (em toneladas)		
		[1,5 – 5]] 5 – 10]] 10 – 40]
N.º de Passageiros	[50 – 100]	10	6	3
] 100 – 150]	3	10	8
] 150 – 250]	0	16	10

- Calcule a média da variável “número de passageiros” (X);
 - Justifique a diferença entre o valor obtido e o valor apresentado no quadro inicial.
- Determine a moda da variável “número de passageiros” (X)
- Determine a percentagem de voos que transportaram entre 100 e 200 passageiros
- Calcule o consumo médio de combustível para cada uma das classes da variável “número de passageiros”
- Utilizando os valores calculados em d), o que pode concluir quanto à independência estatística entre as variáveis X e Y ?
 - Justifique o resultado i) demonstrando-o analiticamente, em termos genéricos.

II (4,0 valores)

Realizou-se um inquérito junto de 180 indivíduos com o objectivo de conhecer quais os atributos que, para cada um deles, têm maior importância no momento de adquirir um automóvel. Foram considerados 4 atributos: preço (P), consumo (C), *design* (D) e segurança (S). Foi pedido aos indivíduos que dessem uma avaliação de 1 a 5 a cada um destes atributos (sendo a avaliação 1 correspondente a um atributo muito pouco importante e a avaliação 5 a um atributo da máxima importância). Obtiveram-se os seguintes resultados em que X_i representa a avaliação dada ao atributo i ($i = P, C, D, S$) e F_i a respectiva frequência absoluta.

X_i	Frequência dos Atributos			
	F_P	F_C	F_D	F_S
1	4	6	9	11
2	14	32	26	18
3	38	48	51	42
4	66	46	73	68
5	58	48	21	41

- a) Qual a percentagem de indivíduos para quem o atributo segurança (S) tem a importância máxima?
- b) Em média, quais os 2 atributos mais importantes para os indivíduos inquiridos?
- c) Qual o Intervalo Interquartis para o atributo *design* (D)?
- d) Qual a moda para os atributos preço (P) e consumo (C)?
- e) i) Calcule o coeficiente de variação dos atributos preço (P) e consumo (C);
 ii) Utilizando o resultado i), indique qual destes atributos gera maior consenso entre os indivíduos inquiridos, explicando claramente o seu raciocínio.

III (3,5 valores)

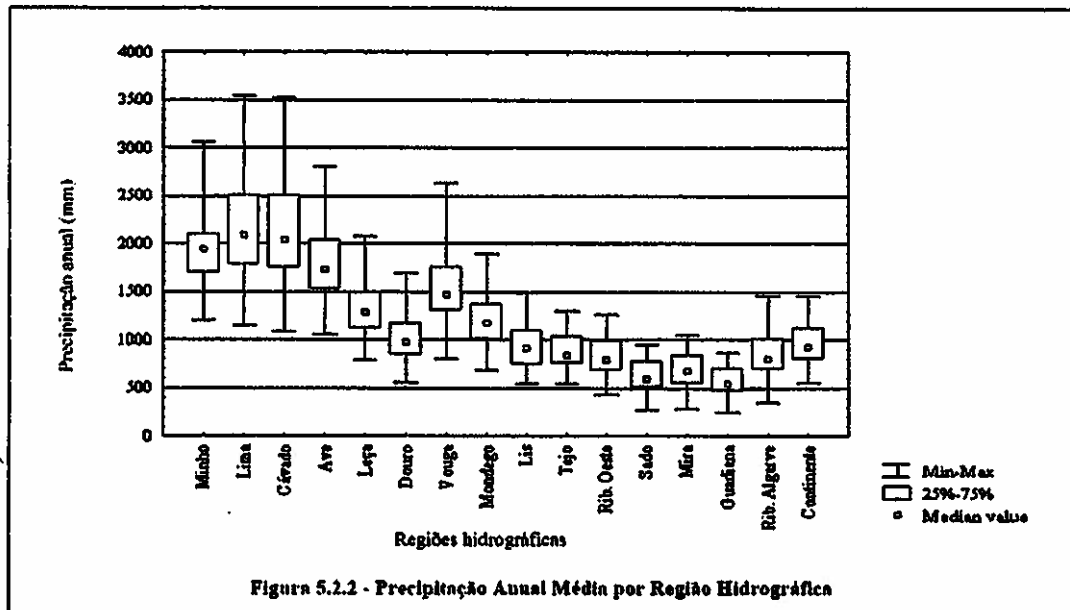
Para o estudo da distribuição do rendimento de uma comunidade com 200 habitantes foram constituídas quatro classes de rendimento (em determinadas unidades monetárias, u.m.), tendo-se constatado que os indivíduos da comunidade se repartem igualmente entre as classes (i.e., 50 indivíduos por classe).

Classes	Intervalo de rendimento (em u.m.)
Classe 1	0 - 20
Classe 2	20 - 50
Classe 3	50 - 100
Classe 4	100 - 200

- a) Calcule o Índice de Gini correspondente a esta distribuição do rendimento e interprete o resultado obtido.
- b) Com o objectivo de tornar a distribuição do rendimento menos assimétrica, as autoridades locais decidiram atribuir um subsídio de 5 unidades monetárias a cada um dos indivíduos da classe de rendimentos mais baixos (classe 1) e lançar um imposto de 5 unidades sobre os indivíduos da classe de rendimentos mais elevados (classe 4).
 - i) Trace, no mesmo gráfico, as Curvas de Lorenz para a situação inicial (alínea a)) e para a nova situação agora descrita.
 - ii) Interprete o gráfico em termos do sucesso (ou não) do objectivo anunciado de tornar a distribuição do rendimento menos assimétrica.

IV (4,0 valores)

1. No Plano Nacional da Política para o Ordenamento do Território, divulgado em Setembro de 2007, encontra-se o seguinte gráfico que compara o comportamento da precipitação anual nas várias regiões hidrográficas do país.



Fonte: Instituto da Água, Plano Nacional da Água, 2001

Considere as variáveis: *precipitação anual na região do Cávado* (variável X) e *precipitação anual da região do Guadiana* (variável Y) e, com base no gráfico responda às seguintes questões (máximo 5 linhas por questão):

- a) Qual o valor do 1º quartil da variável X? Qual o seu significado?
- b) Qual das duas variáveis é mais dispersa? Porquê?
- c) Em qual das duas regiões a precipitação é superior? Porquê?

2 - De acordo com o Relatório do Banco de Portugal de 2006, as taxas de crescimento do PIB (produto interno bruto) em Portugal, nos últimos anos, foram as seguintes:

Ano	2002	2003	2004	2005	2006
Taxa	0,8	-0,8	1,3	0,5	1,3

(Quadro 4.1, pg. 101: Taxas de variação real, em percentagem).

Calcule a taxa média de crescimento do PIB ao longo do período considerado.

UNIVERSIDADE
CATÓLICA
PORTUGUESA



FACULDADE DE
CIÊNCIAS
ECONÓMICAS E
EMPRESARIAIS

LICENCIATURAS EM ECONOMIA E GESTÃO

ESTATÍSTICA I

1ª Frequência – 3 de Abril de 2008

CORRECÇÃO



GRUPO I

a)

Trata-se de fenómenos diferentes pelo que a comparação deve ser feita com base numa medida de dispersão relativa. Vamos usar o coeficiente de variação.

$$CV_x = \frac{S_x}{\bar{X}} = \frac{56,577}{134,740} = 0,420 \text{ ou } 42,0\%.$$

$$CV_y = \frac{S_y}{\bar{Y}} = \frac{9,699}{11,701} = 0,829 \text{ ou } 82,9\%.$$

Y tem maior dispersão relativa do que X. Ou seja, o combustível gasto por voo tem maior dispersão relativa do que o nº de passageiros transportado por voo.

Este resultado faz sentido uma vez que os aviões tendencialmente andarão cheios e as viagens podem corresponder a distâncias diferentes que requerem diferentes consumos de combustível.

Outra interpretação é que a média traduz melhor a variável em estudo para o nº de passageiros do que para o combustível gasto. Alguns autores indicam o limiar de 50% para o coeficiente de variação para considerar que a média é representativa da variável em estudo.

b)

Vamos usar o coeficiente de assimetria de Bowley:

$$CA_B = \frac{Q_3 + Q_1 - 2M_e}{Q_3 - Q_1} = \frac{190,250 + 97,000 - 2 \times 118,5}{190,250 - 97,000} = \frac{50,25}{93,25} = 0,539$$

$CA_B > 0 \Rightarrow X$ tem assimetria positiva ou enviesamento à esquerda.

b.ii)

Significa que a maior parte das ocorrências é de valores mais baixos. Ou seja, tendencialmente tratou-se de voos com um número menor de passageiros relativamente aos valores que a variável X podia assumir.



Nº de Passageiros	x_i	F_i	f_i	k_i	F_i/k_i	f_i/k_i	S_i	s_i	$x_i F_i$	$x_i f_i$
[50 – 100]	75	19	0,288	50	0,380	0,0058	19	0,2879	1425	21,591
[100 – 150]	125	21	0,318	50	0,420	0,0064	40	0,6061	2825	39,773
[150 – 250]	200	26	0,394	100	0,260	0,0039	66	1,0000	5200	78,788
Soma		66	1,000						9250	140,152
Divisão por n									140,152	

a)

a.1)

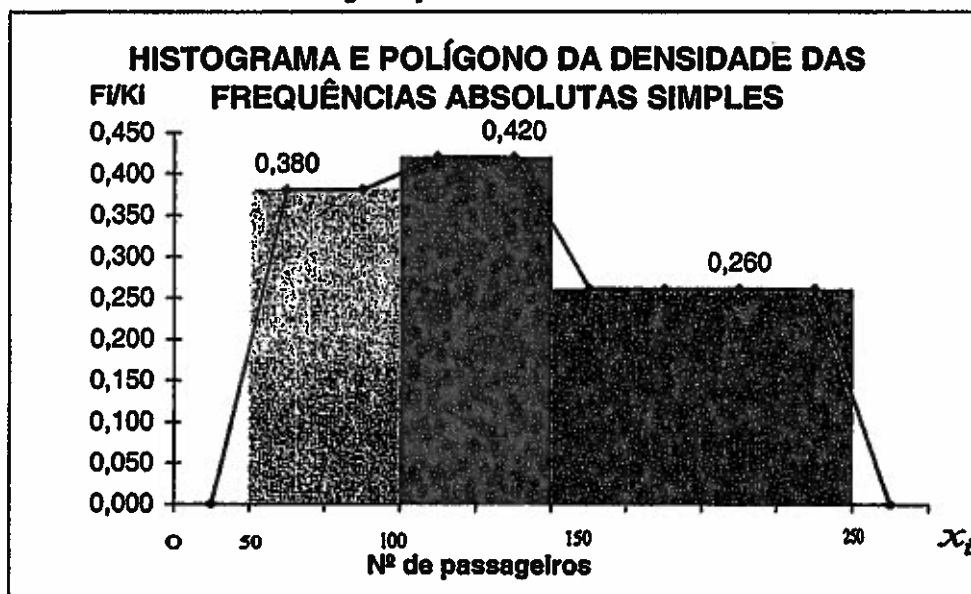
$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^3 x_i F_i}{n} = \frac{75 \times 19 + 125 \times 21 + 200 \times 26}{66} = \frac{9250}{66} = 140,152$$

a.11)

O valor do quadro inicial era calculado com os dados em bruto, ou seja os valores que se verificaram mesmo. Este valor foi calculado com os valores agregados por classes contínuas tendo sido usado, como representativo de cada classe, o seu valor central. A diferença entre os valores originais e os valores dados pelo centro da classe chama-se erro de tabulação.

b)

[Não era necessário desenhar o gráfico]

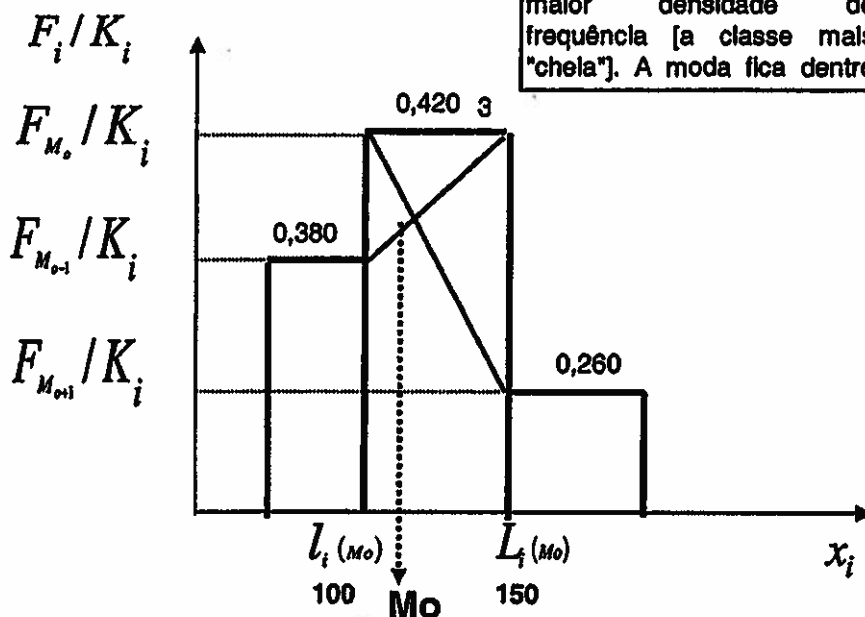


Moda=

110,000

Classe modal: [100-150[

A classe modal é a que tem maior densidade de frequência [a classe mais "cheia"]. A moda fica dentro



$$\frac{0,420 - 0,260}{150 - M_o} = \frac{0,420 - 0,380}{M_o - 100} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow M_o = 110$$

ou

$$\frac{0,0064 - 0,0039}{150 - M_o} = \frac{0,0064 - 0,0058}{M_o - 100} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow M_o = 110$$

Resolução recorrendo às fórmulas [diferenças nos resultados das fórmulas devem-se aos arredondamentos]:

$$M_o = l_m + k_m \times \frac{\frac{F_m}{k_m} - \frac{F_{m-1}}{k_{m-1}}}{\left(\frac{F_m}{k_m} - \frac{F_{m+1}}{k_{m+1}}\right) + \left(\frac{F_m}{k_m} - \frac{F_{m-1}}{k_{m-1}}\right)} = 100 + \frac{(0,420 - 0,380)}{(0,420 - 0,380) + (0,420 - 0,260)} \times 50 = 110$$

$$M_o = l_m + k_m \times \frac{\frac{f_m}{k_m} - \frac{f_{m-1}}{k_{m-1}}}{\left(\frac{f_m}{k_m} - \frac{f_{m+1}}{k_{m+1}}\right) + \left(\frac{f_m}{k_m} - \frac{f_{m-1}}{k_{m-1}}\right)} = 100 + \frac{(0,0064 - 0,0058)}{(0,0064 - 0,0058) + (0,0064 - 0,0039)} \times 50 = 110$$

1

2

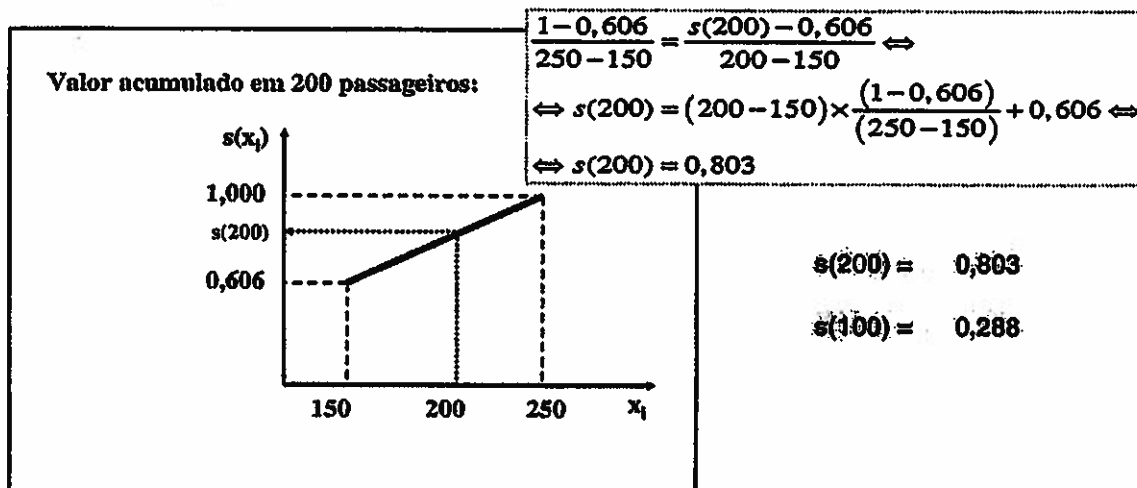
3

4

5

c)

PERCENTAGEM DE VOOS COM 100 A 200 PASSAGEIROS:



$s(200) - s(100) = 0,515$ ou R: 51,5%

d)

$$\bar{Y} \setminus x_1 = \frac{3,25 \times 10 + 7,5 \times 6 + 25 \times 3}{19} = \frac{152,5}{19} = 8,026$$

$$\bar{Y} \setminus x_2 = \frac{3,25 \times 3 + 7,5 \times 10 + 25 \times 8}{21} = \frac{284,75}{21} = 13,560$$

$$\bar{Y} \setminus x_3 = \frac{3,25 \times 0 + 7,5 \times 16 + 25 \times 10}{26} = \frac{370}{26} = 14,231$$

e)

e.i)

As médias nos subgrupos não são iguais pelo que não há Independência estatística entre X e Y.

e.ii)

Quando há Independência entre X e Y, então

$$f(y_j \setminus x_1) = f(y_j \setminus x_2) = f(y_j \setminus x_3) = f(y_j)$$

pelo que $\bar{Y} = \sum y_j f_j$ é também o valor que se obtém igual para todas as classes de x_i .

Portanto, quando há independência entre X e Y, então $\bar{Y} \setminus x_1 = \bar{Y} \setminus x_2 = \bar{Y} \setminus x_3 = \bar{Y}$

Este resultado não se verifica pelo que X e Y não são Independentes.



d)

Nº de anos	xi	Fi	fi	xiFi	xifi	xi-Média	(xi-Média)*	(xi-Média)*Fi	xi*Fi	(xi-Média)*fi	xi*fi
] 0 - 2]	1	150	2,2727	150	2,2727	-9,9360	98,72410	14808,61440	150,000	224,37295	2,273
] 2 - 4]	3	294	4,4545	882	13,3636	-7,9360	82,98010	18516,14822	2846,000	280,54770	40,081
] 4 - 10]	7	396	8,0000	2772	42,0000	-3,9360	15,48210	6134,87002	19404,000	92,95258	294,000
] 10 - 20]	15	480	7,2727	7200	109,0909	4,0640	18,51610	7927,72608	108000,000	120,11708	1636,364
] 20 - 40]	30	180	2,7273	5400	81,8182	19,0640	983,43610	65418,49728	162000,000	991,18935	2454,545
Soma		1500	22,7273	16404	248,5455			112805,85600	292200,000	1709,17984	4427,273
Divisão por n											

Média = 10,936

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^5 x_i F_i}{n} = \frac{16404}{1500} = 10,936 \quad \text{ou} \quad \bar{X} = \sum_{i=1}^5 x_i f_i = 10,936$$

Variação = 75,2039

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{X})^2 F_i}{n} = \frac{112805,856}{1500} = 75,2039 \quad \text{ou} \quad S^2 = \frac{\sum_{i=1}^5 x_i^2 F_i}{n} - \bar{X}^2 = \frac{292200}{1500} - 10,936^2 = 75,2039$$

$$S^2 = \sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{X})^2 f_i = 75,2039 = 75,2039 \quad \text{ou} \quad S^2 = \sum_{i=1}^5 x_i^2 f_i - \bar{X}^2 = 194,8 - 10,936^2 = 75,2039$$

Desvio padrão = 8,672

$$S = \sqrt{S^2} = \sqrt{75,2039} = 8,672$$

Coefficiente de variação

0,7930 ou 79,3%

$$CV = \frac{S}{\bar{X}} = \frac{8,672}{10,936} = 0,793 \text{ ou } 79,3\%$$



GRUPO II

X_i	Frequência dos Atributos			
	F_p	F_c	F_d	F_s
1	4	6	9	11
2	14	32	26	18
3	38	48	51	42
4	66	46	73	68
5	58	48	21	41

- a) A segurança tem importância máxima (ie., tem a notação 5) para 41/180 indivíduos, i.e., 22,8%

b)

X_i	Frequência dos Atributos			
	$X_i \cdot F_p$	$X_i \cdot F_c$	$X_i \cdot F_d$	$X_i \cdot F_s$
1	4	6	9	11
2	28	64	52	36
3	114	144	153	126
4	264	184	292	272
5	290	240	105	205
	700	638	611	650
Média	3,89	3,54	3,39	3,61

O Preço e a Segurança são, em média, os atributos mais valorizados

- c) Cálculo do 1º quartil e do 3º quartil
 $Q1=?$
 $Q3=?$

X_i	F_d	Freq. Acum.
1	9	9
2	26	35
3	51	86
4	73	159
5	21	180
	180	

$Q1$ - Observação de ordem $(180+1)/4= 45,25$ Corresponde a $X=3$
 $Q3$ - Observação de ordem $(3/4)(180+1)= 135,75$ Corresponde a $X=4$

$$IIQ=Q3-Q1=4-3=1$$



d)

	Fp	Fc
1	4	6
2	14	32
3	38	
4	66	46
5	58	

A moda da variável preço é $X=4$

A variável consumo é bi-modal com modas em $X=3$ e $X=5$

e)i) $C_v = \frac{s_x}{\bar{x}} \times 100$

$$s_x^2 = \frac{1}{n} \sum_i F_i (x_i - \bar{x})^2 = \sum_i f_i (x_i - \bar{x})^2 = \sum_i f_i x_i^2 - \bar{x}^2$$

PREÇO

Xi	Fp	fi	fi*Xi2	Variância = 16,156 - (3,89)*(3,89)
1	4	0,022	0,022	1,0239
2	14	0,078	0,311	Desvio padrao= 1,012
3	38	0,211	1,900	
4	66	0,367	5,867	
5	58	0,322	8,056	
16,156				

Média do preço = 3,89

CONSUMO

	Fc	fi	fi*Xi2	Variância = 13,90 - (3,54)*(3,54)
1	6	0,033	0,033	1,3684
2	32	0,178	0,711	Desvio padrao= 1,170
3	48	0,267	2,400	
4	46	0,256	4,089	
5	48	0,267	6,667	
13,900				

Média do consumo = 3,54

O consumo tem menor desvio padrão, por isso as "opiniões" sobre a sua importância têm menor dispersão, isto é, há maior consenso sobre este atributo.



Grupo III

$$IG_2 = 1 - \sum_{j=1}^m (q_j + q_{j-1}) \times (p_j - p_{j-1})$$

Classes	Rend.	Xi	Fi	fi	si pi	pi- p _{i-1} (A)
1	0-20	10	50	0,25	0,250	0,250
2	20-50	35	50	0,25	0,500	0,250
3	50-100	75	50	0,25	0,750	0,250
4	100-200	150	50	0,25	1,000	0,250

Classes	Xi*Fi	Em %	3m % acum qi	qi + q _{i-1} (B)	(A)*(B)
1	500	0,037	0,037	0,037	0,00926
2	1750	0,130	0,167	0,204	0,05093
3	3750	0,278	0,444	0,611	0,15278
4	7500	0,556	1,000	1,444	0,36111
	13500	1,000			0,57407

$$IG = 1 - 0,57407$$

$$= 0,42593$$

b)

Classes	Xi	Fi	fi	si pi
1	15	50	0,25	0,250
2	35	50	0,25	0,500
3	75	50	0,25	0,750
4	145	50	0,25	1,000

Classes	Xi*Fi	Em %	3m % acum qi
1	750	0,056	0,056
2	1750	0,130	0,185
3	3750	0,278	0,463
4	7250	0,537	1,000
	13500	1,000	

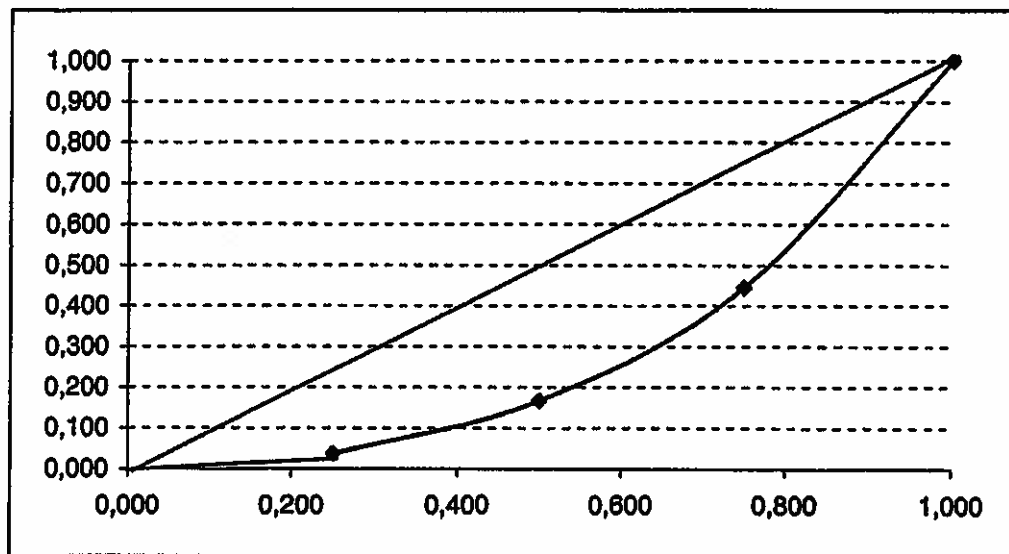


Gráfico 1

pi	qi
0,250	0,037
0,500	0,167
0,750	0,444
1,000	1,000

Gráfico 2

pi	qi
0,250	0,056
0,500	0,185
0,750	0,463
1,000	1,000



Este gráfico ilustra a situação inicial

Depois da introdução do subsídio / imposto a curva de Lorenz
ficará um pouco mais próxima da linha de igual distribuição



Grupo IV

- 2) Média geométrica das taxas de crescimento

$$\bar{x}_g = \sqrt[n]{x_1^{R_1} \times x_2^{R_2} \times \dots}$$

$$(1+0,008)*(1-0,008)*(1+0,013)*(1+0,005)*(1+0,013)=(1+x)^5= 1,03123$$

$$1+x= 1,00617$$

$$x= 0,00617$$

Taxa média de crescimento =0,617%

1/2

1/3

1/4

1/5



LICENCIATURAS EM ECONOMIA E GESTÃO

ESTATÍSTICA I

1ª Frequência – 4 de Abril de 2009

APRESENTE TODOS OS PASSOS DOS EFETUADOS
JUSTIFIQUE TODAS AS SUAS RESPOSTAS
RESPONDA A CADA GRUPO DE VARIÁVEIS SEPARADA

I (5,0 valores)

Considere a distribuição de frequência da variável estatística X que representa o montante de subsídios (em determinadas u.m.) atribuídos a um grupo de 60 agricultores.

X	$F(x)$
[0 - 1]	6
] 1 - 2]	15
] 2 - 4]	24
] 4 - 8]	15

- a) Construa o histograma e o polígono de frequências absolutas para a variável X ;
- b) i) Calcule o valor das principais medidas de tendência central para a variável X , i.e., média, mediana e moda;
- ii) Determine a percentagem de agricultores cujo montante de subsídio recebido está acima da média;
- iii) Utilizando os valores determinados em i), estude o enfiamento da distribuição da variável.
- c) Considere agora que os agricultores vão beneficiar de um aumento no montante de subsídio que recebem. Qual a alteração no valor da média e da variância dos subsídios atribuídos se:
- i) O aumento do subsídio for de 20% para cada agricultor;
- ii O aumento do subsídio for igual a 1 u.m. para cada agricultor.
- Justifique cuidadosamente.

II (6,0 valores)

Considere o mercado de distribuição de *software* de uma determinada economia. Nesse mercado actuam 200 empresas para as quais se dispõe de informação sobre o valor da sua facturação mensal e o número de escritórios de cada uma delas. Essa informação está sintetizada na tabela abaixo em que a variável X representa o “valor da facturação mensal (em milhares de euros)” e a variável Y o “número de escritórios”.

X \ Y	Y				
	1	2	3	4	5
[0 – 10]	15	3	2	0	0
] 10 – 30]	20	10	15	8	2
] 30 – 50]	10	20	30	15	5
] 50 – 100]	0	0	10	15	10
] 100 – 500]	0	0	3	4	3

- a) Obtenha as distribuições de frequência marginais relativas das variáveis X e Y ;
- b) Considere que as empresas com facturação igual ou inferior a 50 mil euros são consideradas “pequenas empresas” e as que apresentam facturação acima dos 50 mil euros são “grandes empresas”.
 - i) Obtenha as distribuições de frequência condicionais da variável “número de escritórios” (variável Y) para as “pequenas empresas” e para as “grandes empresas”.
 - ii) Utilizando o indicador Desvio Absoluto Médio, compare a dispersão da variável Y em ambos os grupos de empresas. Interprete o resultado.
 - iii) Determine a mediana da variável Y , no caso das “pequenas empresas”.
- d) O valor da facturação e o número de escritórios em que as empresas operam são 2 indicadores da dimensão dessas empresas. Como tal, parece razoável admitirmos que as variáveis X e Y não sejam estatisticamente independentes. Utilizando resultados já obtidos em alíneas anteriores, justifique analiticamente esta afirmação.

III (6,0 valores)

A empresa *BurgarK* dispõe actualmente de três produtos, *Triplecheese* (bem *T*), *Chicken* (bem *C*) e *SpecialBurger* (bem *S*), relativamente aos quais se dispõe de informação sobre os seus preços e o valor das vendas realizadas entre 2004 e 2008.

	Produtos					
	Bem <i>T</i> <i>TripleCheese</i>		Bem <i>S</i> <i>SpecialBurger</i>		Bem <i>C</i> <i>Chicken</i>	
	Preço	Valor das Vendas	Preço	Valor das Vendas	Preço	Valor das Vendas
2006	51	5355	101	5555	23	5405
2007	57	6099	97	5917	25	5750
2008	65	6500	105	7035	27	6507

- a) i) Descreva a evolução dos preços praticados pela empresa *BurgarK* entre 2006 e 2008 através de um índice de preços relativos, agregado e ponderado. Utilize o ano de 2006 para ano base e para os ponderadores.
- ii) Como se designa este índice?
- b) Qual a taxa de crescimento médio anual dos preços da empresa *BurgarK* entre 2006 e 2008? Justifique.
- c) Foi efectuada uma previsão da evolução dos preços da empresa *BurgarK* para 2009 e 2010. Utilizando essa previsão, obtiveram-se os seguintes valores para o respectivo índice de preços, com base em 2009:

Ano	$I_{1/2009}^P$
2008	98
2009	100
2010	103

- i) Apresente a série completa de índices de preços para os anos de 2008 a 2010, com base em 2006 (use os resultados obtidos em a)i)). Justifique os cálculos.
- ii) Que propriedade dos números índices utilizou? Os valores obtidos são exactos? Justifique.
- d) Sabendo que o Índice de Quantidades de Paasche para 2008, com base em 2006, é igual a 105,79, determine o valor do Índice de Quantidades de Fisher para 2008 com base em 2006.

IV (3,0 valores)

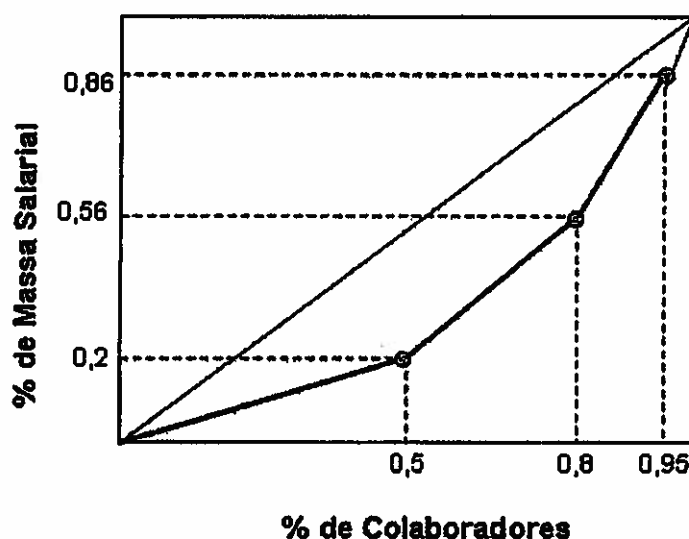
O Administrador do grupo empresarial *ModaXY* pretende conhecer a distribuição salarial nas duas empresas que constituem este grupo, as empresas *TOPX* e *TOPY*, cada uma delas com 100 trabalhadores. Para tal, solicitou a recolha de dados estatísticos sobre este assunto.

A informação recolhida pela empresa *TOPX* está apresentada na tabela abaixo:

X - Remuneração Mensal	F_i	$X_i F_i$	$X_i^2 f_i$
[0 – 500]	30	7500	18750
] 500 – 1000]	40	30000	225000
] 1000 – 1500]	20	25000	312500
] 1500 – 2000]	10	17500	306250
Total	$N = 100$	80000	862500

A informação relativa à empresa *TOPY* inclui uma tabela indicando as classes salariais consideradas relevantes na empresa e um gráfico:

Y - Remuneração Mensal
[0 – 1000]
] 1000 – 2000]
] 2000 – 3000]
] 3000 – 4000]



- Compare o montante total de salários que são pagos ao conjunto dos trabalhadores (massa salarial) de cada uma das empresas *TOPX* e *TOPY*. Justifique os cálculos que efectuar.
- Utilizando um indicador apropriado, avalie o grau de concentração da distribuição salarial na empresa *TOPX*;
 - Ilustre graficamente o grau de concentração da empresa *TOPX* e compare-o com o da empresa *TOPY*. O que conclui?

(Nota: Utilize a folha auxiliar em anexo, identifique-a e coloque-a dentro do seu teste)

LICENCIATURAS EM ECONOMIA E GESTÃO

**ESTATÍSTICA I
FORMULÁRIO**

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_i F_i x_i = \sum_i f_i x_i$$

$$\bar{x}_w = \sum_i w_i x_i \quad (\text{com } \sum_i w_i = 1)$$

$$\bar{x}_g = \sqrt[n]{x_1^{F_1} \times x_2^{F_2} \times \dots}$$

$$\bar{x}_h = \frac{1}{\frac{1}{n} \sum_i F_i \frac{1}{x_i}} = \frac{1}{\sum_i f_i \frac{1}{x_i}}$$

$$M_o = l_m + k \times \frac{F_m - F_{m-1}}{(F_m - F_{m+1}) + (F_m - F_{m-1})}$$

$$M_e = l_{m_e} + k_{m_e} \frac{0,5 - s(l_{m_e})}{s(L_{m_e}) - s(l_{m_e})}$$

$$Q_l = l_l + k_l \frac{0,25 - s(l_l)}{s(L_l) - s(l_l)}$$

$$Q_{III} = l_{III} + k_{III} \frac{0,75 - s(l_{III})}{s(L_{III}) - s(l_{III})}$$

$$IV = \max_{x_i} \{x_i\} - \min_{x_i} \{x_i\};$$

$$IIQ = Q_{III} - Q_l$$

$$DAM_x = \frac{1}{n} \sum_i F_i |x_i - \bar{x}| = \sum_i f_i |x_i - \bar{x}|$$

$$s_x^2 = \frac{1}{n} \sum_i F_i (x_i - \bar{x})^2 = \sum_i f_i (x_i - \bar{x})^2 = \sum_i f_i x_i^2 - \bar{x}^2$$

$$s_x = +\sqrt{s_x^2}$$

$$C_v = \frac{s_x}{\bar{x}} \times 100$$

$$CA_p = \frac{\bar{X} - M_o}{s};$$

$$CA_b = \frac{Q_3 + Q_1 - 2M_e}{Q_3 - Q_1}$$

$$K_{Fisher} = \frac{\sum_{i=1}^m (x_i - \bar{X})^4 F_i / n}{\left[\sum_{i=1}^m (x_i - \bar{X})^2 F_i / n \right]^2}$$

$$K = \frac{Q_3 - Q_1}{2(P_{90} - P_{10})}$$

$$IG = 1 - \sum_{j=1}^m (q_j + q_{j-1}) \times (p_j - p_{j-1})$$

$$F_i^{(x)} = F_i(X = x_i) = \sum_j F_{ij}$$

$$F_j^{(y)} = F_j(Y = y_j) = \sum_i F_{ij}$$

$$f(y_j | x_i) = \frac{F(x_i, y_j)}{F_i^{(x)}} = \frac{f(x_i, y_j)}{f_i^{(x)}};$$

$$f(x_i | y_j) = \frac{F(x_i, y_j)}{F_j^{(y)}} = \frac{f(x_i, y_j)}{f_j^{(y)}}$$

$$COV(X, Y) = \frac{1}{n} \sum_k (x_k - \bar{x})(y_k - \bar{y}) = \sum_k x_k y_k - \bar{x} \bar{y}$$

$$COV(X, Y) = \frac{1}{n} \sum_i \sum_j F_{ij} (x_i - \bar{X})(y_j - \bar{Y}) = \sum_i \sum_j f_{ij} (x_i - \bar{x})(y_j - \bar{y}) = \sum_i \sum_j (x_i y_j f_{ij}) - \bar{x} \bar{y}$$

$$r(X, Y) = \frac{COV(X, Y)}{s_x s_y}$$

$$I_{i/0}^{(p)} = \frac{p_i}{p_0} \times 100; \quad I_{i/0}^{(q)} = \frac{q_i}{q_0} \times 100; \quad I_{i/0}^{(v)} = \frac{p_i q_i}{p_0 q_0} \times 100 \quad I_{i/0}^{(p)} = \frac{\sum_{i=1}^n p_{ii}}{\sum_{i=1}^n p_{0i}} \times 100$$

$$I_{(i/0)}^{(p)} = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n \frac{p_{ii}}{p_{0i}} \right) \times 100; \quad I_{i/0}^{(q)} = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n \frac{q_{ii}}{q_{0i}} \right) \times 100$$

$$I_{(i/0)}^{(p)} = \left(\sum_{i=1}^n \frac{p_{ii}}{p_{0i}} \times w_i \right) \times 100; \quad I_{i/0}^{(q)} = \left(\sum_{i=1}^n \frac{q_{ii}}{q_{0i}} \times w_i \right) \times 100$$

$$I_{i/0}^{(p)}(L) = \frac{\sum_{i=1}^n p_{ii} q_{0i}}{\sum_{i=1}^n p_{0i} q_{0i}} \times 100; \quad I_{i/0}^{(q)}(L) = \frac{\sum_{i=1}^n p_{0i} q_{ii}}{\sum_{i=1}^n p_{0i} q_{0i}} \times 100$$

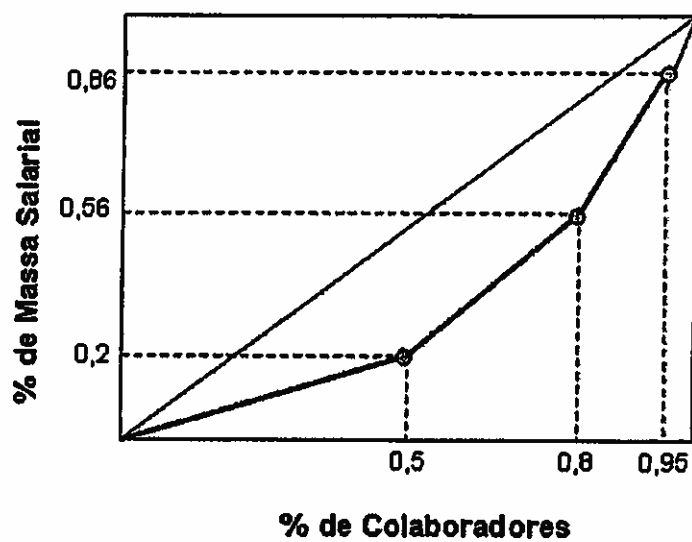
$$I_{i/0}^{(p)}(P) = \frac{\sum_{i=1}^n p_{ii} q_{ii}}{\sum_{i=1}^n p_{0i} q_{ii}} \times 100; \quad I_{i/0}^{(q)}(P) = \frac{\sum_{i=1}^n p_{ii} q_{ii}}{\sum_{i=1}^n p_{ii} q_{0i}} \times 100$$

$$I_{i/0}(F) = \sqrt{I_{i/0}(L) \times I_{i/0}(P)}$$

Nome

Número

Grupo IV b) ii)



Comentário:

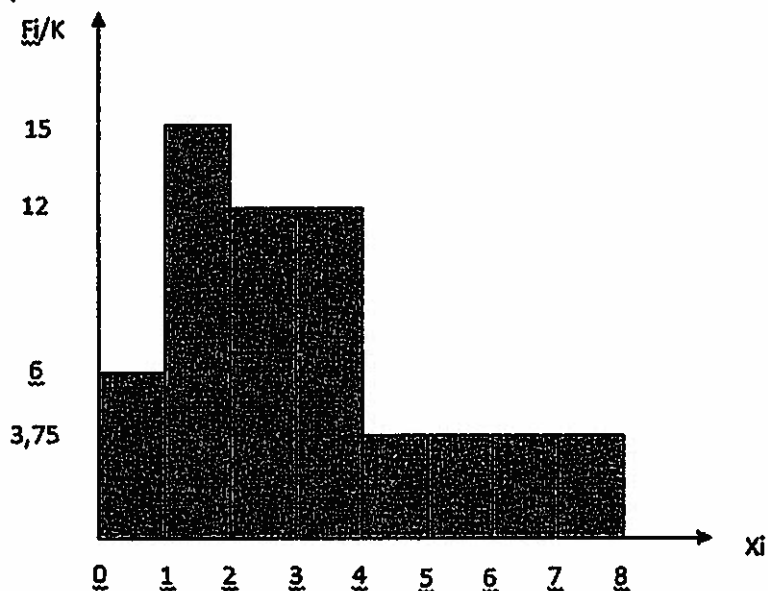


ESTATÍSTICA I - FCEE - 1º TESTE - 4 DE ABRIL DE 2009

É apresentada a resolução de referência. Outras formas de responder correctas foram consideradas correctas. Quando são apresentadas resoluções alternativas, só uma é que foi exigida.

Grupo I

a)



Além do histograma indicado na figura acima o gráfico deveria também incluir o polígono de frequências.

b)

i)

Classes	x_i	F_i	f_i	s_i	K	F_i/K	$X_i f_i$
0-1	0,5	6	0,1	0,1	1	6	0,05
1-2	1,5	15	0,25	0,35	1	15	0,375
2-4	3	24	0,4	0,75	2	12	1,2
4-8	6	15	0,25	1	4	3,75	1,5
		60	1				3,125

$$\text{Média} = \sum x_i f_i = 3,125$$

$$\text{Mediana} : \frac{4 - 2}{0,75 - 0,35} = \frac{Me - 2}{0,5 - 0,35} \Leftrightarrow Me - 2 = 0,75 \Leftrightarrow Me = 2,75$$

$$\text{Ou Mediana} = 2 + 2 * \frac{0,5 - 0,35}{0,75 - 0,35} \Leftrightarrow Me = 2,75$$

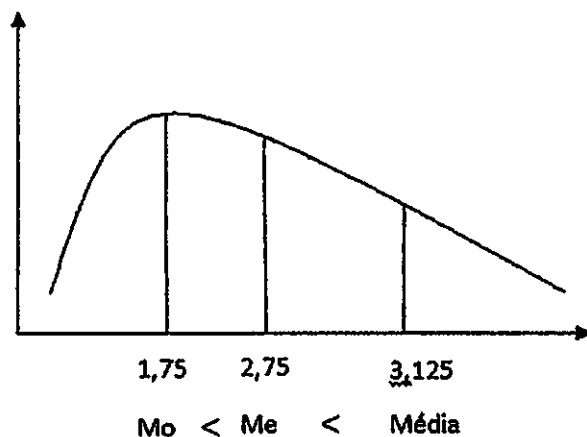
$$\text{Moda: } \frac{15-6}{Mo-1} = \frac{15-12}{2-Mo} \Leftrightarrow 9(2-Mo) = 3(Mo-1) \Leftrightarrow 18-9Mo = 3Mo-3 \Leftrightarrow Mo = 1,75$$

$$\text{Ou Moda} = 1 + 1 * \frac{15-6}{(15-6) + (15-12)} \Leftrightarrow Mo = 1,75$$

$$\begin{aligned} \text{ii)} \\ \frac{0,75 - 0,35}{4-2} &= \frac{s(3,125) - 0,35}{3,125-2} \Leftrightarrow s(3,125) = 0,575 \\ 1 - s(3,125) &= 0,425 \end{aligned}$$

42,5 % dos agricultores recebem subsídios acima da média.

iii)



Distribuição assimétrica positiva ou enviesada à esquerda.

c)

Classes	x_i	F_i	f_i	s_i	K	F_i/K	$X_i f_i$	$(x_i - 3,125)^2 \cdot f_i$
0-1	0,5	6	0,1	0,1	1	6	0,05	0,689
1-2	1,5	15	0,25	0,35	1	15	0,375	0,660
2-4	3	24	0,4	0,75	2	12	1,2	0,006
4-8	6	15	0,25	1	4	3,75	1,5	2,066
		60	1				3,125	3,422

Subsídio = 20%

$y_i = 1,2 x_i$ y : novo subsídio = x_i + aumento 20%

$$\bar{y} = \sum (1,2 x_i) f_i = 1,2 \sum (x_i f_i) = 1,2 \bar{x} = 1,2 * 3,125 = 3,75$$

$$var(y) = \sum (y_i - \bar{y})^2 f_i = \sum (1,2 x_i - 1,2 \bar{x})^2 f_i = \sum 1,2^2 (x_i - \bar{x})^2 f_i = 1,2^2 var x = 1,2^2 * 3,422 = 4,928$$

A média aumenta 20% e a variância aumenta $(1,2)^2 = 44\%$

Classes	x_i	$x_i' = 1,2 * x_i$	F_i	f_i	$x_i' * f_i$	$(x_i - 3,75)^2 * f_i$
0-1	0,5	0,6	6	0,1	0,06	0,992
1-2	1,5	1,8	15	0,25	0,45	0,951
2-4	3	3,6	24	0,4	1,44	0,009
4-8	6	7,2	15	0,25	1,8	2,976
			60	1	3,75	4,928

Subsídio = + 1 unidade

$Z_i = X_i + 1$: novo subsídio = x_i + aumento de 1 unidade

$$\bar{Z} = \sum z_i f_i = \sum (x_i + 1) f_i = \sum x_i f_i + \sum f_i = \bar{x} + 1 = 4,125$$

$$Var Z = \sum (Z_i - \bar{Z})^2 f_i = \sum (x_i + 1 - \bar{x} - 1)^2 f_i = \sum (x_i - \bar{x})^2 f_i = Var x$$

Com o aumento de uma unidade nos subsídios, a média aumenta em uma unidade e a variância não se altera.

Classes	x_i	$x_i' = x_i + 1$	F_i	f_i	$x_i' * f_i$	$(x_i - 4,125)^2 * f_i$
0-1	0,5	1,5	6	0,1	0,15	0,689
1-2	1,5	2,5	15	0,25	0,625	0,660
2-4	3	4	24	0,4	1,6	0,006
4-8	6	7	15	0,25	1,75	2,066
			60	1	4,125	3,422

Grupo II

a)

Distribuição Frequência Marginal relativa de X

X	$f_i^{(x)} = f_i(X = x_i) = \sum_{j=1}^5 f_{ij}$
[0-10]	0,100
]10 - 30]	0,275
]30 - 50]	0,400
]50 - 100]	0,175
]100 - 500]	0,050
Total	1,000

Distribuição Frequência Marginal relativa de Y

Y	$f_j^{(y)} = f_j(Y = y_j) = \sum_{i=1}^5 f_{ij}$
1	0,225
2	0,165
3	0,300
4	0,210
5	0,100
Total	1,000

b) i)

Distribuição Frequência Condicional “Pequenas Empresas”

Y	$f(y_j x \in [0 - 50])$
1	0,290323
2	0,212903
3	0,303226
4	0,148387
5	0,045161
Total	1

Distribuição Frequência Condicional “Grandes Empresas”

Y	$f(y_j x \in]50 - 500])$
1	0
2	0
3	0,2889
4	0,4222
5	0,2889
Total	1

ii)

Pequenas empresas

Y	$f(y, x \in [0 - 50])$	$y_i * f_i$	$(y_i - 2,45) * f_i$	$ y_i - 2,45 * f_i$
1	0,290	0,290	-0,421	0,421
2	0,213	0,426	-0,096	0,096
3	0,303	0,910	0,167	0,167
4	0,148	0,594	0,230	0,230
5	0,045	0,226	0,115	0,115
		2,445		1,029

Grandes empresas

Y	$f(y, x \in]50 - 500])$	$y_i * f_i$	$(y_i - 4) * f_i$	$ y_i - 2,45 * f_i$
1	0,000	0,000	0,000	0,000
2	0,000	0,000	0,000	0,000
3	0,289	0,867	-0,289	0,289
4	0,422	1,689	0,000	0,000
5	0,289	1,444	0,289	0,289
		4,000		0,578

DAM pequenas empresas = 1,029

DAM grandes empresas = 0,578

As pequenas empresas têm um Desvio Absoluto Médio superior ao das grandes empresas. Este resultado é facilmente compreendido através da observação do quadro de Distribuição Frequências Conjunta: as pequenas empresas podem ter 1,2,3,4, ou 5 escritórios, enquanto que as Grandes Empresas têm apenas 3 ou mais escritórios.

iii) Y é uma variável discreta.

Pequenas empresas

Y	$f(y, x \in [0 - 50])$	si
1	0,290	0,290
2	0,213	0,503
3	0,303	0,806
4	0,148	0,955
5	0,045	1,000

Mediana é o valor da variável que tem 50% das observações à sua direita, e 50% à sua esquerda. É o valor da variável para a observação central.

Mediana = 2

Ou,

Dado que o n das pequenas empresas é ímpar (155), tem que se determinar o valor da variável para a observação de ordem 78 $[(n+1)/2]$:

**Pequenas
empresas**

Y	$F(y, x \in [0 - 50])$	Si
1	45	45
2	33	78
3	47	125
4	23	148
5	7	155

Mediana =2

c) Para serem independentes:

- Distribuição marginal de Y teria que ser igual à Distribuição condicional de Y \rightarrow não se verifica para ambas Distribuições Condicionais (ver quadro em baixo)

Y	$f(y, x \in [0 - 50])$	$f(y, x \in]50 - 500])$	$f_j^{(y)} = f_j(Y = y_j) = \sum_{i=1}^5 f_{ij}$
1	0,290	0	0,225
2	0,213	0	0,165
3	0,303	0,290	0,300
4	0,148	0,420	0,210
5	0,045	0,290	0,100

- Ou, $f(x,y) = f_x * f_y \rightarrow$ não se verifica
 - Exemplo: Para x entre 50 e 100, e y=1
 - $f(x,y) = 0$; $f(x) = 0,175$; $f(y) = 0,225$
 - $f(x,y)$ é então diferente de $f(x) * f(y)$

As variáveis X e Y não são independentes!

Grupo III

a)

i)

$$I_{2006/2006}^P(L) = 100$$

$$I_{2007/2006}^P(L) = \frac{\sum P_{07}Q_{06}}{\sum P_{06}Q_{06}} = \frac{57 * \left(\frac{5355}{51}\right) + 97 * \left(\frac{5555}{101}\right) + 25 * \left(\frac{5405}{23}\right)}{5355 + 5555 + 5404} = 1,05 \text{ ou } 105$$

$$I_{2008/2006}^P(L) = \frac{\sum P_{08}Q_{06}}{\sum P_{06}Q_{06}} = \frac{65 * \left(\frac{5355}{51}\right) + 105 * \left(\frac{5555}{101}\right) + 27 * \left(\frac{5405}{23}\right)}{5355 + 5555 + 5404} = 1,161 \text{ ou } 116,1$$

ii) índice de Laspeyres

b)

$$I_{2008/2006}^P(\text{Laspeyres}) = 116$$

$$\sqrt{116} - 1 = 1,0507 - 1 = 0,077 \text{ ou } 7,07\%$$

c)

i)

2008	98	116,1
2009	100	118,47
2010	103	122

$$\frac{I_{2009/2006}}{100} = \frac{I_{2009/2008}}{100} \times \frac{I_{2008/2006}}{100} \Leftrightarrow \frac{I_{2009/2006}}{100} = \frac{100}{I_{2009/2008}} \times \frac{I_{2008/2006}}{100} \Leftrightarrow \frac{I_{2009/2006}}{100} = \frac{100}{98} \times \frac{116,1}{100} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow I_{2009/2006} = 118,47$$

$$\frac{I_{2010/2006}}{100} = \frac{I_{2010/2009}}{100} \times \frac{I_{2009/2008}}{100} \times \frac{I_{2008/2006}}{100} \Leftrightarrow \frac{I_{2010/2006}}{100} = \frac{103}{100} \times \frac{100}{98} \times \frac{116,1}{100} \Leftrightarrow$$

$$\frac{I_{2010/2006}}{100} = 122,0$$

ii) Propriedade da circularidade. Os valores obtidos não são exactos, uma vez que o índice de Laspeyres não goza da propriedade da circularidade.

d)

$$I_{08/06}^Q(F) = \sqrt{I_{08/06}^Q(P) \times I_{08/06}^Q(L)}$$

$$I_{08/06}^Q(L) = \frac{\sum P_{06}Q_{08}}{\sum P_{06}Q_{06}} = \frac{51\left(\frac{6500}{65}\right) + 101\left(\frac{7035}{105}\right) + 23\left(\frac{6507}{27}\right)}{16315} \times 100 = 106,7$$

$$I_{08/06}^Q(F) = \sqrt{I_{08/06}^Q(P) \times I_{08/06}^Q(L)} \Leftrightarrow I_{08/06}^Q(F) = \sqrt{105,79 \times 106,7} \Leftrightarrow I_{08/06}^Q(F) = 106,2$$

Grupo IV

a) O montante total de salários pagos à empresa TOPY é de 125000, superior ao montante total de salários pagos à empresa TOPX que é de 80000.

Informação sobre a empresa "TOPX"

X - Remuneração Mensal	Fi	XiFi
[0 – 500]	30	7500
] 500 – 1000]	40	30000
] 1000 – 1500]	20	25000
] 1500 – 2000]	10	17500
	N = 100	80000

Informação sobre a empresa "TOPY"

X - Remuneração Mensal	Fi	XiFi
[0 – 1000]	50	25000
] 1000 – 2000]	30	45000
] 2000 – 3000]	15	37500
] 3000 – 4000]	5	17500
	N = 100	125000

b) i)

Informação sobre a empresa "TOPX"

X - Rem. Men	Fi	fi	pj	XiFi	XiFi / 80000	qj	(pj – pj-1) * (qj + qj-1)
[0 – 500]	30	0,3	0,3	7500	0,09375	0,09375	0,028125
] 500 – 1000]	40	0,4	0,7	30000	0,375	0,46875	0,225
] 1000 – 1500]	20	0,2	0,9	25000	0,3125	0,78125	0,25
] 1500 – 2000]	10	0,1	1	17500	0,21875	1	0,178125
	N = 10			80000			0,681375

$$IG = 1 - \sum_{j=1}^m (q_j + q_{j-1}) \times (p_j - p_{j-1}) \quad 0 \leq IG \leq 1$$

$$IG = 1 - 0,681375 = 0,318625$$

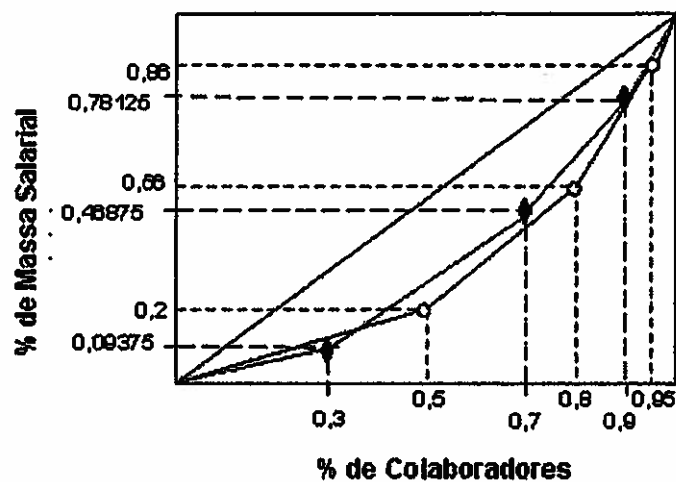
Podemos dizer que o grau de concentração salarial na empresa TOPX é médio baixo. Seria nulo se o $IG = 0$ e seria máximo se o $IG = 1$.

b) ii) Pode dizer-se que o grau de concentração salarial da empresa TOPX é muito semelhante, embora ligeiramente inferior, ao da empresa TOPY.

A área de concentração - área compreendida entre a curva de Lorenz e a diagonal da caixa (que representa o caso em que o salário se distribuiria igualmente por todos os

trabalhadores) da empresa TOPX é muito semelhante, embora ligeiramente inferior, à área de concentração da empresa TOPY.

Relembre-se que $IG = \text{Área de Concentração} / 2$



LICENCIATURAS EM ECONOMIA E GESTÃO

ESTATÍSTICA I

2ª Frequência – 5 de Junho de 2009

APRESENTE JOÃO OS CÁLCULOS EFECTUADOS
JUNTAMENTE A TODAS AS SUAS RESPOSTAS
RESPONDANDO A CADA GRUPO NUMA FOLHA SEPARADA

I (5,0 valores)

O João é vendedor de automóveis e, utilizando os seus conhecimentos de estatística e a sua larga experiência como vendedor, estabeleceu a seguinte função de probabilidade conjunta entre as variáveis aleatórias X e Y assim definidas:

X = Número de automóveis vendidos numa semana

Y = Número de demonstrações realizadas numa semana (apresentação do automóvel ao potencial comprador, realização de um teste de condução, ...).

$Y \backslash X$ (vendas)	1	2	3
0	0,30	0,20	0,10
1	0,07	0,08	0,15
2	0	0,04	0,05
3	0	0	0,01

- a) Calcule as seguintes probabilidades, explicitando a função utilizada:
 - i) Probabilidade de o João vender mais de 1 automóvel numa semana;
 - ii) Probabilidade de o João vender mais de 1 automóvel numa semana em que realiza mais do que uma demonstração.
- b) Obtenha a Função Geradora de Momentos (*FGM*) da variável aleatória X .
- c) A remuneração semanal do João é determinada pela fórmula $R=50+5X$. Utilizando a *FGM* obtida em b), determine:
 - i) Valor esperado de R
 - ii) Variância de R .
- d) “O número de automóveis que consigo vender, numa semana, não depende do número de demonstrações que faço”, afirmou o João muito desanimado. Discuta a validade desta afirmação calculando o valor da *covariância* entre X e Y . Interprete o valor obtido.

II (5,0 valores)

A Margarida adora sair à noite com os amigos, à quinta-feira e ao sábado. Ao sábado, a Margarida pode sempre sair, mas à quinta-feira só está disponível 2 vezes por mês; assim, em cada mês, a Margarida sai à noite 6 vezes.

- a) Sabemos que a Margarida foi sair à noite: qual a probabilidade de essa saída ter sido à 5ª feira? E ao sábado?

Quando sai à quinta-feira, a Margarida pode ir ao *BCB* em 10% dos casos, à *LisboaK* em 80% dos casos e ao *Lolpop* nos restantes casos.

Quando sai ao sábado, opta pelo *BCB* ou pela *LisboaK* com 70 % e 30% de probabilidade, respectivamente.

A Margarida considera que o ambiente no *Lolpop* está sempre *bom*.

No *BCB*, há 80% de probabilidade de o ambiente estar *bom* e 20% de probabilidade de estar *mau*.

Na *LisboaK* estas probabilidades dependem de haver muita gente ou não: se estiver cheia, o ambiente está bom em 60% dos casos; se estiver vazia, o ambiente estará sempre mau. Sabe-se que a probabilidade de a *LisboaK* estar cheia e o ambiente não estar bom é igual a 30%.

- b) Determine a probabilidade de a Margarida ir para a *LisboaK*;
- c) Determine a probabilidade de a *LisboaK* estar cheia;
- d) Uma amiga contou-nos que a Margarida adorou a sua última saída pois o ambiente estava muito *bom*. Determine a probabilidade de ela ter estado no *BCB*. Justifique.
- e) A Joana é amiga da Margarida e sai às 5ª feiras à noite em 50% das vezes. Determine a probabilidade de as 2 amigas se encontrarem sabendo que as suas decisões são independentes. Justifique.

III (4,0 valores)

O Sr. Manuel tem dois cafés na zona de Lisboa: o “*Baixa Café*” e o “*Alta Café*”.

Após vários anos de experiência, concluiu que a intensidade da procura no “*Alta Café*” pode ser ilustrada através da variável aleatória X com a seguinte função densidade de probabilidade:

$$f(x) = \begin{cases} k(4-x) & 1 \leq X \leq 2 \\ 0 & \text{outros valores de } X \end{cases}$$

- a) Verifique que $k = 0,4$;
- b) Determine a função de distribuição a variável aleatória X ;
- c) Utilizando a função de distribuição obtida em b), calcule:
 - i) $\text{Prob}(X > 1,7)$
 - ii) $\text{Prob}(X > 1,7 | X > 1,5)$
 - iii) $\text{Prob}(X < 1,3 | X > 1,5)$

d) O Sr. Manuel está agora a estudar a possibilidade de expansão do negócio e a sua decisão de investimento vai depender da procura X :

Se X for maior que 1.5, decide investir no “*Alta Café*” - Decisão A

Se X for menor ou igual a 1.5, decide investir no “*Baixa Café*” - Decisão B

As probabilidades de obter lucros (L), com cada uma das decisões de investimento (A ou B) são as seguintes:

$$\text{Prob}(L | A) = 0,7 \qquad \text{Prob}(L | B) = 0,5$$

Sabendo que o Sr. Manuel obteve lucros, qual a probabilidade de ter investido no “*Alta Café*”? Justifique.

IV (6,0 valores)

A função densidade de probabilidade conjunta das variáveis aleatórias X e Y é dada por:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{8} & 0 < Y < 2X < 4 \\ 0 & \text{outros valores de } X, Y \end{cases}$$

- a) Verifique que a função de densidade de probabilidade marginal da variável X é dada pela seguinte expressão:

$$f(x) = \frac{x^3}{4} \quad 0 < X < 2$$

- b) Obtenha a função de densidade de probabilidade marginal da variável Y ;
- c) Obtenha a função de densidade de probabilidade condicional da variável Y dado X ;
- d) Calcule $E(Y | X = 1,5)$
- e) Calcule $\text{Prob}(Y > X)$.

LICENCIATURAS EM ECONOMIA E GESTÃO

ESTATÍSTICA I - 2ª Frequência – 5 de Junho de 2009
CORRECÇÃO

I

X = Número de automóveis vendidos numa semana

Y = Número de demonstrações realizadas numa semana (inclui a apresentação do automóvel ao potencial comprador e a realização de um teste de condução).

$X \backslash Y$	1	2	3
0	0,30	0,20	0,10
1	0,07	0,08	0,15
2	0	0,04	0,05
3	0	0	0,01

i) Função de probabilidade marginal da variável X

X (vendas)	$f(x)$
0	0,60
1	0,30
2	0,09
3	0,01

$$\text{Prob}(X > 1) = \text{Prob}(X=2) + \text{Prob}(X=3) = 0,09 + 0,01 = 0,10$$

ii) Função de probabilidade condicional da variável X , dado $Y > 1$

X (vendas)	$f(x y > 1)$
0	$0,30 / 0,63 = 0,48$
1	$0,23 / 0,63 = 0,36$
2	$0,09 / 0,63 = 0,14$
3	$0,01 / 0,63 = 0,02$

ii)

$$\text{Prob}(X > 1 | Y > 1) = \text{Prob}(X=2 | Y > 1) + \text{Prob}(X=3 | Y > 1) = 0,14 + 0,02 = 0,16$$

b) Função Geradora de Momentos (FGM) da variável aleatória X (utilizando a função de probabilidade marginal de X já calculada)

$$M_x(t) = E(e^{tx}) = \sum_{i=0}^3 e^{tx_i} f(x_i) = e^{0t} \times f(0) + e^{1t} \times f(1) + e^{2t} \times f(2) + e^{3t} \times f(3)$$

$$M_x(t) = 0,6 + 0,3e^t + 0,09e^{2t} + 0,01e^{3t}$$

c) $R = 50 + 5X$

$$E(R) = 50 + 5E(X)$$

$$\text{Var}(50 + 5X) = 5^2 \text{Var}(X)$$

$$\frac{dM_x(t)}{dt} = 0,3e^t + 2 \times 0,09e^{2t} + 3 \times 0,01e^{3t}$$

$$\left. \frac{dM_x(t)}{dt} \right|_{t=0} = 0,3 + 2 \times 0,09 + 3 \times 0,01 = 0,51 = \mu_x = E(x)$$

$$\frac{d^2 M_x(t)}{dt^2} = 0,3e^t + 2 \times 0,18e^{2t} + 3 \times 0,03e^{3t}$$

$$\left. \frac{d^2 M_x(t)}{dt^2} \right|_{t=0} = 0,3 + 2 \times 0,18 + 3 \times 0,03 = 0,75 = \mu'_2$$

$$\text{Var}(X) = E(X - \mu)^2 = \mu'_2 - \mu^2 = 0,75 - 0,51^2 = 0,4899$$

i) $E(R) = 50 + 5E(X) = 50 + 5 \times 0,51 = 52,55$

ii) $\text{Var}(50 + 5X) = 5^2 \text{Var}(X) = 25 \times 0,4899 = 12,2475$

d) $\text{Cov}(X, Y) = E[(X - \mu_x)(Y - \mu_y)] = E(XY) - E(X)E(Y)$

$$E(X) = 0,51$$

Função de probabilidade marginal da variável Y

Y	$f(y)$
1	0,37
2	0,32
3	0,31

$$E(Y) = 1 \times 0,37 + 2 \times 0,32 + 3 \times 0,31 = 1,94$$

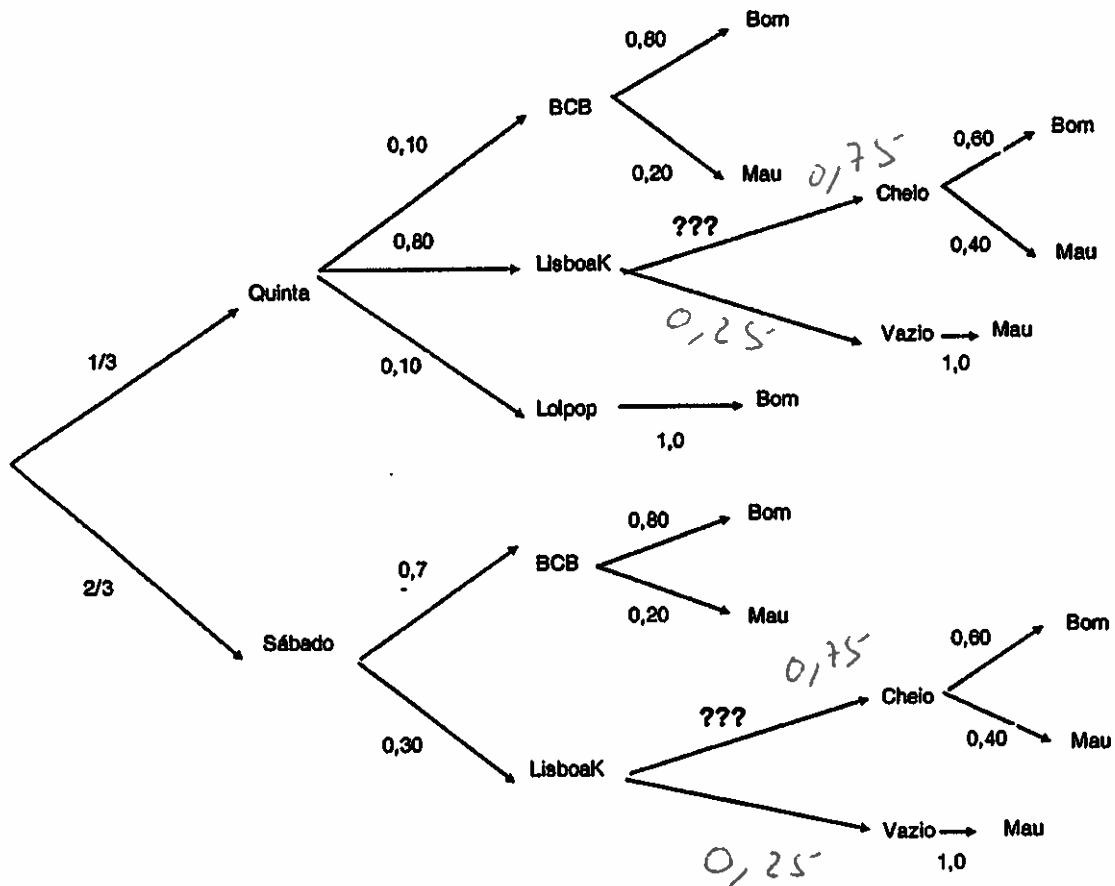
$$E(XY) = \sum_x \sum_y xy f(x, y)$$

$$\begin{aligned}
 E(XY) &= 0 \times 1 \times 0,30 + 0 \times 2 \times 0,20 + 0 \times 3 \times 0,10 + \\
 &+ 1 \times 1 \times 0,07 + 1 \times 2 \times 0,08 + 1 \times 3 \times 0,15 + \\
 &+ 2 \times 1 \times 0 + 2 \times 2 \times 0,04 + 2 \times 3 \times 0,05 + \\
 &+ 3 \times 1 \times 0 + 3 \times 2 \times 0 + 3 \times 3 \times 0,01 = 1,23
 \end{aligned}$$

$$Cov(X, Y) = 1,23 - 0,51 \times 1,94 = +0,2406$$

A covariância **positiva** entre as variáveis sugere que, quando Y sobe X também sobe, o que não confirma a afirmação do vendedor.

II



a)

Em 6 saídas, 4 são ao Sábado e 2 à 5ª feira:

$$Prob(\text{Quinta-feira}) = Prob(Q)$$

$$Prob(Q) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$Prob(\text{Sabado}) = Prob(S)$$

$$Prob(S) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

b)

$$Prob(\text{LisboaK}) = Prob(LK)$$

$$Prob(LK) = Prob(Q) \times Prob(LK|Q) + Prob(S) \times Prob(LK|S) =$$

$$Prob(LK) = \frac{1}{3} \times 0,8 + \frac{2}{3} \times 0,3 = 0,46(6)$$

$$c) \text{Prob}(\text{LisboaK cheia}) = \text{Prob}(C) = ?$$

Sabemos, em relação à LisboaK, que:

- A probabilidade de estar cheia e o ambiente não estar bom é 30% $\rightarrow \text{Prob}(C \cap \text{Mau}) = 0,30$;
- A probabilidade de o ambiente estar bom quando está cheia é 60%, logo a probabilidade de estar mau, quando está cheia, é 40%: $\rightarrow \text{Prob}(\text{Mau}|C) = 0,40$

Utilizando o conceito de probabilidade condicional,

$$\text{Prob}(\text{Mau}|C) = \frac{\text{Prob}(C \cap \text{Mau})}{\text{Prob}(C)}$$

$$0,4 = \frac{0,3}{\text{Prob}(C)} \Rightarrow \text{Prob}(C) = \frac{0,3}{0,4} = 0,75$$

d)

$$\text{Prob}(BCB|Bom) = \frac{\text{Prob}(BCB \cap Bom)}{\text{Prob}(Bom)}$$

$$\text{Prob}(Bom) =$$

$$\text{Prob}(Q) \times \text{Prob}(BCB|Q) \times \text{Prob}(Bom|BCB \cap Q) +$$

$$\text{Prob}(Q) \times \text{Prob}(\text{LisboaK}|Q) \times \text{Prob}(\text{Cheio}) \times \text{Prob}(Bom|\text{Cheio}) +$$

$$\text{Prob}(Q) \times \text{Prob}(\text{Lolpop}|Q) \times \text{Prob}(Bom|\text{Lolpop} \cap Q) +$$

$$\text{Prob}(S) \times \text{Prob}(BCB|S) \times \text{Prob}(Bom|BCB \cap S) +$$

$$\text{Prob}(S) \times \text{Prob}(\text{LisboaK}|S) \times \text{Prob}(\text{Cheio}) \times \text{Prob}(Bom|\text{Cheio}) =$$

$$\text{Prob}(Bom) =$$

$$\frac{1}{3} \times 0,10 \times 0,80 + \frac{1}{3} \times 0,80 \times 0,75 \times 0,60 + \frac{1}{3} \times 0,10 \times 1 +$$

$$\frac{2}{3} \times 0,70 \times 0,80 + \frac{2}{3} \times 0,30 \times 0,75 \times 0,60 =$$

$$= 0,64(3)$$

$$\text{Prob}(Bom \cap BCB) =$$

$$\text{Prob}(Q) \times \text{Prob}(BCB|Q) \times \text{Prob}(Bom|BCB \cap Q) +$$

$$\text{Prob}(S) \times \text{Prob}(BCB|S) \times \text{Prob}(Bom|BCB \cap S) =$$

$$Prob(Bom \cap BCB) =$$

$$\frac{1}{3} \times 0,10 \times 0,80 + \frac{2}{3} \times 0,70 \times 0,80 = 0,40$$

$$Prob(BCB|Bom) = \frac{Prob(BCB \cap Bom)}{Prob(Bom)} = \frac{0,40}{0,64(3)} = 0,622$$

e) Dado que as decisões da Joana e Margarida de sair à 5ª feira são independentes, podemos escrever:

$$Prob(Joana \cap Margarida) = Prob(Joana) \times Prob(Margarida)$$

$$Prob(Joana \cap Margarida) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

III

$$f(x) = \begin{cases} k(4-x) & 1 \leq X \leq 2 \\ 0 & \text{outros valores de } X \end{cases}$$

$$a) \int_x f(x) dx = 1 \Rightarrow \int_1^2 k(4-x) dx = 1$$

$$\Rightarrow k \left[4x - \frac{x^2}{2} \right]_1^2 = k \left[\left(4 \times 2 - \frac{2^2}{2} \right) - \left(4 \times 1 - \frac{1^2}{2} \right) \right] = 1 \Rightarrow (...) \Rightarrow k = 0,4$$

b)

$$\text{Se } X < 1 \rightarrow F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0$$

$$\text{Se } 1 \leq X \leq 2 \rightarrow F(x) = F(1) + \int_1^x f(t) dt = 0 + 0,4 \int_1^x (4-t) dt = (...) = 1,6x - 0,2x^2 - 1,4$$

$$\text{Se } X > 2 \rightarrow F(x) = F(2) + \int_2^x f(t) dt = 1 + \int_2^x 0 dt = 1$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & X < 1 \\ 1,6x - 0,2x^2 - 1,4 & 1 \leq X \leq 2 \\ 1 & X > 2 \end{cases}$$

c)

i)

$$\begin{aligned} \text{Prob}(X > 1,7) &= 1 - \text{Prob}(X \leq 1,7) = 1 - F(1,7) = \\ &= 1 - [1,6 \times 1,7 - 0,2 \times 1,7^2 - 1,4] = 0,258 \end{aligned}$$

ii)

$$\text{Prob}(X > 1,7 | X > 1,5) = \frac{\text{Prob}(X > 1,7 \wedge X > 1,5)}{\text{Prob}(X > 1,5)} = \frac{\text{Prob}(X > 1,7)}{\text{Prob}(X > 1,5)} = \frac{1 - F(1,7)}{1 - F(1,5)} = \frac{0,258}{1 - 0,55} = 0,57(3)$$

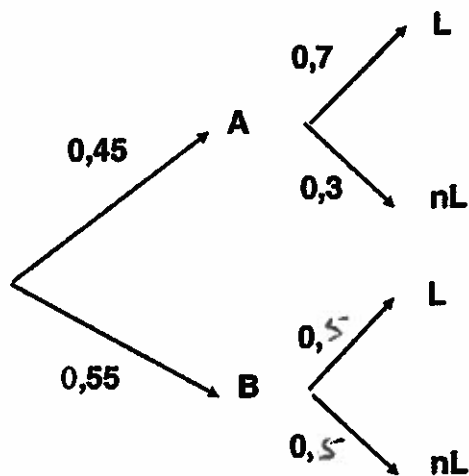
iii)

$$\text{Prob}(X < 1,3 | X > 1,5) = \frac{\text{Prob}(X < 1,3 \wedge X > 1,5)}{\text{Prob}(X > 1,5)} = \frac{0}{\text{Prob}(X > 1,5)} = 0$$

d)

$$\text{Prob}(A) = \text{Prob}(X > 1,5) = 1 - F(1,5) = 0,45$$

$$\text{Prob}(B) = \text{Prob}(X \leq 1,5) = F(1,5) = 0,55$$



$$\begin{aligned} \text{Prob}(L) &= \text{Prob}(A) \times \text{Prob}(L|A) + \text{Prob}(B) \times \text{Prob}(L|B) = \\ &= 0,45 \times 0,7 + 0,55 \times 0,5 = 0,59 \end{aligned}$$

$$\text{Prob}(A|L) = \frac{\text{Prob}(A \cap L)}{\text{Prob}(L)} = \frac{0,7 \times 0,45}{0,59} = 0,53$$

IV

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{8} & 0 < Y < 2X < 4 \\ 0 & \text{outros valores de } X, Y \end{cases}$$

a)

$$f(x) = \int_y f(x, y) dy = \int_0^{2x} \left(\frac{xy}{8} \right) dy = \left(\frac{x}{8} \right) \int_0^{2x} (y) dy = (\dots) = \frac{x^3}{4} \quad \text{com } 0 < X < 2$$

b)

$$f(y) = \int_x f(x, y) dx = \int_{0,5y}^2 \left(\frac{xy}{8} \right) dx = \left(\frac{y}{8} \right) \int_{0,5y}^2 (x) dx = (\dots) = \frac{y}{4} - \frac{y^3}{64}$$

com $0 < Y < 4$

c)

$$f(y|x) = \frac{f(x, y)}{f(x)} = \frac{\frac{xy}{8}}{\frac{x^3}{4}} = \frac{y}{2x^2} \quad \text{com } 0 < Y < 2X < 4$$

d)

$$E(Y|X) = \int_0^{2x} y f(y|X) dy$$

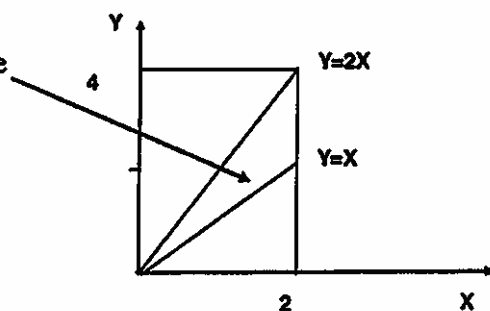
$$E(Y|X=1,5) = \int_0^{2 \times 1,5} y f(y|X=1,5) dy$$

$$f(y|X=1,5) = \frac{y}{2(1,5)^2} = \frac{y}{4,5}$$

$$E(Y|X=1,5) = \int_0^3 y \left(\frac{y}{4,5} \right) dy = \frac{1}{4,5} \int_0^3 (y^2) dy = (\dots) = 2$$

e)

Área relevante



$$Prob(Y > X) = \int_0^2 \left[\int_x^{2x} f(x, y) dy \right] dx.$$

$$= \frac{1}{8} \int_0^2 x \left[\int_x^{2x} y dy \right] dx = \frac{1}{8} \int_0^2 x \left[\frac{y^2}{2} \right]_x^{2x} dx$$

$$= \frac{1}{16} \int_0^2 x \left[(2x)^2 - (x^2) \right] dx = \frac{1}{16} \int_0^2 (4x^3 - x^3) dx = \frac{3}{16} \int_0^2 x^3 dx$$

$$= \frac{3}{16} \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^2 = \frac{3}{16} \left(\frac{2^4}{4} \right) = 0,75$$



LICENCIATURAS EM ECONOMIA E GESTÃO

ESTATÍSTICA I

1º Teste - 2 de Novembro de 2009

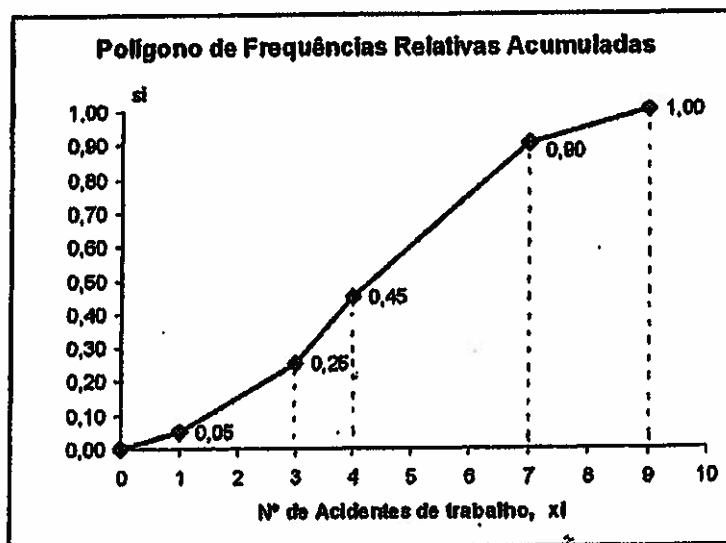
Responda em folhas separadas para cada grupo. Se eventualmente não fizer algum grupo, entregue em branco a folha respectiva devidamente identificada.

Leia cuidadosamente a totalidade de cada grupo antes de o responder.

Explicite todas as hipóteses e os cálculos que tiver de fazer para a resolução dos problemas. Use um mínimo de quatro casas decimais. Os grupos ou as perguntas podem não estar pela ordem em que a matéria foi leccionada. Um grupo pode incluir diferentes matérias.

I (6,0 valores)

Considere o seguinte polígono de frequências relativas acumuladas referentes à distribuição de 200 empresas segundo o número de acidentes de trabalho por ano (variável X).



- a) (i) Calcule a média, a mediana e a moda da variável "nº de acidentes de trabalho por ano".
- (ii) Com base em a) (i), o que conclui quanto à assimetria da distribuição? Justifique e interprete.
- b) As empresas cujo número de acidentes de trabalho por ano está compreendido no intervalo que dista um desvio-padrão ou menos da média, ou seja no intervalo $\bar{X} \pm S$, são empresas com condições de segurança aceitáveis. Quantas das 200 empresas mereceriam tal classificação?

III (6,0 valores)

Considere os seguintes dados relativos às exportações, a preços correntes, realizadas num determinado sector de actividade, nos últimos três anos.

Produtos	2006		2007		2008	
	Valor das exportações	Preço	Valor das exportações	Preço	Valor das exportações	Preço
A	1272	2	1590	3	1912	4
B		1	2840	1	3120	2
C	3404	2	3660	2		3

Nota: Valores e preços expressos numa determinada unidade monetária.

- a) (i) A partir da informação disponível, determine a evolução do nível de preços, para o período 2006–2008, utilizando um índice de rácios ponderado com base em 2007.
- (ii) Como se designa o índice que utilizou?
- (iii) Interprete os resultados obtidos.
- b) Qual a taxa média de crescimento anual do valor das exportações do produto A entre 2006 e 2008?
- c) Interessada em analisar a evolução dos preços neste sector na última década (ou seja, desde 1999), a associação representativa do sector forneceu os seguintes dados:

Ano	Índice preços
1999	100,00
2000	102,00
2001	96,90
2002	112,20
2003	122,40
2004	128,52
2005	137,70
2006	153,00

- (i) A partir da informação acima, conjugada com a alínea a), obtenha a evolução dos preços entre 1999 e 2008 através de um índice de preços com base em 2000.
- (ii) Discuta se as operações efectuadas em c) (i) produzem resultados exactos. Justifique analiticamente.
- d) Qual o valor das exportações deste sector em 2007 a preços constantes de 2000?

$$F_i^{(x)} = F_i(X = x_i) = \sum_j F_{ij}$$

$$F_j^{(y)} = F_j(Y = y_j) = \sum_i F_{ij}$$

$$f(y_j | x_i) = \frac{F(x_i, y_j)}{F_i^{(x)}} = \frac{f(x_i, y_j)}{f_i^{(x)}}$$

$$f(x_i | y_j) = \frac{F(x_i, y_j)}{F_j^{(y)}} = \frac{f(x_i, y_j)}{f_j^{(y)}}$$

$$COV(X, Y) = \frac{1}{n} \sum_k (x_k - \bar{x})(y_k - \bar{y}) = \frac{1}{n} \sum_k x_k y_k - \bar{x} \bar{y}$$

$$COV(X, Y) = \frac{1}{n} \sum_i \sum_j F_{ij} (x_i - \bar{x})(y_j - \bar{y}) = \sum_i \sum_j f_{ij} (x_i - \bar{x})(y_j - \bar{y}) = \sum_i \sum_j (x_i y_j f_{ij}) - \bar{x} \bar{y}$$

$$r(X, Y) = \frac{COV(X, Y)}{s_x s_y}$$

Nota: As fórmulas abaixo têm 100 como referência para o ano base.

$$I_{q_0}^{(p)} = \frac{p_t}{p_0} \times 100 \quad I_{q_0}^{(q)} = \frac{q_t}{q_0} \times 100 \quad I_{q_0}^{(y)} = \frac{p_t q_t}{p_0 q_0} \times 100 \quad I_{q_0}^{(p)} = \frac{\sum_{i=1}^n p_{ti}}{\sum_{i=1}^n p_{0i}} \times 100$$

$$I_{(q_0)}^{(p)} = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n \frac{p_{ti}}{p_{0i}} \right) \times 100$$

$$I_{q_0}^{(q)} = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n \frac{q_{ti}}{q_{0i}} \right) \times 100$$

$$I_{(q_0)}^{(p)} = \left(\sum_{i=1}^n \frac{p_{ti}}{p_{0i}} \times w_i \right) \times 100$$

$$I_{q_0}^{(q)} = \left(\sum_{i=1}^n \frac{q_{ti}}{q_{0i}} \times w_i \right) \times 100$$

$$I_{q_0}^{(p)}(L) = \frac{\sum_{i=1}^n p_{ti} q_{0i}}{\sum_{i=1}^n p_{0i} q_{0i}} \times 100$$

$$I_{q_0}^{(q)}(L) = \frac{\sum_{i=1}^n p_{0i} q_{ti}}{\sum_{i=1}^n p_{0i} q_{0i}} \times 100;$$

$$I_{q_0}^{(p)}(P) = \frac{\sum_{i=1}^n p_{ti} q_{ti}}{\sum_{i=1}^n p_{0i} q_{ti}} \times 100$$

$$I_{q_0}^{(q)}(P) = \frac{\sum_{i=1}^n p_{ti} q_{ti}}{\sum_{i=1}^n p_{ti} q_{0i}} \times 100$$

$$I_{q_0}(F) = \sqrt{I_{q_0}(L) \times I_{q_0}(P)}$$

Nota: o formulário não esgota todos os tratamentos estatísticos possíveis.

LICENCIATURAS EM ECONOMIA E GESTÃO

ESTATÍSTICA I

1º Teste - 2 de Novembro de 2009

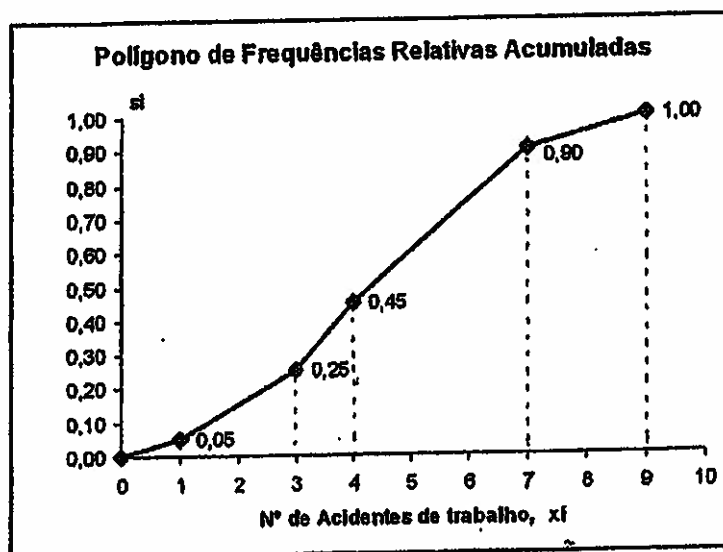
Responda em folhas separadas para cada grupo. Se eventualmente não fizer algum grupo, entregue em branco a folha respectiva devidamente identificada.

Leia cuidadosamente a totalidade de cada grupo antes de o responder.

Explicite todas as hipóteses e os cálculos que tiver de fazer para a resolução dos problemas. Use um mínimo de quatro casas decimais. Os grupos ou as perguntas podem não estar pela ordem em que a matéria foi leccionada. Um grupo pode incluir diferentes matérias.

I (6,0 valores)

Considere o seguinte polígono de frequências relativas acumuladas referentes à distribuição de 200 empresas segundo o número de acidentes de trabalho por ano (variável X).



- a) (i) Calcule a média, a mediana e a moda da variável "nº de acidentes de trabalho por ano".
- (ii) Com base em a) (i), o que conclui quanto à assimetria da distribuição? Justifique e interprete.
- b) As empresas cujo número de acidentes de trabalho por ano está compreendido no intervalo que dista um desvio-padrão ou menos da média, ou seja no intervalo $\bar{X} \pm S$, são empresas com condições de segurança aceitáveis. Quantas das 200 empresas mereceriam tal classificação?

II (8,0 valores)

Procedeu-se a um inquérito de mercado tendo em vista relacionar o rendimento do consumidor com o nível de consumo de um determinado produto. Designando por X e Y , respectivamente, estas variáveis, os resultados obtidos a partir de uma amostra de dimensão 100 podem ser resumidos do seguinte modo:

		Y (Unidades consumidas por mês)				
		[0 - 10]] 10 - 20]] 20 - 40]] 40 - 80]	Total
X (rendimento por mês)	[4 - 6]	28	5	0	2	35
] 6 - 8]	10	8	4	4	26
] 8 - 10]	10	5	12	4	31
] 10 - 12]	0	2	4	2	8
Total		48	20	20	12	100

Nota: Sabe-se também que $\sum_i \sum_j (x_i y_j f_{ij}) = 148,8$

- Determine o consumo médio do produto na classe modal de rendimento.
 - Determine o consumo médio do produto para todos os consumidores.
 - Com base no resultado obtido em a) (i) e a) (ii) que conclusões pode tirar relativamente à independência entre as variáveis X e Y . Justifique analiticamente a sua resposta.
- Calcule o coeficiente de correlação linear entre as duas variáveis e interprete o resultados obtido.
- Compare, através de um indicador adequado, a dispersão da variável X (rendimento por mês) com a dispersão da variável Y (unidades consumidas por mês).
- Verifique se é verdadeira a seguinte afirmação: "Nos grandes consumidores do produto verifica-se maior concentração do rendimento." (Entende-se por grande consumidor aquele que consome mais de 20 unidades/mês).

III (6,0 valores)

Considere os seguintes dados relativos às exportações, a preços correntes, realizadas num determinado sector de actividade, nos últimos três anos.

Produtos	2006		2007		2008	
	Valor das exportações	Preço	Valor das exportações	Preço	Valor das exportações	Preço
A	1272	2	1590	3	1912	4
B		1	2840	1	3120	2
C	3404	2	3660	2		3

Nota: Valores e preços expressos numa determinada unidade monetária.

- a)
 - (i) A partir da informação disponível determine a evolução do nível de preços, para o período 2006–2008, utilizando um índice de rácios ponderado com base em 2007.
 - (ii) Como se designa o índice que utilizou?
 - (iii) Interprete os resultados obtidos.
- b) Qual a taxa média de crescimento anual do valor das exportações do produto A entre 2006 e 2008?
- c) Interessada em analisar a evolução dos preços neste sector na última década (ou seja, desde 1999), a associação representativa do sector forneceu os seguintes dados:

Ano	Índice preços
1999	100,00
2000	102,00
2001	96,90
2002	112,20
2003	122,40
2004	128,52
2005	137,70
2006	153,00

- (i) A partir da informação acima, conjugada com a alínea a), obtenha a evolução dos preços entre 1999 e 2008 através de um índice de preços com base em 2000.
 - (ii) Discuta se as operações efectuadas em c) (i) produzem resultados exactos. Justifique analiticamente.
- d) Qual o valor das exportações deste sector em 2007 a preços constantes de 2000 ?

LICENCIATURAS EM ECONOMIA E GESTÃO

ESTATÍSTICA I

FORMULÁRIO

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_i x_i F_i = \sum_i x_i f_i$$

$$\bar{x} = \sum_i w_i x_i \quad (\text{com } \sum_i w_i = 1)$$

$$\bar{x}_g = \sqrt[n]{x_1^{F_1} \times x_2^{F_2} \times \dots}$$

$$\bar{x}_h = \frac{1}{\frac{1}{n} \sum_i F_i \frac{1}{x_i}} = \frac{1}{\sum_i f_i \frac{1}{x_i}}$$

$$M = l_m + k \times \frac{F_m - F_{m-1}}{(F_m - F_{m+1}) + (F_m - F_{m-1})}$$

$$M_e = l_{m_e} + k_{m_e} \frac{0,5 - s(l_{m_e})}{s(L_{m_e}) - s(l_{m_e})}$$

$$Q_l = l_l + k_l \frac{0,25 - s(l_l)}{s(L_l) - s(l_l)}$$

$$Q_m = l_m + k_m \frac{0,75 - s(l_m)}{s(L_m) - s(l_m)}$$

$$IV = \max_i \{x_i\} - \min_i \{x_i\}$$

$$IIQ = Q_m - Q_l$$

$$DAM_x = \frac{1}{n} \sum_i F_i |x_i - \bar{x}| = \sum_i f_i |x_i - \bar{x}|$$

$$s_x^2 = \frac{1}{n} \sum_i F_i (x_i - \bar{x})^2 = \sum_i f_i (x_i - \bar{x})^2 = \sum_i f_i x_i^2 - \bar{x}^2$$

$$s_x = +\sqrt{s_x^2}$$

$$C_v = \frac{s_x}{\bar{x}} \times 100$$

$$CA_p = \frac{\bar{X} - M_e}{s}$$

$$CA_q = \frac{Q_3 + Q_1 - 2M_e}{Q_3 - Q_1}$$

$$K_{Fisher} = \frac{\sum_{i=1}^m (x_i - \bar{X})^4 F_i / n}{\left[\sum_{i=1}^m (x_i - \bar{X})^2 F_i / n \right]^2}$$

$$K = \frac{Q_3 - Q_1}{2(P_{90} - P_{10})}$$

$$IG = 1 - \sum_{j=1}^m (q_j + q_{j-1}) \times (p_j - p_{j-1})$$

$$F_i^{(x)} = F_i(X = x_i) = \sum_j F_{ij}$$

$$F_j^{(y)} = F_j(Y = y_j) = \sum_i F_{ij}$$

$$f(y_j | x_i) = \frac{F(x_i, y_j)}{F_i^{(x)}} = \frac{f(x_i, y_j)}{f_i^{(x)}}$$

$$f(x_i | y_j) = \frac{F(x_i, y_j)}{F_j^{(y)}} = \frac{f(x_i, y_j)}{f_j^{(y)}}$$

$$COV(X, Y) = \frac{1}{n} \sum_k (x_k - \bar{x})(y_k - \bar{y}) = \frac{1}{n} \sum_k x_k y_k - \bar{x} \bar{y}$$

$$COV(X, Y) = \frac{1}{n} \sum_i \sum_j F_{ij} (x_i - \bar{x})(y_j - \bar{y}) = \sum_i \sum_j f_{ij} (x_i - \bar{x})(y_j - \bar{y}) = \sum_i \sum_j (x_i y_j f_{ij}) - \bar{x} \bar{y}$$

$$r(X, Y) = \frac{COV(X, Y)}{s_x s_y}$$

Nota: As fórmulas abaixo têm 100 como referência para o ano base.

$$I_{q_0}^{(p)} = \frac{p_t}{p_0} \times 100 \quad I_{q_0}^{(q)} = \frac{q_t}{q_0} \times 100 \quad I_{q_0}^{(p)} = \frac{p_t q_t}{p_0 q_0} \times 100 \quad I_{q_0}^{(p)} = \frac{\sum_{i=1}^n p_{ti}}{\sum_{i=1}^n p_{oi}} \times 100$$

$$I_{(q_0)}^{(p)} = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n \frac{p_{ti}}{p_{oi}} \right) \times 100$$

$$I_{q_0}^{(q)} = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n \frac{q_{ti}}{q_{oi}} \right) \times 100$$

$$I_{(q_0)}^{(p)} = \left(\sum_{i=1}^n \frac{p_{ti}}{p_{oi}} \times w_i \right) \times 100$$

$$I_{q_0}^{(q)} = \left(\sum_{i=1}^n \frac{q_{ti}}{q_{oi}} \times w_i \right) \times 100$$

$$I_{q_0}^{(p)}(L) = \frac{\sum_{i=1}^n p_{ti} q_{oi}}{\sum_{i=1}^n p_{oi} q_{oi}} \times 100$$

$$I_{q_0}^{(q)}(L) = \frac{\sum_{i=1}^n p_{oi} q_{ti}}{\sum_{i=1}^n p_{oi} q_{oi}} \times 100;$$

$$I_{q_0}^{(p)}(P) = \frac{\sum_{i=1}^n p_{ti} q_{ti}}{\sum_{i=1}^n p_{oi} q_{ti}} \times 100$$

$$I_{q_0}^{(q)}(P) = \frac{\sum_{i=1}^n p_{ti} q_{ti}}{\sum_{i=1}^n p_{ti} q_{oi}} \times 100$$

$$I_{q_0}(F) = \sqrt{I_{q_0}(L) \times I_{q_0}(P)}$$

Nota: o formulário não esgota todos os tratamentos estatísticos possíveis.

Estadística I

1º Teste

2009.11.02

*RESOLUÇÃO SINTÉTICA. OUTRAS FORMAS
DE RESOLUÇÃO SÃO POSSÍVEIS.*

GRUPO I

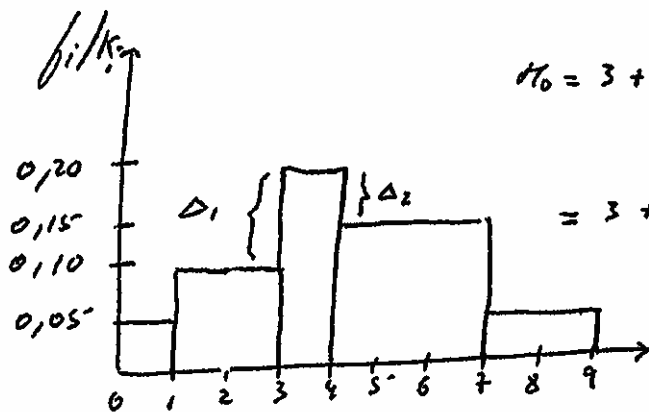
Quadro de apoio à resolução:

Classe	x_i	f_i	Cum f_i	x_i^2	$x_i^2 f_i$	f_i / K_i	$x_i f_i$
0 - 1	0,5	0,05	0,05	0,25	0,0125	0,05	0,025
1 - 3	2	0,20	0,25	4	0,8	0,10	0,400
3 - 4	3,5	0,20	0,45	12,25	2,45	0,20	0,700
4 - 7	5,5	0,45	0,90	30,25	13,6125	0,15	2,475
7 - 9	8	0,10	1,00	64	6,4	0,10	0,800
		<u>1,00</u>			<u>23,275</u>		<u>4,4</u>

a) $\bar{X} = \sum x_i f_i = 4,4$

$$M_c = L_i(M_c) + \frac{0,5 - A(M_{c-1})}{f(M_c)} \times a(M_c) =$$

$$= 4 + \frac{0,5 - 0,45}{0,45} \times 3 = 4 + 0,1(1) \times 3 = 4,3$$



$$M_0 = 3 + \frac{(0,20 - 0,10)}{(0,20 - 0,10) + (0,20 - 0,15)} \times 1 =$$

$$= 3 + \frac{0,10}{0,15} \times 1 = 3,6$$

Não pedida

Total de acidentes de trabalho:

$$\sum x_i F_i = \sum x_i f_i \times n =$$

$$= 4,4 \times 200 = 880$$

Interpretar a média:

Se o total de 880 acidentes está mais igualmente distribuído pelas 200 empresas, cada uma das empresas tem 4,4 acidentes de trabalho.

ii)

$$\bar{X} \geq M_c > M_0 \text{ ou } M_0 < M_c < \bar{X}$$

Assimétrica positiva ou negativa? esquerda.

A maior parte das empresas tem menos acidentes de trabalho.

GRUPO II

	Y: UNIDADES CONSUMIDAS POR MÊS				F _i (ac)
	0-10 5	10-20 15	20-40 30	40-80 60	
X: RENDIMENTO 4-6 5	28	5	0	2	35
6-8 7	10	8	4	4	26
8-10 9	10	5	12	4	31
10-12 11	0	2	4	2	8
F ₂ (Y)	48	20	20	12	100

NOTA: Não era preciso passar o quadro.

a) (i) $\bar{Y}_{\text{CLASSE MODAL}} = \frac{5 \times 28 + 15 \times 5 + 30 \times 0 + 60 \times 2}{35} =$
 $= \frac{335}{35} = 9,5714 \text{ UNIDADES}$

(ii) $\bar{Y} = \frac{5 \times 48 + 15 \times 20 + 30 \times 20 + 60 \times 12}{100} =$
 $= \frac{1860}{100} = 18,6 \text{ UNIDADES}$

b) Para haver independência as médias calculadas em a)(i) e a)(ii) teriam de ser iguais. Como não são iguais X e Y não são independentes.

JUSTIFICAÇÃO ANALÍTICA:

Para haver independência $f(Y_j | x_i) = f_2(Y_j)$

POR OUTRO LADO $\bar{Y} = \sum_j Y_j f_2(Y_j)$

PELO QUE $\bar{Y}_{\text{CLASSE MODAL}} = \bar{Y}_{\text{GERAL}}$ SE HOUVER INDEPENDÊNCIA ENTRE X E Y.

$$c) \quad CV_x = \frac{S_x}{\bar{x}} = \frac{1,9653}{7,24} = 0,2715 \text{ ou } 27,15\%$$

$$CV_y = \frac{S_y}{\bar{y}} = \frac{17,973}{18,6} = 0,9663 \text{ ou } 96,63\%$$

A dispersão relativa das unidades consumidas por mês é maior do que a dispersão relativa do rendimento por mês.

ESTATÍSTICA I

1º TESTE, 2009/11/02

GRUPO III

$$a) \quad i) \quad I^P(L) = \frac{\sum_i P_{ti} q_{07i}}{\sum_i P_{07i} q_{07i}} = \frac{\sum_i \frac{P_{ti}}{P_{07i}} P_{07i} q_{07i}}{\sum_i P_{07i} q_{07i}} = \sum_i \frac{P_{ti}}{P_{07i}} w_i$$

$$\sum_i P_{07i} q_{07i} = 1590 + 2840 + 3660 = 8090$$

$$w_A = \frac{1590}{8090} = 0,1965$$

$$w_B = \frac{2840}{8090} = 0,3511$$

$$w_C = \frac{3660}{8090} = 0,4524$$

$$w_A + w_B + w_C = 1$$

$$I_{06/07}^P = \frac{2}{3} \times 0,1965 + \frac{1}{1} \times 0,3511 + \frac{2}{2} \times 0,4524 = 0,9345 \text{ ou } 93,45$$

$$I_{07/07}^P = 1 \text{ ou } 100$$

$$I_{08/07}^P = \frac{4}{3} \times 0,1965 + \frac{2}{1} \times 0,3511 + \frac{3}{2} \times 0,4524 = 1,6428 \text{ ou } 164,28$$

ii) Índice preço de longas passagens

$$iii) \quad \frac{100 - 93,45}{93,45} = 0,07 \text{ ou } 7\%$$

Os preços das exportações cresceram 7% de 2006 para 2007
e 64,28% de 2007 para 2008.

$$b) \quad \frac{1912}{1272} = 1,5031$$

$$\text{crescimento anual: } \sqrt{1,5031} = 1,226$$

A taxa de crescimento anual foi de 22,6%.



LICENCIATURAS EM ECONOMIA E GESTÃO

ESTATÍSTICA I

2º Teste - 14 de Janeiro de 2010

Responda em folhas separadas para cada grupo. Se eventualmente não fizer algum grupo, entregue em branco a folha respectiva devidamente identificada.

Explicita todas as hipóteses e os cálculos que tiver de fazer para a resolução dos problemas. Use um mínimo de quatro casas decimais. Leia cuidadosamente a totalidade de cada grupo antes de o responder.

Os grupos ou as perguntas podem não estar pela ordem em que a matéria foi leccionada. Um grupo pode incluir diferentes matérias.

I (6,0 valores)

O número de unidades procuradas mensalmente dos produtos X e Y de uma determinada empresa, é uma variável aleatória com a seguinte função de probabilidade conjunta $f(x,y)$:

		Y (Unidades procuradas do produto Y)			
		0	2	4	6
X (unidades procuradas do produto X)	0	0,05	0,10	0,15	0,20
	1	0,04	0,08	0,12	0,16
	2	0,01	0,02	0,03	0,04

- O director de vendas da empresa está preocupado porque suspeita que, ao vender simultaneamente os dois produtos da empresa, quando o número de unidades procuradas de um dos produtos sobe, o número de unidades procuradas do outro produto desce.
 - O director de vendas da empresa tem razão? (Justifique quantificadamente calculando o indicador adequado).
 - A empresa pretende agora separar as suas actividades por duas empresas, uma para o produto X e outra para o produto Y , para desta forma reduzir a variação das unidades procuradas conjuntas de X e de Y . Considera esta atitude correcta? Justifique.
- A empresa conseguiu saber que no próximo mês não haverá procura do produto Y . Tendo em conta esta informação, calcule o valor esperado e a variância das unidades procuradas do produto X , a partir da função geradora de momentos.
- Sabendo-se que o produto X é vendido a 2000 euros a unidade e o produto Y a 1000 euros a unidade, e que ambos têm um custo de produção de 500 euros por unidade,
 - Qual a função de probabilidade do lucro mensal da empresa se esta produzir 1 unidade do produto X e 4 unidades do produto Y ?
 - Qual o lucro que a empresa deverá esperar nas circunstâncias referidas em ci)?

II (8,0 valores)

O Sr. Anacleto é dono de um pequeno bar na praia da "Vaga". Ele vai casar a sua filha Etelvina no final do ano de 2010 e declarou que o número de convidados dependeria do valor das vendas realizadas durante o Verão. Se o valor das vendas for menor ou igual a 26.000 euros convida apenas a família, caso contrário convida a família e os amigos.

As vendas do Restaurante dependem de duas variáveis independentes entre si: as temperaturas médias do Verão e a existência ou não de Bandeira Azul.

- Se o Verão estiver muito quente as vendas serão de 20.000 euros. Se o Verão estiver fresco as vendas serão de 15.000 euros.
- A existência de Bandeira azul proporciona um acréscimo de vendas, em relação aos resultados anteriores, de 5.000 euros.
- A probabilidade do Verão ser muito quente é de 0,6 e a probabilidade de a praia da Vaga ter Bandeira azul é de 0,5.

É possível que o Sr. Anacleto também faça vendas para a praia ao lado no valor de 10.000 euros. Se o Verão estiver muito quente a probabilidade de fazer estas vendas é de 0,7 enquanto que se o Verão for fresco esta probabilidade passa para 0,4.

Ainda, os primos da Etelvina prometem que no caso de não se conseguirem vendas na praia ao lado, e se o Verão estiver fresco, organizam um campeonato de surf que fará de certeza aumentar as vendas em 7.000 euros.

- a) Represente a situação descrita através de um diagrama em árvore.
- b) Sabendo-se que houve vendas para a praia ao lado, qual a probabilidade da praia da Vaga ter recebido Bandeira Azul?
- c) Qual a probabilidade da Etelvina conseguir convidar os seus amigos para o casamento?
- d) Sabendo-se que apenas a família foi convidada para o casamento, qual a probabilidade de o Verão ter estado muito quente?
- e) Construa a função de probabilidade e calcule o valor esperado das vendas.

II (8,0 valores)

O Sr. Anacleto é dono de um pequeno bar na praia da "Vaga". Ele vai casar a sua filha Etelvina no final do ano de 2010 e declarou que o número de convidados dependeria do valor das vendas realizadas durante o Verão. Se o valor das vendas for menor ou igual a 26.000 euros convida apenas a família, caso contrário convida a família e os amigos.

As vendas do Restaurante dependem de duas variáveis independentes entre si: as temperaturas médias do Verão e a existência ou não de Bandeira Azul.

- Se o Verão estiver muito quente as vendas serão de 20.000 euros. Se o Verão estiver fresco as vendas serão de 15.000 euros.
- A existência de Bandeira azul proporciona um acréscimo de vendas, em relação aos resultados anteriores, de 5.000 euros.
- A probabilidade do Verão ser muito quente é de 0,6 e a probabilidade de a praia da Vaga ter Bandeira azul é de 0,5.

É possível que o Sr. Anacleto também faça vendas para a praia ao lado no valor de 10.000 euros. Se o Verão estiver muito quente a probabilidade de fazer estas vendas é de 0,7 enquanto que se o Verão for fresco esta probabilidade passa para 0,4.

Ainda, os primos da Etelvina prometem que no caso de não se conseguirem vendas na praia ao lado, e se o Verão estiver fresco, organizam um campeonato de surf que fará de certeza aumentar as vendas em 7.000 euros.

- a) Represente a situação descrita através de um diagrama em árvore.
- b) Sabendo-se que houve vendas para a praia ao lado, qual a probabilidade da praia da Vaga ter recebido Bandeira Azul?
- c) Qual a probabilidade da Etelvina conseguir convidar os seus amigos para o casamento?
- d) Sabendo-se que apenas a família foi convidada para o casamento, qual a probabilidade de o Verão ter estado muito quente?
- e) Construa a função de probabilidade e calcule o valor esperado das vendas.



III (6,0 valores)

Considere a função densidade de probabilidade conjunta:

$$f(x, y) = \begin{cases} 1,5 - y, & \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 \end{cases} \\ 0 & \text{outros valores de } x \text{ e de } y \end{cases}$$

- a) Verifique que é, efectivamente, uma função densidade de probabilidade conjunta.
- b) Calcule $P(X - Y > 0)$.
- c) Calcule o valor esperado e a variância de Y .
- d) Obtenha a função densidade condicional $f(y|x)$. Calcule, a partir dela, $F(y|x)$ e $P(Y \leq 0,5 | X = 0,25)$.
- e) Calcule a covariância de (X, Y) .
- f) Determine a expressão da função de distribuição de probabilidade conjunta, apenas para a parte do domínio onde $f(x, y) \neq 0$.

a) i) $\text{COV}(X, Y) = ?$

GRUPO I

$$\text{COV}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

$$\begin{aligned} E(XY) &= \sum_x \sum_y xy f(x, y) = \\ &= 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + (1 \times 2) \times 0,08 + (1 \times 4) \times 0,12 + (1 \times 6) \times 0,16 + \\ &\quad + 0 + (2 \times 2) \times 0,02 + (2 \times 4) \times 0,03 + (2 \times 6) \times 0,04 = \\ &= 0,16 + 0,48 + 0,96 + 0,08 + 0,24 + 0,48 = 2,4 \end{aligned}$$

$$E(X) = 0 \times 0,50 + 1 \times 0,40 + 2 \times 0,10 = 0,60$$

$$E(Y) = 0 \times 0,10 + 2 \times 0,20 + 4 \times 0,30 + 6 \times 0,40 = 4$$

$$\text{COV}(X, Y) = 2,4 - 0,60 \times 4 = 2,4 - 2,4 = 0$$

R: O director não tem razão pois a covariância entre as variáveis é nula.

VERIFICA-SE QUE X E Y SÃO INDEPENDENTES, POIS

$$f(x, y) = f_1(x) \times f_2(y) \text{ para todos os valores do domínio.}$$

$$\text{ii) } V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2 \cdot \text{COV}(X, Y) = V(X) + V(Y) \text{ porque } \text{COV}(X, Y) = 0$$

Não faz pois sentido separar as actividades.

b) $E(X \mid Y=0) = ?$

$$f(X \mid Y=0) = \begin{cases} 0,5 = \frac{0,05}{0,10} & , x=0 \\ 0,4 = \frac{0,04}{0,10} & , x=1 \\ 0,1 = \frac{0,01}{0,10} & , x=2 \\ 0 & \text{out. val de } x \end{cases}$$

Como são independentes,

$$f(X \mid Y=0) = f_1(x)$$

$$E(X \mid Y=0) = 0 \times 0,5 + 1 \times 0,4 + 2 \times 0,10 = 0,60$$

$$M_x(t) = E[e^{tx}] = \sum_x e^{tx} f(x) =$$

$$= e^{tx_0} \times 0,50 + e^{tx_1} \times 0,40 + e^{tx_2} \times 0,10 =$$

$$= 0,50 + 0,40 \times e^t + 0,10 \times e^{2t}$$

$$\frac{dM(t)}{dt} = 0,40 \times e^t + 0,20 e^{2t}$$

$$\left. \frac{dM(t)}{dt} \right|_{t=0} = 0,40 + 0,20 = 0,60 = \mu'_1 = \mu = E(X)$$

— " —

$$\frac{d^2M(t)}{dt^2} = 0,40 e^t + 0,40 e^{2t}$$

$$\left. \frac{d^2M(t)}{dt^2} \right|_{t=0} = 0,40 + 0,40 = 0,80 = \mu'_2 = E(X^2)$$

— " —

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 0,80 - 0,60^2 = 0,80 - 0,36 = 0,44$$

- c) Se produz 1 de X e 4 de Y este é o máximo que pode vender.

A probabilidade das unidades vendidas* pensará e ser:

$f(x, y)^*$	0	2	4	6	$f_1(x)$
X 0	0,05	0,10	0,35		0,50
1	0,05	0,10	0,35	—	
2	—	—	—	—	—
$f_2(y)$	0,10	0,20	0,70	—	1

$$\text{VALOR DAS VENDAS} = 2000 \times x + 1000 \times y$$

	0	2000	4000	—
X 0	0	2000	4000	—
2000	2000	4000	6000	—
—	—	—	—	—

$$\text{O CUSTO É SEMPRE } 1 \times 500 + 4 \times 500 = 2500$$

$$\text{LUCRO} = 2000 \times x + 1000 \times y - 2500$$

LUCRO	-2000	0	2000	—
-500	-2500	-500	1500	—
1500	-500	1500	3500	—
—	—	—	—	—

$$\pi = \text{LUCRO}$$

$$f(\pi) = \begin{cases} 0,05 & , \pi = -2500 \\ 0,15 & , \pi = -500 \\ 0,45 & , \pi = 1500 \\ 0,35 & , \pi = 3500 \\ 0 & \text{out. valores de } \pi \end{cases}$$

$$E(\pi) = -2500 \times 0,05 - 500 \times 0,15 + 1500 \times 0,45 + 3500 \times 0,35 = 1700$$

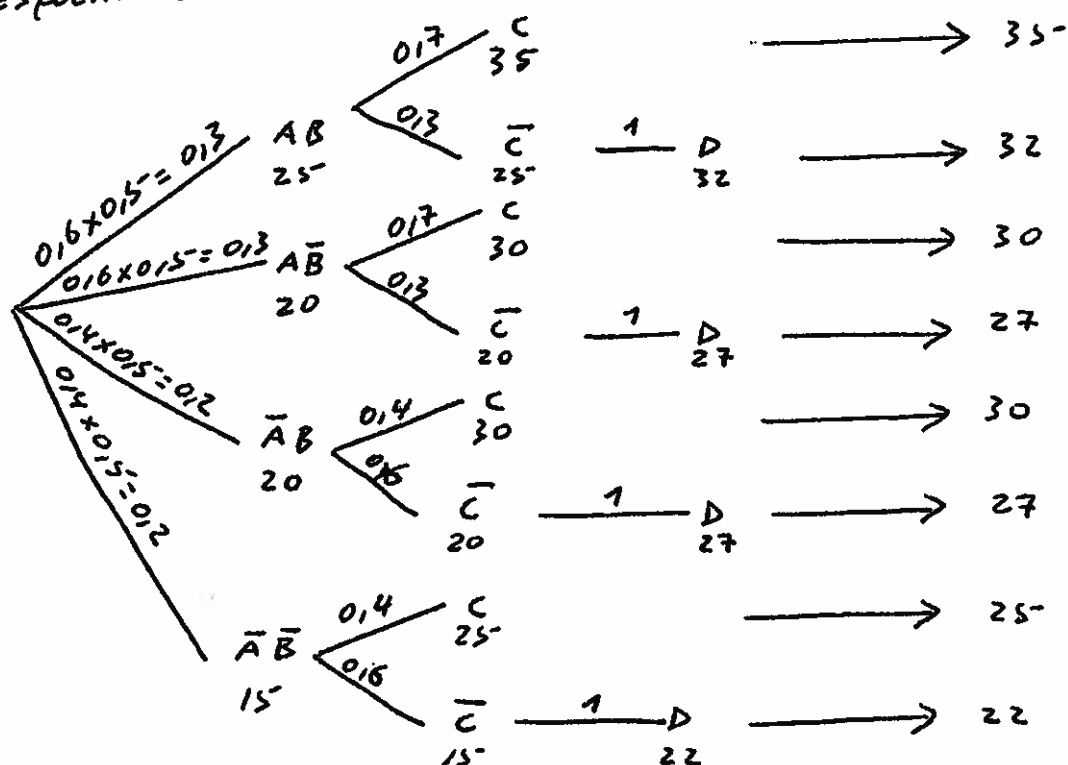
NOTA: Poderá ser calculado separadamente para X e Y.

GRUPO II

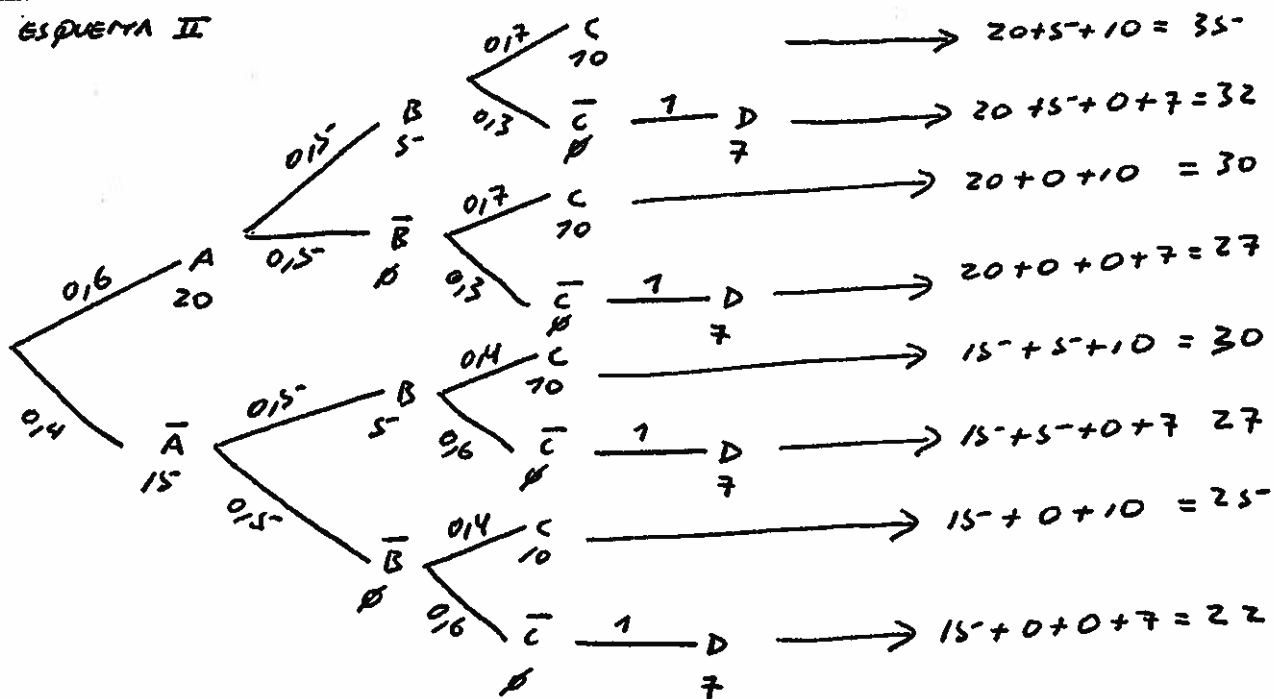
- A : VERÃO MUITO QUENTE
B : BANDEIRA AZUL
C : PRAIA AO LADO ENCOMENDA
D : CAMPIONATO DE SURF

a)

ESQUEMA I



ESQUEMA II



$$b) P(B \setminus C) = \frac{0,6 \times 0,5 \times 0,7 + 0,4 \times 0,5 \times 0,4}{0,6 \times 0,5 \times 0,7 + 0,6 \times 0,5 \times 0,7 + 0,4 \times 0,5 \times 0,4 + 0,4 \times 0,5 \times 0,4} =$$

$$= \frac{0,21 + 0,08}{0,21 + 0,21 + 0,08 + 0,08} = \frac{0,29}{0,58} = 0,5$$

$$c) P(VENDAS > 26) = ?$$

$$P(V > 26) = 1 - P(V \leq 26) =$$

$$1 - 0,20 = 0,80 \rightarrow \text{Probabilidade de conseguir convidar os seus amigos.}$$

V: VENDAS	P(VENDAS)	
22	$0,2 \times 0,6 \times 1 =$	0,12
25	$0,2 \times 0,4 =$	0,08
27	$0,3 \times 0,3 \times 1 +$ $+ 0,2 \times 0,6 \times 1 =$	0,21
30	$0,3 \times 0,7 +$ $+ 0,2 \times 0,4 =$	0,29
32	$0,3 \times 0,3 \times 1 =$	0,09
35	$0,3 \times 0,7 =$	0,21
SOMA:		1,00

$$d) P(\text{APENAS FAMÍLIA SER CONVIDADA}) = P(V \leq 26) = 0,20$$

$$P(A | V \leq 26) = \frac{P(A \cap V \leq 26)}{P(V \leq 26)} = \frac{0}{0,20} = 0$$

Quando o Vitor está muito quente V só sempre > 26

$$e) E(V) = 22 \times 0,12 + 25 \times 0,08 + 27 \times 0,21 + 30 \times 0,29 +$$

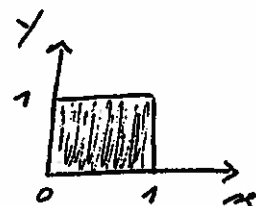
$$+ 32 \times 0,09 + 35 \times 0,21 = 29,24$$

MILHARES
DE EUROS

→ Com a função apresentada em c)

GRUPO III

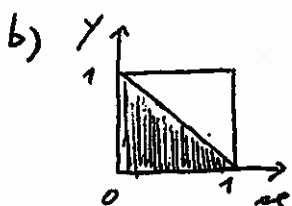
$$f(x, y) = \begin{cases} 1,5 - y & , 0 \leq x \leq 1 \\ & 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{out. val. de } x, y \end{cases}$$



a) 1) $f(x, y) \geq 0$ para todos os valores de (x, y) onde está definida.

$$\begin{aligned} 2) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy dx &= \int_0^1 \left[\int_0^1 (1,5 - y) dy \right] dx = \\ &= \int_0^1 \left[1,5y - \frac{y^2}{2} \right]_0^1 dx = \int_0^1 \left(1,5 - \frac{1}{2} \right) dx = \int_0^1 1 dx = [x]_0^1 = 1 \end{aligned}$$

Estão pois cumpridos os dois requisitos para ser função densidade de probabilidade.

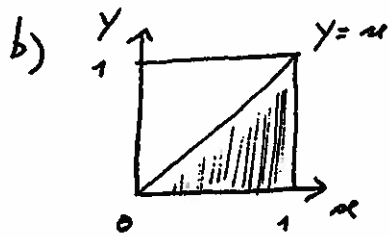


$$x + y < 1 \Leftrightarrow y < 1 - x \Leftrightarrow x < 1 - y$$

↳ VER PÁG. SEGUINTE.

$$\begin{aligned} P(X + Y < 1) &= \int_0^1 \left[\int_0^{1-x} (1,5 - y) dy \right] dx = \int_0^1 \left[1,5y - \frac{y^2}{2} \right]_0^{1-x} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 (3y - y^2)_0^{1-x} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (3 - 3x - 1 + 2x - x^2) dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 (2 - x - x^2) dx = \frac{1}{2} \left[2x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \\ &= \frac{1}{2} \left(2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) = \frac{12}{12} - \frac{3}{12} - \frac{2}{12} = \frac{7}{12} \end{aligned}$$

NOTA: VER b) NA PÁG. SEGUINTE.
O CÁLCULO QUE ESTÁ NESTA PÁGINA
NÃO É O PEDIDO



$$x - y > 0 \Leftrightarrow x > y \text{ ou } y < x$$

$$P(X - Y > 0) = P(Y < X) = \int_0^1 \left[\int_0^x (1,5 - y) dy \right] dx =$$

$$= \int_0^1 \left[1,5y - \frac{y^2}{2} \right]_0^x dx = \int_0^1 \left(1,5x - \frac{x^2}{2} \right) dx = \left[1,5 \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right]_0^1 =$$

$$= \frac{1,5}{2} - \frac{1}{6} = \frac{4,5 - 1}{6} = \frac{3,5}{6} = 58,3\%$$

$$c) f_1(u) = \int_{D_Y} f(u, y) dy = \int_0^1 (1,5 - y) dy = \left[1,5y - \frac{y^2}{2} \right]_0^1 =$$

$$= (1,5 - \frac{1}{2}) = 1 \quad \rightarrow f_1(u) = \begin{cases} 1 & , 0 \leq u \leq 1 \\ 0 & \text{out. val. } u \end{cases}$$

$$E(X) = \int_{D_X} x f_1(x) dx = \int_0^1 x dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$E(X^2) = \int_{D_X} x^2 f_1(x) dx = \int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{4}{12} - \frac{3}{12} = \frac{1}{12}$$

$$f_2(y) = \int_{D_X} f(x, y) dx = \int_0^1 (1,5 - y) dx = \left[1,5x - yx \right]_0^1 =$$

$$= 1,5 - y \quad \rightarrow f_2(y) = \begin{cases} 1,5 - y & , 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{out. val. } y \end{cases}$$

$$\text{nota: } \int_{D_Y} f_2(y) dy = \int_0^1 (1,5 - y) dy = \left[1,5y - \frac{y^2}{2} \right]_0^1 = 1,5 - \frac{1}{2} = 1$$

$$E(Y) = \int_{D_Y} y f_2(y) dy = \int_0^1 y(1,5 - y) dy = \int_0^1 (1,5y - y^2) dy =$$

$$= \left[1,5 \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1,5}{2} - \frac{1}{3} = \frac{4,5 - 2}{6} = \frac{2,5}{6} = 0,41(6) \text{ ou } \frac{5}{12}$$

$$E(Y^2) = \int_{D_Y} y^2 f_2(y) dy = \int_0^1 y^2(1,5 - y) dy = \int_0^1 (1,5y^2 - y^3) dy =$$

$$= \left[1,5 \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} \right]_0^1 = \frac{1,5}{3} - \frac{1}{4} = \frac{6 - 3}{12} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

$$V(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 = \frac{1}{4} - \left(\frac{5}{12}\right)^2 = 0,25 - 0,1736(1) = 0,0763(8)$$

NOTA: DETECTA-SE QUE $f(x, y) = f_1(x) \times f_2(y) \rightarrow X$ e Y SÃO INDEPENDENTES!

$$d) F(Y \setminus x) = P(Y \leq y \setminus x)$$

$$f(Y \setminus x) = \frac{f(x, y)}{f_1(x)} = \frac{1,5 - y}{1} = 1,5 - y$$

$\hookrightarrow \text{ver c)}$

Verifica-se pois para $f(Y \setminus x) = f_2(y) \rightarrow X \text{ e } Y$ não independentes

$$F(Y \setminus x) = \int_0^y (1,5 - v) dv = \left[1,5v - \frac{v^2}{2} \right]_0^y = 1,5y - \frac{y^2}{2}$$

$0 \leq y \leq 1$

$$P(Y \leq 0,5 \setminus x = 0,25) = 1,5 \times 0,5 - \frac{0,5^2}{2} =$$

$$= 0,75 - \frac{0,25}{2} = 0,75 - 0,125 = 0,625$$

d) $f(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_2(y)} = \frac{1,5-x-y}{1,5-y} = 1, \quad 0 \leq x \leq 1$

nota: Esta é outra forma de verificar a independência, já que $f(x|y) = f_1(x)$

$P(X \leq 0,25 | Y = 0,5) = P(X \leq 0,25) = \int_0^{0,25} 1 \, dx = \left[x \right]_0^{0,25} = 0,25$

e) $\text{COV}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$

$$E(XY) = \int_0^1 \int_0^1 xy(1,5-y) \, dy \, dx = \int_0^1 \left[\int_0^1 (1,5xy - xy^2) \, dy \right] dx$$

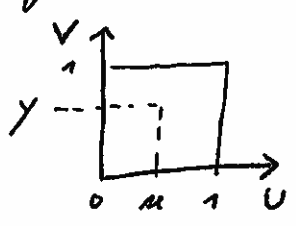
$$= \int_0^1 \left[1,5x \frac{y^2}{2} - x \frac{y^3}{3} \right]_0^1 dx = \int_0^1 \left(1,5 \frac{x}{2} - \frac{x}{3} \right) dx =$$

$$= \left[1,5 \frac{x^2}{4} - \frac{x^2}{6} \right]_0^1 = \frac{1,5}{4} - \frac{1}{6} = \frac{4,5}{12} - \frac{2}{12} = \frac{2,5}{12}$$

$$\text{COV}(X,Y) = \frac{4,5}{12} - \frac{1}{2} \times \frac{5}{12} = \frac{5}{24} - \frac{5}{24} = 0$$

Sendo as variáveis independentes podemos logo apontar que $\text{COV}(X,Y) = 0$

f) $F(x,y) = P(X \leq x; Y \leq y) = \int_0^x \left[\int_0^y (1,5-v) \, dv \right] du =$



$$= \int_0^x \left[1,5v - \frac{v^2}{2} \right]_0^y du = \int_0^x \left(1,5y - \frac{y^2}{2} \right) du =$$

$$= \left[1,5yu - \frac{y^2}{2} u \right]_0^x = 1,5yu - \frac{y^2}{2} u =$$

$$= x \left(1,5y - \frac{y^2}{2} \right), \quad \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$$

nota: Podemos ver que $F(x,y) = x \times F_2(y)$

LICENCIATURAS EM ECONOMIA E GESTÃO

ESTATÍSTICA I

Exame - 28 de Janeiro de 2010

Responda em folhas separadas para cada grupo. Se eventualmente não fizer algum grupo, entregue em branco a folha respectiva devidamente identificada.

Explicite todas as hipóteses e os cálculos que tiver de fazer para a resolução dos problemas. Use um mínimo de três casas decimais. Leia cuidadosamente a totalidade de cada grupo antes de o responder.

Os grupos ou as perguntas podem não estar pela ordem em que a matéria foi leccionada. Um grupo pode incluir diferentes matérias.

I (6,0 valores)

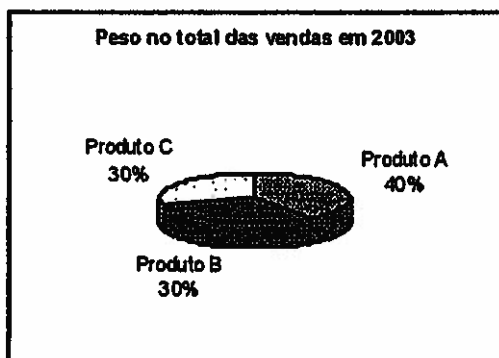
Pretendendo-se estudar a relação entre o número de trabalhadores e o salário médio mensal pago pelas empresas de um determinado sector de actividade, inquiriram-se 180 empresas, tendo-se obtido as seguintes informações:

		Y (salário médio mensal)			
] 10 – 20]] 20 – 30]] 30 – 40]	Total
X (nº de trabalhadores)] 0 – 5]	10	10	6	26
] 5 – 20]	10	20	6	36
] 20 – 50]	12	20	16	48
] 50 – 100]	10	12	16	38
] 100 – 200]	8	10	14	32
Total		50	72	58	180

- Construa o histograma das frequências absolutas simples do número de trabalhadores das empresas do sector.
- Utilizando apenas medidas de tendência central, analise o enviesamento da distribuição do número de trabalhadores.
- Calcule o coeficiente de variação dos salários médios pagos pelas empresas no intervalo] 0 – 5] trabalhadores.
- Com base nos dados que se apresentam, foi concluído que existe relação entre o número de trabalhadores das empresas e o salário médio pago. Concorde? Como poderia medir o sentido e a intensidade dessa relação?

II (4,0 valores)

Uma empresa vende três tipos de produtos: os produtos A, B e C. Dispõe-se da seguinte informação extraída do relatório de contas da referida empresa:



Evolução dos preços de cada um dos produtos			
	Produto A	Produto B	Produto C
2003	100,00	100,00	100,00
2004	120,00	105,00	110,00
2005	144,00	110,25	121,00

Índice de vendas nominal	
2003	100,00
2004	122,65
2005	149,61

Com base na informação contida nos quadros acima calcule:

- A taxa de crescimento média dos preços de cada um dos produtos, entre 2003 e 2005.
- O Índice de Laspeyres que traduz a evolução dos preços dos produtos vendidos pela empresa, de 2003 a 2005, com base em 2003.
 - Proceda a uma mudança de base para 2004 do índice calculado em b) (i).
- Um índice que revele a evolução das quantidades vendidas por esta empresa, de 2003 a 2005. Identifique o índice calculado.

III (4,0 valores)

Determinada Associação de Estudantes resolveu organizar um “fim-de-semana social” para os caloiros, composto por três actividades diferentes:

Actividade A: cuidar de crianças;

Actividade B: cuidar de idosos;

Actividade C: pintar paredes [em bairros degradados].

Para facilitar a organização dessas actividades decidiu perguntar a 100 caloiros quais as actividades de que gostavam. As respostas obtidas conduziram aos seguintes resultados:

- 2 gostavam de cuidar de crianças, cuidar de idosos e pintar paredes.
 - 16 gostavam exclusivamente de cuidar de crianças, 20 exclusivamente cuidar de idosos e 8 exclusivamente de pintar paredes.
 - 4 gostavam exclusivamente de cuidar de crianças e cuidar de idosos.
 - 6 gostavam exclusivamente de cuidar de crianças e pintar paredes.
 - 14 gostavam exclusivamente de cuidar de idosos e pintar paredes.
- a) Construa um diagrama de Venn onde ilustre a informação indicada acima.
- b) Verifique se gostar de cuidar de crianças é independente de gostar de cuidar de idosos. Interprete.
- c) Considere todos os alunos que gostam de pelo menos uma das três actividades. Qual a probabilidade de um desses alunos, escolhido ao acaso, não gostar de pintar paredes?

Considere agora que a Associação de Estudantes vai organizar as actividades de forma sequencial: primeiro é a actividade A (cuidar de crianças), depois a B (cuidar de idosos) e em último lugar a C (pintar paredes). Vão fazer cada actividade os alunos que gostam dela.

- d) Com base na informação acima e na informação inicial, construa um diagrama em árvore com as actividades que podem ser feitas por um caloiro. Coloque nos ramos da árvore as respectivas probabilidades.

IV (3,0 valores)

Um instrumento de medição incorpora três componentes electrónicos [os componente A, B e C], com fiabilidade de funcionamento de, respectivamente, 0.90 , 0.80 e 0.60 . Os componentes funcionam independentemente uns dos outros e o sistema funciona se nenhum dos componentes estiver avariado.

- Qual a probabilidade do instrumento funcionar?
- Construa a função de probabilidade do n.º de componentes avariados.
- Calcule o valor esperado e a variância do n.º de componentes avariados. Como interpreta o valor encontrado?
- Se o custo de reparar cada componente for 100 euros, qual o valor esperado e a variância do custo com reparações. – Faça os cálculos com base na informação de b) e c) e recorrendo às propriedades do valor esperado e da variância.

V (3,0 valores)

Considere a função densidade de probabilidade conjunta:

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 y & , \quad \begin{cases} 0 < x < k \\ 0 < y < \sqrt{6} \end{cases} \\ 0 & \text{outros valores de } x \text{ e de } y \end{cases}$$

- Calcule o valor de k .

Nota: Se não resolver esta alínea considere nas alíneas seguintes $k=1$.

- Obtenha a função densidade condicional $f(y|x)$. Calcule, a partir dela, a $P(Y < 0,6 | X = 0,8)$.

O que pode concluir face à independência estatística de X e Y ? Justifique por palavras a partir unicamente da informação desta alínea.

- Em face do que apurou na alínea b) qual o valor da covariância entre as variáveis? Comprove-o através do cálculo da covariância.

LICENCIATURAS EM ECONOMIA E GESTÃO

ESTATÍSTICA I

FORMULÁRIO

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_i x_i F_i = \sum_i x_i f_i$$

$$\bar{x} = \sum_i w_i x_i \quad (\text{com } \sum_i w_i = 1)$$

$$\bar{x}_g = \sqrt[n]{x_1^{F_1} \times x_2^{F_2} \times \dots}$$

$$\bar{x}_h = \frac{1}{\frac{1}{n} \sum_i F_i \frac{1}{x_i}} = \frac{1}{\sum_i f_i \frac{1}{x_i}}$$

$$M = l_m + k \times \frac{F_m - F_{m-1}}{(F_m - F_{m+1}) + (F_m - F_{m-1})}$$

$$M_e = l_{m_e} + k_{m_e} \frac{0,5 - s(l_{m_e})}{s(L_{m_e}) - s(l_{m_e})}$$

$$Q_l = l_l + k_l \frac{0,25 - s(l_l)}{s(L_l) - s(l_l)}$$

$$Q_m = l_m + k_m \frac{0,75 - s(l_m)}{s(L_m) - s(l_m)}$$

$$IV = \max_{x_i} \{x_i\} - \min_{x_i} \{x_i\}$$

$$IIQ = Q_{III} - Q_I$$

$$DAM_x = \frac{1}{n} \sum_i F_i |x_i - \bar{x}| = \sum_i f_i |x_i - \bar{x}|$$

$$s_x^2 = \frac{1}{n} \sum_i F_i (x_i - \bar{x})^2 = \sum_i f_i (x_i - \bar{x})^2 = \sum_i f_i x_i^2 - \bar{x}^2$$

$$s_x = +\sqrt{s_x^2}$$

$$C_v = \frac{s_x}{\bar{x}} \times 100$$

$$CA_p = \frac{\bar{X} - M_o}{s}$$

$$CA_B = \frac{Q_3 + Q_1 - 2M_e}{Q_3 - Q_1}$$

$$K_{Fisher} = \frac{\sum_{i=1}^m (x_i - \bar{X})^4 F_i / n}{\left[\sum_{i=1}^m (x_i - \bar{X})^2 F_i / n \right]^2}$$

$$K = \frac{Q_3 - Q_1}{2(P_{90} - P_{10})}$$

$$IG = 1 - \sum_{j=1}^m (q_j + q_{j-1}) \times (p_j - p_{j-1})$$

$$F_i^{(x)} = F_i(X = x_i) = \sum_j F_{ij}$$

$$F_j^{(y)} = F_j(Y = y_j) = \sum_i F_{ij}$$

$$f(y_j | x_i) = \frac{F(x_i, y_j)}{F_i^{(x)}} = \frac{f(x_i, y_j)}{f_i^{(x)}}$$

$$f(x_i | y_j) = \frac{F(x_i, y_j)}{F_j^{(y)}} = \frac{f(x_i, y_j)}{f_j^{(y)}}$$

$$COV(X, Y) = \frac{1}{n} \sum_k (x_k - \bar{x})(y_k - \bar{y}) = \frac{1}{n} \sum_k x_k y_k - \bar{x} \bar{y}$$

$$COV(X, Y) = \frac{1}{n} \sum_i \sum_j F_{ij} (x_i - \bar{X})(y_j - \bar{Y}) = \sum_i \sum_j f_{ij} (x_i - \bar{x})(y_j - \bar{y}) = \sum_i \sum_j (x_i y_j f_{ij}) - \bar{x} \bar{y}$$

$$r(X, Y) = \frac{COV(X, Y)}{s_x s_y}$$

Nota: As fórmulas abaixo têm 100 como referência para o ano base.

$$I_{i/0}^{(p)} = \frac{P_i}{P_0} \times 100 \quad I_{i/0}^{(q)} = \frac{q_i}{q_0} \times 100 \quad I_{i/0}^{(v)} = \frac{P_i q_i}{P_0 q_0} \times 100 \quad I_{i/0}^{(p)} = \frac{\sum_{i=1}^n P_i}{\sum_{i=1}^n P_{0i}} \times 100$$

$$I_{(i/0)}^{(p)} = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n \frac{P_i}{P_{0i}} \right) \times 100$$

$$I_{i/0}^{(q)} = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n \frac{q_i}{q_{0i}} \right) \times 100$$

$$I_{(i/0)}^{(p)} = \left(\sum_{i=1}^n \frac{P_i}{P_{0i}} \times w_i \right) \times 100$$

$$I_{i/0}^{(q)} = \left(\sum_{i=1}^n \frac{q_i}{q_{0i}} \times w_i \right) \times 100$$

$$I_{i/0}^{(p)}(L) = \frac{\sum_{i=1}^n P_i q_{0i}}{\sum_{i=1}^n P_{0i} q_{0i}} \times 100$$

$$I_{i/0}^{(q)}(L) = \frac{\sum_{i=1}^n P_{0i} q_i}{\sum_{i=1}^n P_{0i} q_{0i}} \times 100;$$

$$I_{i/0}^{(p)}(P) = \frac{\sum_{i=1}^n P_i q_i}{\sum_{i=1}^n P_{0i} q_i} \times 100$$

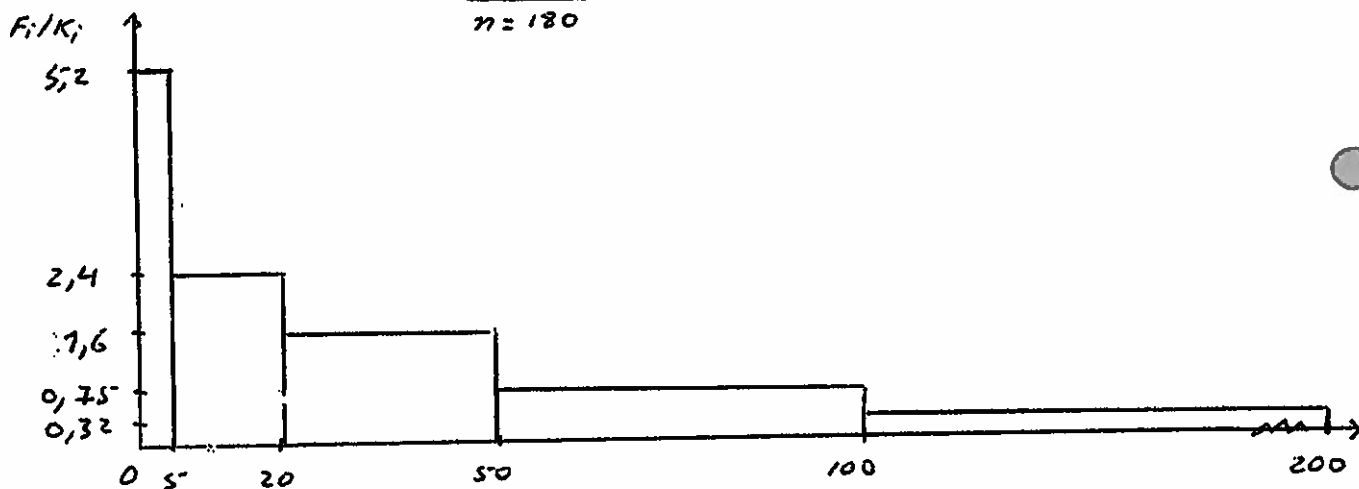
$$I_{i/0}^{(q)}(P) = \frac{\sum_{i=1}^n P_i q_{0i}}{\sum_{i=1}^n P_i q_i} \times 100$$

$$I_{i/0}(F) = \sqrt{I_{i/0}(L) \times I_{i/0}(P)}$$

Nota: o formulário não esgota todos os tratamentos estatísticos possíveis.

a)

CLASSES	K_i	M_i	F_i	F_i/K_i	S_i	A_i
0-5	5	2,5	26	5,2	26	0,14
5-20	15	12,5	36	2,4	62	0,34
20-50	30	35	48	1,6	110	0,61
50-100	50	75	38	0,75	148	0,82
100-200	100	150	32	0,32	180	1,00
			$n = 180$			



b) $\bar{X} = \frac{2,5 \times 26 + 12,5 \times 36 + 35 \times 48 + 75 \times 38 + 150 \times 32}{180} = \frac{9845}{180} = 54,69$

$M_e = 20 + \frac{0,50 - 0,34}{0,26(6)} \times 30 \approx 38$

ou $20 + \frac{90 - 62}{48} \times 30 = 37,5$ cálculo sem arredondamentos

$M_o = 0 + \frac{5,2 - 0}{(5,2 - 0) + (5,2 - 2,4)} \times 5 = 0 + \frac{5,2}{8} \times 5 = 3,25$

$M_o < M_e < \bar{X} \Rightarrow$ Assimetria positiva ou enviesamento à esquerda, o que é visível no histograma acima.

$$c) \quad \bar{y}_{0-5} = \frac{15 \times 10 + 25 \times 10 + 35 \times 6}{26} = \frac{610}{26} = 23,46$$

$$\begin{aligned} s_y^2 /_{0-5} &= \frac{15^2 \times 10 + 25^2 \times 10 + 35^2 \times 6}{26} - 23,46^2 = \\ &= \frac{15 \cdot 850 + 5 \cdot 50,37}{26} = 609,61 - 550,37 = 59,24 \end{aligned}$$

$$s_y /_{0-5} = \sqrt{59,24} = 7,697$$

$$CV_y /_{0-5} = \frac{7,697}{23,46} = 0,328 \text{ ou } 32,8\%$$

d) Temos de ver se X e Y são independentes.

X e Y são independentes se

$$f(x_i, y_j) = f_1(x_i) \times f_2(y_j) \quad , \quad \forall x_i, y_j \text{ do domínio}$$

Por exemplo:

$$f(x_1, y_1) = 10/180 = 0,0(5)$$

$$f_1(x_1) = 26/180 = 0,1(4)$$

$$f_2(y_1) = 50/180 = 0,2(7)$$

$$f_1(x_1) \times f_2(y_1) = 0,04 \neq f(x_1, y_1) \quad \begin{array}{l} \text{A condição acima} \\ \text{não se verifica} \\ \text{pelo que } X \text{ e } Y \\ \text{não são independentes.} \end{array}$$

R: Concordo com a afirmação. - O sentido e a intensidade dessa relação poderiam ser medidos com o coeficiente de correlação linear de Pearson.

GRUPO II

a) Taxa média de crescimento dos preços:

$$\text{PRODUTO A: } \sqrt[2]{1,44} = 1,20 \rightarrow \frac{1,2 - 1}{1} = 0,2 \text{ ou } 20\%$$

$$\text{" B: } \sqrt[2]{1,1025} = 1,05 \rightarrow \frac{1,05 - 1}{1} = 0,05 \text{ ou } 5\%$$

$$\text{" C: } \sqrt[2]{1,21} = 1,1 \rightarrow \frac{1,1 - 1}{1} = 0,10 \text{ ou } 10\%$$

$$b) I^P(L) = \frac{\sum P_{ti} q_{0i}}{\sum P_{0i} q_{0i}} = \sum \frac{P_{ti}}{P_{0i}} \times \frac{P_{0i} q_{0i}}{\sum P_{0i} q_{0i}}$$

Res no total das vendas em 2003.

→ Evolução dos preços.

i)

$$I^P(L) = 1 \text{ ou } 100$$

03/03

$$I^P(L) = 1,2 \times 0,4 + 1,05 \times 0,3 + 1,10 \times 0,3 = 1,125 \text{ ou } 112,5$$

04/03

$$I^P(L) = 1,44 \times 0,4 + 1,1025 \times 0,3 + 1,21 \times 0,3 = 1,26975 \text{ ou } 126,975$$

05/03

$$ii) I^P(L)$$

t/03

$$I^P(L)$$

t/04

1 ou 100

$$\frac{1}{1,125} = 0,889 \text{ ou } 88,9$$

1,125 ou 112,5

$$\frac{1,125}{1,125} = 1 \text{ ou } 100$$

1,26975 ou 126,975

$$\frac{1,26975}{1,125} = 1,128(6) \text{ ou } 112,9$$

→

c) Sabemos que $I^P(L) \times I^P(P) = I^V$

nota:

$$\frac{\sum p_{ti} q_{0i}}{\sum p_{0i} q_{0i}} \times \frac{\sum p_{ti} q_{ti}}{\sum p_{ti} q_{0i}} = I^V = \frac{\sum p_{ti} q_{ti}}{\sum p_{0i} q_{0i}}$$

$$I^P(L) \times I^P(P) = I^V \Leftrightarrow I^P(P) = \frac{I^V}{I^P(L)}$$

Vamos portanto calcular um índice de Paasche de quantidades de com base em 2003:

$$I^P(P)_{03/03} = 1 \text{ ou } 100$$

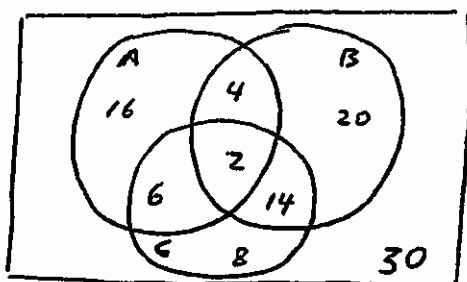
$$I^P(P)_{04/03} = \frac{1,2265}{1,125} = 1,0902 \text{ ou } 109,1$$

$$I^P(P)_{05/03} = \frac{1,4961}{1,26975} = 1,178 \text{ ou } 117,8$$

FCEE, ESTATÍSTICA I
EXAME, 2010.01.28

GRUPO III

a)



$$\#(A \cup B \cup C) = 70$$

$$\#(\overline{A \cup B \cup C}) = 100 - 70 = 30$$

$$\#\Omega = 100$$

b) $P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{28}{100} = 0,28$ ou 28% ou $\frac{P(A)}{P(\Omega)} = P(A)$

$$P(A|B) = \frac{\#(A \cap B)}{\#B} = \frac{6}{40} = 0,15 \text{ ou } 15\% \text{ ou } \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

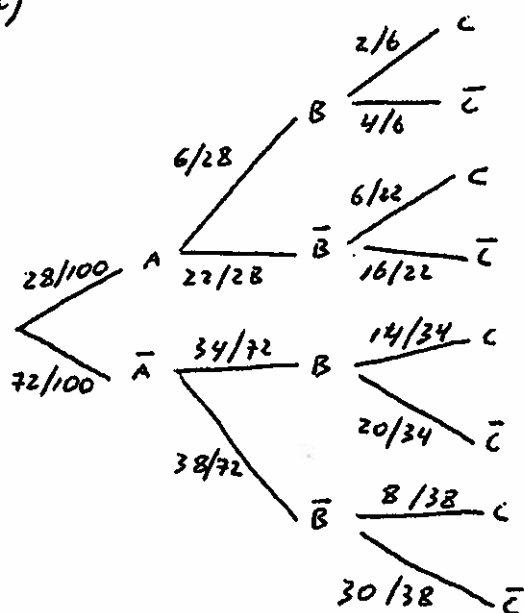
$P(A|B) \neq P(A) \Rightarrow A$ e B não são independentes

$P(A|B) < P(A)$ ou seja, a probabilidade de um caloiro gostar de andar de crianças é menor no subconjunto dos que gostam de andar de idosos.

c) $P[\bar{C} \setminus (A \cup B \cup C)] = \frac{40}{70} = 0,57$ ou 57 %

\hookrightarrow ou $\frac{P[\bar{C} \cap (A \cup B \cup C)]}{P(A \cup B \cup C)}$ fazendo o respectivo cálculo.

d)



	Nº DE ACTIVIDADES
ABC	3
AB \bar{C}	2
A \bar{B} C	2
A \bar{B} \bar{C}	1
\bar{A} BC	2
\bar{A} B \bar{C}	1
\bar{A} \bar{B} C	1
\bar{A} \bar{B} \bar{C}	0

NOTA: No teste não é pedido a construção de árvore e a coloração das probabilidades. Mas, é partir daqui poderemos trabalhar com as funções de probabilidades que podem ser construídas.

GRUPO IV

A: Componente A funciona
B: " B "
C: " C "

a) $P(ABC) = 0,90 \times 0,80 \times 0,60 = 0,432$ ou 43,2 %.

↳ Probabilidade dos três componentes funcionarem simultaneamente. Como o funcionamento é independente, a probabilidade conjunta é o produto das probabilidades.

b)

				AVARIADOS	PROBABILIDADE
$\begin{array}{l} 0,90 \\ 0,10 \end{array} \begin{array}{l} A \\ \bar{A} \end{array} \begin{array}{l} 0,80 \\ 0,20 \end{array} \begin{array}{l} B \\ \bar{B} \end{array} \begin{array}{l} 0,60 \\ 0,40 \end{array} \begin{array}{l} C \\ \bar{C} \end{array}$	A	B	C	0	0,432
	A	B	\bar{C}	1	0,288
	A	\bar{B}	C	1	0,108
	A	\bar{B}	\bar{C}	2	0,072
	\bar{A}	B	C	1	0,048
	\bar{A}	B	\bar{C}	2	0,032
	\bar{A}	\bar{B}	C	2	0,012
	\bar{A}	\bar{B}	\bar{C}	3	0,008

X: nº de componentes avariados

x	0	1	2	3
$f(x) = P(X=x)$	0,432	0,444	0,116	0,008

c) $E(X) = \sum x_i f(x_i) = 0 \times 0,432 + 1 \times 0,444 + 2 \times 0,116 + 3 \times 0,008 = 0,7$

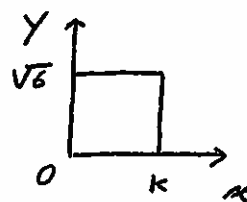
d) $V(X) = E[(X - E(X))^2] = E(X^2) - E(X)^2$
 $= 0^2 \times 0,432 + 1^2 \times 0,444 + 2^2 \times 0,116 + 3^2 \times 0,008 - 0,7^2 =$
 $= 0,98 - 0,7^2 = 0,98 - 0,49 = 0,49$

e) Y: Custo da reparação dos componentes. $Y = 100X$
 $E(Y) = E(100X) = 100E(X) = 100 \times 0,7 = 70$ EUROS
 $V(Y) = V(100X) = 100^2 V(X) = 10000 \times 0,49 = 4900$

Exame, 2010.01.28

GRUPO V

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 y & , \begin{cases} 0 < x < K \\ 0 < y < \sqrt{6} \end{cases} \\ 0 & \text{out. val. de } x \text{ e } y \end{cases}$$



a) 1) $f(x, y) \geq 0$ para todos os valores de (x, y) do domínio.

$$\begin{aligned} 2) \int_0^K \left[\int_0^{\sqrt{6}} x^2 y \, dy \right] dx &= 1 \Leftrightarrow \int_0^K \left[\frac{x^2 y^2}{2} \right]_0^{\sqrt{6}} dx = 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \int_0^K 3 x^2 dx &= 1 \Leftrightarrow \left[x^3 \right]_0^K = 1 \Leftrightarrow K^3 = 1 \Leftrightarrow K = 1 \end{aligned}$$

$$b) f(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_1(x)}$$

$$f_1(x) = \int_{D_y} f(x, y) \, dy = \int_0^{\sqrt{6}} x^2 y \, dy = \left[\frac{x^2 y^2}{2} \right]_0^{\sqrt{6}} = 3 x^2 \quad 0 < x < 1$$

$$f(y|x) = \frac{x^2 y}{3 x^2} = \frac{y}{3}$$

A função condicional não depende de x o que está relacionado a x e y serem independentes.

Repare-se que:

$$f_2(y) = \int_{D_x} f(x, y) \, dx = \int_0^1 x^2 y \, dx = \left[\frac{x^3}{3} y \right]_0^1 = \frac{y}{3} \quad 0 < y < \sqrt{6}$$

$$\text{Assim, } f(y|x) = f_2(y)$$

$$P(Y < 0,6 | X = 0,8) = P(Y < 0,6) = \int_0^{0,6} \frac{y}{3} \, dy = \left[\frac{y^2}{6} \right]_0^{0,6} = \frac{0,6^2}{6} = 0,06$$

c) X e Y independentes $\Rightarrow \text{cov}(X, Y) = 0$

$$\text{cov}(X, Y) = E(X, Y) - E(X)E(Y)$$

$$E(X) = \int_{D_x} x f_1(x) \, dx = \int_0^1 x \cdot 3 x^2 \, dx = \left[\frac{3 x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{3}{4}$$

$$E(Y) = \int_{D_y} y f_2(y) \, dy = \int_0^{\sqrt{6}} y \cdot \frac{y}{3} \, dy = \left[\frac{y^3}{9} \right]_0^{\sqrt{6}} = \frac{6 \sqrt{6}}{9} = \frac{2 \sqrt{6}}{3}$$

$$E(XY) = \int_{D_x} \int_{D_y} xy f(x, y) \, dy \, dx = \int_0^1 \left[\int_0^{\sqrt{6}} xy \cdot x^2 y \, dy \right] dx =$$

→

$$= \int_0^1 \left[\int_0^{\sqrt{6}} x^3 y^2 dy \right] dx = \int_0^1 \left[\frac{x^3 y^3}{3} \right]_0^{\sqrt{6}} dx =$$

$$= \int_0^1 2\sqrt{6} x^3 dx = \left[\frac{2\sqrt{6} x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{2\sqrt{6}}{4}$$

$$E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{2\sqrt{6}}{4} - \frac{3}{4} \times \frac{2\sqrt{6}}{3} = \frac{2\sqrt{6}}{4} - \frac{2\sqrt{6}}{4} = 0$$

Pelo que se comprova que a covariância é 0.

LICENCIATURAS EM ECONOMIA E GESTÃO

ESTATÍSTICA I

1º Teste - 17 de Abril de 2010

O teste é constituído por quatro grupos. Responda em folhas separadas para cada grupo. Se eventualmente não fizer algum grupo, entregue em branco a folha respectiva devidamente identificada.

Lêla cuidadosamente a totalidade de cada grupo antes de o responder.

Explicite todas as hipóteses e os cálculos que tiver de fazer para a resolução dos problemas. Use um mínimo de três casas decimais. Os grupos ou as perguntas podem não estar pela ordem em que a matéria foi leccionada. Um grupo pode incluir diferentes matérias.

I (3,0 valores)

Considere um país onde a população desempregada, de acordo com a idade, tem a seguinte distribuição:

População desempregada

Idade [em anos]	Milhares de indivíduos
[15 – 25]	90
] 25 – 35]	120
] 35 – 45]	150
] 45 – 65]	140

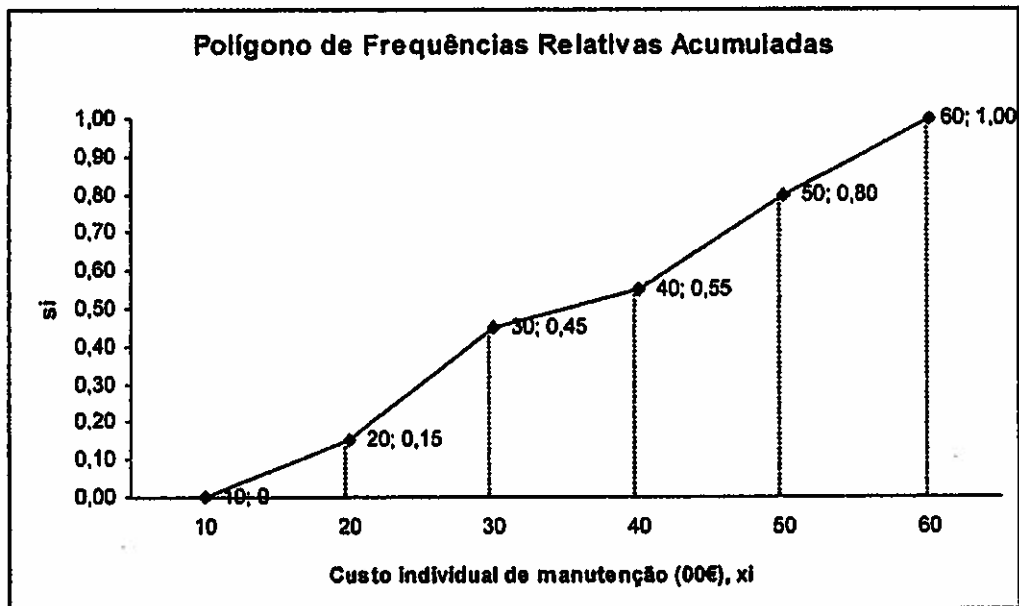
Para a variável “idade da população desempregada”:

- (i) Desenhe o histograma de frequências absolutas e (ii) calcule a moda.
(iii) Interprete o valor encontrado para a moda.
- (i) Calcule o desvio-padrão e o coeficiente de variação. (ii) Compare por palavras a natureza destas duas medidas.
- Através de um indicador numérico classifique a assimetria.

II (5,0 valores)

Um colecionador de automóveis está preocupado em perceber a natureza dos avultados gastos com a manutenção da sua frota automóvel. A sua frota é composta por 20 automóveis de diferentes marcas pelo que os custos de manutenção variam de carro para carro.

Considere o seguinte polígono integral de frequências relativas acumuladas referentes à distribuição dos automóveis segundo a despesa anual com a manutenção de cada um.



Nota: No gráfico acima o primeiro valor indica o custo individual de manutenção no extremo da classe e o segundo valor a frequência relativa acumulada no extremo dessa mesma classe.

- Construa o quadro de frequências absolutas e relativas, simples e acumuladas, a partir da informação contida no gráfico.
- (i) Analise a concentração dos custos de manutenção com os automóveis através do Índice de Gini e (ii) interprete esse valor tendo em conta a natureza concreta dos dados em causa. (iii) Represente graficamente a curva de Lorenz desses mesmos custos.
- Se a despesa total estivesse igualmente dividida por todos os automóveis, como se chamaria o valor que cabia a cada automóvel? E qual seria o valor do Índice de Gini nesse caso? [Responda a esta alínea apenas por palavras].
- Construa a "Caixa dos Bigodes" do custo individual de manutenção.

III (6,0 valores)

Uma empresa tem 8 anos de existência e tem actualmente 100 vendedores. Neste momento essa empresa pretende fazer uma análise conjunta das seguintes variáveis:

Variável X: Número de anos de experiência no mercado de um vendedor da empresa

Variável Y: Volume total de vendas efectuadas por um vendedor da empresa num determinado mês

Para fazer essa análise a empresa obteve a seguinte quadro de Frequências Absolutas Conjuntas de X e de Y:

		Y (Volume total de vendas)			
		[0 – 20]] 20 – 40]] 40 – 60]] 60 – 80]
X (anos de experiência)	[0 – 2]	4	6	8	7
] 2 – 4]	2	6	10	17
] 4 – 6]	3	6	9	12
] 6 – 8]	1	2	3	4

Utilize os seus conhecimentos de Estatística para comentar, de forma quantificada, algumas das conclusões que o Director de Vendas da Empresa retirou da informação apresentada.

Nos seus comentários refira os conceitos estatísticos que estão subjacentes às afirmações do Director de Vendas, apresente todos os cálculos que tiver de efectuar e indique se as afirmações do Director de Vendas são verdadeiras ou falsas.

- 10% dos vendedores estão na empresa há mais de 6 anos.
- 20% dos vendedores estão na empresa há mais de 4 anos e conseguiram vender mais de 60 unidades num mês.
- De entre os vendedores com um volume mensal de vendas superiores a 60 unidades, apenas 5% estão há mais de 6 anos na empresa.
- Os vendedores que estão na empresa há 2 anos ou menos têm menor performance por trabalhador do que os que estão na empresa há mais de seis anos.
- Posso concluir que o volume de vendas não tem qualquer relação estatística com o número de anos de experiência no mercado.
- No entanto para os vendedores mais recentes, que estão no mercado à 4 anos ou menos, verifica-se uma forte correlação linear negativa entre as duas variáveis.

IV (6,0 valores)

IV-1

Dispõe-se da informação respeitante aos preços (P, em unidades monetárias, u.m.) e quantidades consumidas (Q, em unidades) de três bens, para os anos 2004 a 2007:

Bem	Bem A		Bem B		Bem C	
	P	Q	P	Q	P	Q
2004	11	8	6	4	13	9
2005	12	8	5	6	16	7
2006	13	9	6	6	15	9
2007	17	7	9	5	17	9

- Calcule, para todos os anos, o índice de preços de Laspeyres com base em 2006.
- Verifique analiticamente se o índice calculado na alínea a) verifica as propriedades de reversibilidade (em relação ao tempo) e de circularidade.
- Qual a taxa média de crescimento anual do índice entre 2004 e 2007?
- Foi calculado um índice de salários nominais, para o qual se tomou como base o ano de 2004:

Índice de salários nominais

Ano	2004	2005	2006	2007
Valor	100	117	120	131

Com base na informação acima e nos índices calculados na alínea a), construa um índice de salários reais com base em 2004 [como evoluíram os salários a preços de 2004].

IV-2

Considere que num determinado país o Índice de Preços no Consumidor (IPC) foi o seguinte nos anos de 2008 e 2009:

Meses	2008	2009
Jan	120	212
Fev	121	217
Mar	125	220
Abr	127	221
Mai	132	221
Jun	143	224
Jul	178	226
Ago	159	228
Set	145	228
Out	144	231
Nov	175	232
Dez	210	239
Total	1779	2699

- Calcule a taxa de variação mensal dos preços relativa a Dezembro de 2009.
- Calcule a taxa de variação homóloga dos preços relativa a Dezembro de 2009.
- Calcule a taxa de variação média dos últimos 12 meses, calculada para o final do mês de Dezembro de 2009 [pretende-se o indicador da taxa de inflação anual].



LICENCIATURAS EM ECONOMIA E GESTÃO

ESTATÍSTICA I

FORMULÁRIO

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_i x_i F_i = \sum_i x_i f_i$$

$$\bar{x} = \sum_i w_i x_i \quad (\text{com } \sum_i w_i = 1)$$

$$\bar{x}_g = \sqrt[n]{x_1^{F_1} \times x_2^{F_2} \times \dots}$$

$$\bar{x}_h = \frac{1}{\frac{1}{n} \sum_i F_i \frac{1}{x_i}} = \frac{1}{\sum_i f_i \frac{1}{x_i}}$$

$$M = l_m + k \times \frac{F_m - F_{m-1}}{(F_m - F_{m+1}) + (F_m - F_{m-1})}$$

$$M_e = l_{m_e} + k_{m_e} \frac{0,5 - s(l_{m_e})}{s(L_{m_e}) - s(l_{m_e})}$$

$$Q_I = l_I + k_I \frac{0,25 - s(l_I)}{s(L_I) - s(l_I)}$$

$$Q_{III} = l_{III} + k_{III} \frac{0,75 - s(l_{III})}{s(L_{III}) - s(l_{III})}$$

$$IV = \max_{x_i} \{x_i\} - \min_{x_i} \{x_i\}$$

$$IIQ = Q_{III} - Q_I$$

$$DAM_x = \frac{1}{n} \sum_i F_i |x_i - \bar{x}| = \sum_i f_i |x_i - \bar{x}|$$

$$s_x^2 = \frac{1}{n} \sum_i F_i (x_i - \bar{x})^2 = \sum_i f_i (x_i - \bar{x})^2 = \sum_i f_i x_i^2 - \bar{x}^2$$

$$s_x = +\sqrt{s_x^2}$$

$$C_v = \frac{s_x}{\bar{x}} \times 100$$

$$CA_p = \frac{\bar{X} - M_o}{s}$$

$$CA_B = \frac{Q_3 + Q_1 - 2M_e}{Q_3 - Q_1}$$

$$K_{Fisher} = \frac{\sum_{i=1}^m (x_i - \bar{X})^4 F_i / n}{\left[\sum_{i=1}^m (x_i - \bar{X})^2 F_i / n \right]^2}$$

$$K = \frac{Q_3 - Q_1}{2(P_{90} - P_{10})}$$

$$IG = 1 - \sum_{j=1}^m (q_j + q_{j-1}) \times (p_j - p_{j-1})$$

$$F_i^{(x)} = F_i(X = x_i) = \sum_j F_{ij}$$

$$F_j^{(y)} = F_j(Y = y_j) = \sum_i F_{ij}$$

$$f(y_j | x_i) = \frac{F(x_i, y_j)}{F_i^{(x)}} = \frac{f(x_i, y_j)}{f_i^{(x)}}$$

$$f(x_i | y_j) = \frac{F(x_i, y_j)}{F_j^{(y)}} = \frac{f(x_i, y_j)}{f_j^{(y)}}$$

$$COV(X, Y) = \frac{1}{n} \sum_k (x_k - \bar{x})(y_k - \bar{y}) = \frac{1}{n} \sum_k x_k y_k - \bar{x} \bar{y}$$

$$COV(X, Y) = \frac{1}{n} \sum_i \sum_j F_{ij} (x_i - \bar{X})(y_j - \bar{Y}) = \sum_i \sum_j f_{ij} (x_i - \bar{x})(y_j - \bar{y}) = \sum_i \sum_j (x_i y_j f_{ij}) - \bar{x} \bar{y}$$

$$\text{ou} \quad = \frac{1}{n} \sum_i \sum_j (x_i y_j F_{ij}) - \bar{x} \bar{y}$$

$$r(X, Y) = \frac{COV(X, Y)}{s_x s_y}$$

Nota: As fórmulas abaixo têm 100 como referência para o ano base.

$$I_{i/0}^{(p)} = \frac{p_i}{p_0} \times 100 \quad I_{i/0}^{(q)} = \frac{q_i}{q_0} \times 100 \quad I_{i/0}^{(v)} = \frac{p_i q_i}{p_0 q_0} \times 100 \quad I_{i/0}^{(p)} = \frac{\sum_{i=1}^n p_{it}}{\sum_{i=1}^n p_{0i}} \times 100$$

$$I_{(i/0)}^{(p)} = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n \frac{p_{it}}{p_{0i}} \right) \times 100$$

$$I_{i/0}^{(q)} = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n \frac{q_{it}}{q_{0i}} \right) \times 100$$

$$I_{(i/0)}^{(p)} = \left(\sum_{i=1}^n \frac{p_{it}}{p_{0i}} \times w_i \right) \times 100$$

$$I_{i/0}^{(q)} = \left(\sum_{i=1}^n \frac{q_{it}}{q_{0i}} \times w_i \right) \times 100$$

$$I_{i/0}^{(p)}(L) = \frac{\sum_{i=1}^n p_{it} q_{0i}}{\sum_{i=1}^n p_{0i} q_{0i}} \times 100$$

$$I_{i/0}^{(q)}(L) = \frac{\sum_{i=1}^n p_{0i} q_{it}}{\sum_{i=1}^n p_{0i} q_{0i}} \times 100;$$

$$I_{i/0}^{(p)}(P) = \frac{\sum_{i=1}^n p_{it} q_{it}}{\sum_{i=1}^n p_{0i} q_{it}} \times 100$$

$$I_{i/0}^{(q)}(P) = \frac{\sum_{i=1}^n p_{it} q_{it}}{\sum_{i=1}^n p_{it} q_{0i}} \times 100$$

$$I_{i/0}(F) = \sqrt{I_{i/0}(L) \times I_{i/0}(P)}$$

Nota: o formulário não esgota todos os tratamentos estatísticos possíveis.

UCP - FLEE
ESTATÍSTICA I

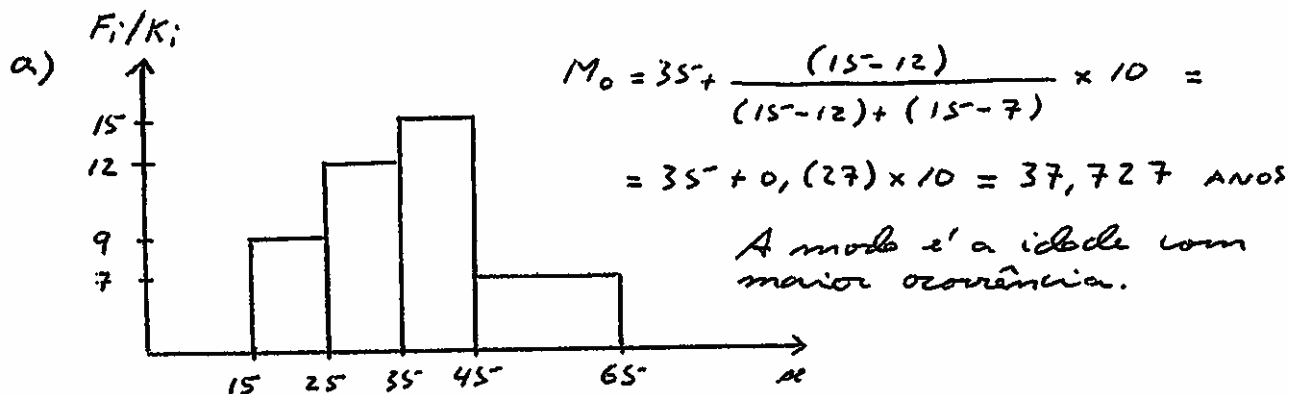
1º TESTE

2010.04.17

RESOLUÇÃO

NOTA: Apresente-se a resolução de referência. Podem ter sido consideradas outras formas de resolução.

CLASSE	x_i	K_i	F_i	F_i/K_i	$x_i F_i$	$x_i^2 F_i$
[15-25]	20	10	90	9	1800	36000
]25-35]	30	10	120	12	3600	108000
]35-45]	40	10	150	15	6000	240000
]45-65]	55	20	140	7	7700	423500
					19100	807500



$$b) i) S_x^2 = \frac{\sum x_i^2 F_i}{n} - \bar{X}^2 = \frac{807500}{500} - \left(\frac{19100}{500}\right)^2 =$$

$$= 1615 - 38,2^2 = 1615 - 1459,24 = 155,76$$

$$S_x = \sqrt{S_x^2} = \sqrt{155,76} = 12,480 \text{ ANOS}$$

$$CV_x = \frac{S_x}{\bar{X}} = \frac{12480}{38,2} = 0,3267 \text{ ou } 32,67 \%$$

ii) O desvio-padrão é uma medida absoluta de dispersão, expressa nas mesmas unidades do fenómeno em estudo.

O coeficiente de variação é uma medida relativa de dispersão e não depende das unidades em que a variável está expressa.

NOTA: Ambos traduzem dispersão em torno da média, pelo que este aspecto não distingue os dois indicadores

$$c) (A_p = \frac{\bar{X} - M_0}{S} = \frac{38,2 - 37,727}{12,480} = 0,0379 \rightarrow \text{Assimetria positiva ou enfiamento à esquerda.}$$

	xi	Fi	fi	si	xiFi	xifi	xi ² Fi	xi ² fi	xi-Média	(xi-Média) ²	(xi-Média) ³ Fi	(xi-Média) ⁴ fi
	20	90	0,1800	0,18	1800	3,60	36000	72	-18,2	331,24	29811,6000	59,6232
	30	120	0,2400	0,42	3600	7,20	108000	216	-8,2	67,24	8068,8000	16,1376
	40	150	0,3000	0,72	6000	12,00	240000	480	1,8	3,24	486,0000	0,9720
	55	140	0,2800	1,00	7700	15,40	423500	847	16,8	282,24	39513,6000	79,0272
Total		500	1,0000		19100	38,2	807500	1615	-38,2		77880	155,7600
Média					38,2		1615				155,76	
Variação												
Desvio-padrão						155,76						
Coefficiente de variação						12,4804						
						0,32671						

ESTATÍSTICA I
1º TESTE, 2010.04.17
GRUPO II

a)

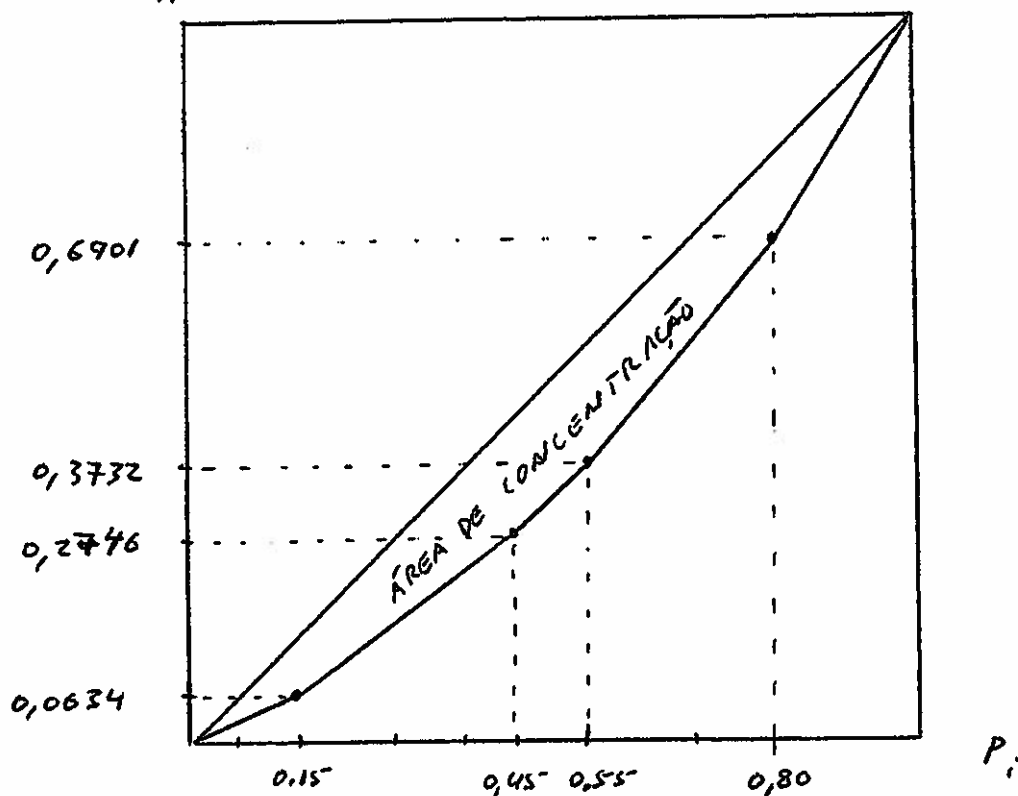
						Decumalrio para b)			
CLASSE	x_i	F_i	f_i	S_i	$n_i = p_i$	$x_i F_i$	q_i	$q_i + q_{i-1}$	$(q_i + q_{i-1}) f_i$
10-20	15	3	0,15	3	0,15	45	.0634	.0634	.00951
20-30	25	6	0,30	9	0,45	150	.2746	.3380	.1014
30-40	35	2	0,10	11	0,55	70	.3732	.6478	.06478
40-50	45	5	0,25	16	0,80	225	.6901	1.0633	.2658
50-60	55	4	0,20	20	1,00	220	1.000	1.6901	.33802
		20	1,00			710			.7796

b) i) $IG = 1 - \sum (q_i + q_{i-1}) f_i = 1 - 0,7796 = 0,2204$ ou 22,04%

ii) A área de concentração é 22,04% da área de concentração máxima.

Esta análise é relevante mas deve ter-se presente que os custos são inerentes a cada automóvel. Não podem ser transferidos de um automóvel para outro.

iii)



c) Soma a média dos custos. O IG seria zero.

NOTA: $\bar{x} = \sum x_i F_i / n = 710 / 20 = 35,5$

GRUPO II (cont.)

d) $M_e = 30 + \frac{0,50 - 0,45}{0,10} \times 10 = 30 + 0,5 \times 10 = 35$

$Q_1 = 20 + \frac{0,25 - 0,15}{0,30} \times 10 = 20 + 0,3(3) \times 10 = 23,33$

$Q_3 = 40 + \frac{0,75 - 0,55}{0,25} \times 10 = 40 + 0,8 \times 10 = 48$

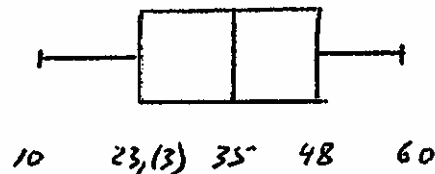
$(Q_3 - Q_1) \times 1,5 = 37,0005$

$Q_3 - Q_1 = 24,667$

$Q_1 - 37,0005 = -13,6675 \rightarrow 10$

$Q_3 + 37,0005 = 85,0005 \rightarrow 60$

Neste gráfico os extremos dos "bigodes" eram o limite inferior e superior do domínio.



NOTA: Não existem valores extremos.

ESTATÍSTICA I

1º TESTE, 2010.04.17

GRUPO III

$$a) f_1(x_4) = \frac{1+2+3+4}{100} = \frac{10}{100} = 0,10 \text{ ou } 10\%$$

Afirmação verdadeira

Conceito: frequência relativa marginal de x_4

$$b) f(x_3, y_4) + f(x_4, y_4) = \frac{12+4}{100} = 0,16 \text{ ou } 16\%$$

Afirmação falsa

Conceito: frequências conjuntas relativas de x e y

$$c) f(x_4 | y_4) = \frac{f(x_4, y_4)}{f_2(y_4)} = \frac{4}{40} = 0,10 \text{ ou } 10\%$$

Afirmação falsa

Conceito: frequência relativa condicional de x_4 dado y_4

$$d) \bar{y}_{0-2} = \frac{10 \times 4 + 30 \times 6 + 50 \times 8 + 70 \times 7}{25} = \frac{1110}{25} = 44,4$$

$$\bar{y}_{6-8} = \frac{10 \times 1 + 30 \times 2 + 50 \times 3 + 70 \times 4}{10} = \frac{500}{10} = 50$$

Afirmação falsa

Conceito: médias condicionais

$$e) \bar{y}_{0-2} \neq \bar{y}_{6-8} \Rightarrow X \text{ e } Y \text{ não são independentes}$$

Também pode ser provado através de verificação de que $f(x_i, y_j) \neq f_1(x_i) \times f_2(y_j), \forall i, j$

Afirmação falsa

Conceito: independência estatística

6)

		Y				
		10	30	50	70	
X	1	4	6	8	7	25
	3	2	6	10	17	35
		6	12	18	24	60

$$r = \frac{\text{COV}(X, Y)}{\text{DP}(X) \times \text{DP}(Y)} \quad \text{ou} \quad r = \frac{S_{XY}}{S_X S_Y}$$

$$\bar{X} = \frac{1 \times 25 + 3 \times 35}{60} = \frac{130}{60} = 2,1(6)$$

$$\bar{Y} = \frac{10 \times 6 + 30 \times 12 + 50 \times 18 + 70 \times 24}{60} = \frac{3000}{60} = 50$$

$$S_X^2 = \frac{\sum x_i^2 F_i}{n} - \bar{X}^2 = \frac{1^2 \times 25 + 3^2 \times 35}{60} - 2,1(6)^2 =$$

$$= \frac{340}{60} - 2,1(6)^2 = 0,97(2)$$

$$S_X = \sqrt{0,97(2)} = 0,9860$$

$$S_Y^2 = \frac{\sum y_i^2 F_i}{n} - \bar{Y}^2 = \frac{10^2 \times 6 + 30^2 \times 12 + 50^2 \times 18 + 70^2 \times 24}{60} - 50^2 =$$

$$= 2900 - 2500 = 400$$

$$S_Y = \sqrt{400} = 20$$

$$\sum x_i y_j F_{ij}$$

x_i	y_j	F_{ij}	$x_i y_j F_{ij}$
1	10	4	40
1	30	6	180
1	50	8	400
1	70	7	490
3	10	2	60
3	30	6	540
3	50	10	1500
3	70	17	3570
			<hr/>
			6780

$$\text{Cov}(X, Y) = \frac{\sum x_i y_j F_{ij}}{n} - \bar{X} \bar{Y} =$$

$$= \frac{6780}{60} - 2,1(6) \times 50 = 113 - 2,1(6) \times 50 = 4,5$$

$$r = \frac{4,5}{0,9860 \times 20} = \frac{4,5}{19,72} = 0,2282$$

Afirmacão falsa

Conceitos:

r : correlação linear

$r > 0$ " " positivo

$r = 0,2282$ " " fraca

1º TESTE, 2010.04.17

GRUPO IV-1

$$a) \quad I_{t/06}^P(L) = \frac{\sum P_t q_{06}}{\sum p_{06} q_{06}}$$

$$I_{04/06}^P = \frac{11 \times 9 + 6 \times 6 + 13 \times 9}{13 \times 9 + 6 \times 6 + 15 \times 9} = \frac{252}{288} = 0,875 \quad \text{ou} \quad 87,5$$

$$I_{05/06}^P = \frac{12 \times 9 + 5 \times 6 + 16 \times 9}{288} = \frac{282}{288} = 0,979 \quad \text{ou} \quad 97,9$$

$$I_{06/06}^P = \frac{288}{288} = 1 \quad \text{ou} \quad 100$$

$$I_{07/06}^P = \frac{17 \times 9 + 9 \times 6 + 17 \times 9}{288} = \frac{360}{288} = 1,25 \quad \text{ou} \quad 125$$

$$b) \quad I_{t/0}^P(L) \times I_{0/t}^P(L) = 1 ?$$

$$\frac{\sum P_t q_0}{\sum p_0 q_0} \times \frac{\sum p_0 q_t}{\sum P_t q_t} \neq 1$$

O índice de Laspeyres não é reversível no tempo.

$$I_{2/0}^P(L) = I_{2/1}^P(L) \times I_{1/0}^P(L) = ?$$

$$I_{2/0}^P(L) = \frac{\sum P_2 q_0}{\sum p_0 q_0}$$

$$I_{2/1}^P(L) \times I_{1/0}^P(L) = \frac{\sum P_2 q_1}{\sum p_1 q_1} \times \frac{\sum p_1 q_0}{\sum p_0 q_0}$$

Estas duas expressões são diferentes. O índice de Laspeyres não é circular.

c) $\underbrace{2004 \quad 2005 \quad 2006 \quad 2007}$

Incremento médio: $\sqrt[3]{\frac{1,25}{0,875}} = 1,126$

TX DE CRESCIMENTO MÉDIO: 12,6%.

d) i) Temos de ver como é que os salários evoluíram em termos reais. Temos de deflacionar os aumentos dos salários:

$I^P_{ANO t}$	$I^P_{t/06}$	$I^P_{t/04}$	$I^{\text{Salários}}_{t/04}$	$\frac{I^{\text{Salários}}_{t/04}}{I^P_{t/04}}$
2004	0,875	1,000	1,000	1,000
2005	0,979	1,119	1,17	1,046
2006	1,000	1,143	1,20	1,050
2007	1,250	1,429	1,31	0,917

ii) Os resultados a que chegamos não são exactos uma vez que o índice de despesas não é unitário, como se demonstrou em b)

GRUPO IV - 2

a) $\frac{239}{232} = 1,030 \rightarrow \text{TX VARIAÇÃO MENSAL DE DEZEMBRO 2009} = 3\%$

b) $\frac{239}{210} = 1,138 \rightarrow \text{TX VARIAÇÃO HOMÓLOGA DE DEZEMBRO 2009} = 13,8\%$

c) $\frac{2699}{1779} = \frac{\frac{2699}{12}}{\frac{1779}{12}} = 1,517 \rightarrow \text{TX VARIAÇÃO MÉDIA DOS ÚLTIMOS 12 MESES = 51,7% EM DEZEMBRO 2009}$



LICENCIATURAS EM ECONOMIA E GESTÃO

ESTATÍSTICA I

2º Teste - 4 de Junho de 2010

O teste é constituído por quatro grupos. Responda em folhas separadas para cada grupo. Se eventualmente não fizer algum grupo, entregue em branco a folha respectiva devidamente identificada.

Leia cuidadosamente a totalidade de cada grupo antes de o responder. Dê respostas mais simples sempre que o enquadramento teórico o permitir.

Explicite todas as hipóteses e os cálculos que tiver de fazer para a resolução dos problemas. Use um mínimo de três casas decimais. Os grupos ou as perguntas podem não estar pela ordem em que a matéria foi leccionada. Um grupo pode incluir diferentes matérias.

I (5,0 valores)

Num determinado concurso televisivo cada concorrente procede ao “Lançamento de dois dados perfeitos”, um azul (A) e um branco (B), numerados de um a 6.

- a) (i) Calcule o valor esperado e a variância dos pontos obtidos no lançamento do dado azul. Como interpreta esses resultados?
- (ii) Confirme o valor esperado e a variância obtidos em a) (i) através da função geradora de momentos.

Na primeira fase do concurso o concorrente ganha 10 euros por cada ponto que sai no dado azul e 20 euros por cada ponto que sai no dado branco.

- b) Calcule o valor esperado e a variância da soma dos euros ganhos no lançamento dos dois dados. [nesta alínea e nas seguintes não precisa de usar a função geradora de momentos].

A passagem do concorrente à fase seguinte do jogo exige que seja bem sucedido no lançamento dos dados. Sabe-se que, dos 36 resultados possíveis ao lançar os dois dados, só 9 permitem a aprovação do candidato nesta etapa. Caso contrário, é eliminado e o jogo reinicia-se com outro jogador.

Considere X a variável aleatória que representa o número de concorrentes eliminados sucessivamente até ao primeiro apurado.

- c) Determine a função de probabilidade de X e demonstre que esta apresenta as propriedades necessárias.
- d) Determine a expressão analítica da função de distribuição [probabilidade acumulada] e, através desta, calcule a probabilidade de $(5 \leq X < 10)$.

II (6,0 valores)

Uma empresa oferece seguros de saúde e cuidados médicos. Relativamente ao total dos seus clientes, a probabilidade de um deles ser internado num hospital é de 3%.

A probabilidade de um cliente ser internado depende de ser saudável, ter doenças ligeiras ou ter doenças graves. A prevalência de doenças num indivíduo varia consoante a sua idade, nomeadamente depende de ter mais ou menos de 65 anos. 20% dos clientes desta empresa têm mais de 65 anos.

Sabendo que um cliente tem mais de 65 anos, a probabilidade de ser saudável é de 40% e a probabilidade de ter doenças ligeiras é o dobro da probabilidade de ter doenças graves.

Sabendo que um cliente tem menos de 65 anos, a probabilidade de ter uma doença ligeira é quatro vezes a probabilidade de ter uma doença grave.

Tanto para o grupo com mais de 65 anos como para o grupo com menos de 65 anos, a probabilidade de um cliente com doenças ligeiras ser internado é de 5% e, também para os dois grupos de idade, para os clientes com doenças graves esta probabilidade é de 30%. Os clientes saudáveis nunca são internados.

- a) Represente a situação descrita através de um diagrama de árvore, a qual deve incluir todos os valores das probabilidades em causa.

Nota: Se não conseguir chegar a todas as probabilidades pedidas, arbitre valores coerentes para as probabilidades em falta na árvore pedida. A adequação da árvore e o uso da informação do texto inicial serão tomados em conta nas cotações das alíneas seguintes.

- b) Qual a probabilidade de um cliente escolhido ao acaso ter mais de 65 anos e não ser saudável?
- c) Sabendo que o António foi internado, qual a probabilidade de ele ter mais de 65 anos?
- d) A Maria e a Leonor são clientes desta empresa. Sabendo que a Maria tem 70 anos e a Leonor 40, e não tendo qualquer informação sobre o seu estado de saúde, qual a probabilidade de ambas terem sido internadas? Assuma que o estado de saúde e a necessidade de internamento de cada uma delas é independente do da outra.

A empresa aceitou fazer um novo seguro a um grupo de 100 pessoas, relativamente aos quais não sabe a idade, tendo apresentado a esse grupo uma proposta com um preço global, ou seja para o grupo, de 6000 euros para situações de internamento. O grupo achou que esse valor era muito alto e entregou a informação relativa aos seus membros, tendo-se verificado que todos tinham mais de 65 anos.

- e) Atendendo a que o custo para a seguradora com o internamento de cada pessoa é de 2000 euros, a proposta da seguradora deve ser revista? Justifique de forma quantificada.

III (4,0 valores)

1. Suponha que um aluno da Faculdade de Teologia da UCP sabe por tradição que 90% dos Católicos vivem no Continente A e 10% no Continente B. Desejando aprofundar os seus conhecimentos estudou a teoria de Bayes [Rev. Thomas Bayes da Igreja Presbiteriana Inglesa] e, consultando muitos registros das paróquias dos dois continentes, obteve a informação adicional de que, a percentagem de católicos do continente A era igual à percentagem do continente B. Terá ganho alguma coisa em termos de informação sobre as probabilidades estudar aqueles registros? Justifique quantitativamente utilizando uma árvore de decisão.
2. Considere a variável aleatória X , definida no intervalo $[0; b]$, tal que $\text{Prob}(X > x) = 1 - 0,01x^2$
 - a) Determine o valor de b .
 - b) Obtenha a expressão da função de densidade de probabilidade.
3. A probabilidade de uma variável aleatória estar compreendida entre os valores 0,2 e 0,8 é pelo menos igual a 0,75. Calcule a média e a variância desta variável aleatória.

IV (5,0 valores)

As variáveis aleatórias X e Y correspondem a indicadores químicos que medem o nível de determinadas substâncias químicas e que permitem avaliar a qualidade de um determinado produto, quando sujeito a análise.

Estima-se que estas variáveis X e Y tenham a seguinte função densidade de probabilidade conjunta:

$$f(x, y) = \begin{cases} 0,25 & , \quad \begin{cases} 0 < x < 2 \\ 0 < y < 4 \\ y + 2x \leq 4 \end{cases} \\ 0 & \text{outros valores de } x \text{ e de } y \end{cases}$$

Um produto para o qual X tome valores superiores a 1 ou Y tome valores superiores a 2 é considerado de qualidade inferior, sendo destruído.

- a) Em Média, qual o valor que se espera que um produto analisado apresente para o indicador X ?
- b) Como se altera o valor da alínea anterior sabendo que o indicador Y toma o valor de 1. O que pode concluir sobre a independência entre os indicadores X e Y ?
- c) Calcule a Função de Distribuição Conjunta de (X, Y) e utilize-a para calcular a probabilidade de um produto sujeito a análise não ser destruído.

Novas especificações impostas por lei obrigam à construção de dois novos indicadores, expresso como $W = (X^3 + 2Y)$ e como $Z = (XY)$.

- d) Para um qualquer produto sujeito a análise qual o valor esperado do novo indicador W e do novo indicador Z ?

I

a) (i) A: pontos saídos no dado azul

$$f(a) = \begin{cases} 1/6 & a = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \\ 0 & \text{outros valores de } a \end{cases}$$

$$E(A) = \sum_a a f(a) = (1+2+3+4+5+6) \times \frac{1}{6} = 3,5 \quad \text{pontos}$$

$$V(A) = \sum_a a^2 f(a) - E(A)^2 = (1+4+9+16+25+36) \times \frac{1}{6} - 3,5^2 = \frac{91}{6} - 12,25 = 15,16(6) - 12,25 = 2,91(6)$$

Se forem efetuadas sucessivas experiências aleatórias de lançar o dado, a média e a variância tendem para os valores indicados à medida que o n.º de experiências aleatórias aumenta. No limite são os valores encontrados.

$$(ii) \quad M_x(t) = E(e^{tx}) = \sum_x e^{tx} f(x) \\ = (e^t + e^{2t} + e^{3t} + e^{4t} + e^{5t} + e^{6t}) \times \frac{1}{6}$$

$$M'_x(t) = (e^t + 2e^{2t} + 3e^{3t} + 4e^{4t} + 5e^{5t} + 6e^{6t}) \times \frac{1}{6}$$

$$M'_x(t=0) = (1+2+3+4+5+6) \times \frac{1}{6} = 3,5 = E(X)$$

$$M''_x(t) = (e^t + 2^2 e^{2t} + 3^2 e^{3t} + 4^2 e^{4t} + 5^2 e^{5t} + 6^2 e^{6t}) \times \frac{1}{6}$$

$$M''_x(t=0) = (1+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2) \times \frac{1}{6} = \frac{91}{6} = E(X^2)$$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{91}{6} - 3,5^2 = 2,91(6)$$

b) B: Pontos saídos no dado branco

Tem a mesma distribuição dos pontos saídos no dado azul.

$$E(10A + 20B) = 10E(A) + 20E(B) =$$

$$= 10 \times 3,5 + 20 \times 3,5 = 35 + 70 = 105 \text{ EUROS}$$

$$V(10A + 20B) = 10^2 V(A) + 20^2 V(B) + 2 \times 10 \times 20 \times \text{COV}(A, B)$$

$$= 100 \times 2,91(6) + 400 \times 2,91(6) + 0$$

$$= 291,6 + 1166,4 = 1458,0$$

OS PONTOS OBTIDOS EM A E B SÃO RESULTADOS INDEPENDENTES

DELO QUE COV(A, B) DÁ ZERO.

c) X : N.º de concorrentes eliminados sucessivamente até ao primeiro apurado

$$P(X=0) = \frac{9}{36} \times \left(\frac{27}{36}\right)^0 = 0,25 \times 0,75^0 = 0,25$$

$$P(X=1) = 0,25 \times 0,75^1$$

$$P(X=2) = 0,25 \times 0,75^2$$

$$P(X=n) = 0,25 \times 0,75^n \rightarrow f(n) = \begin{cases} 0,25 \times 0,75^n, & n=0,1,2,\dots \\ 0 & \text{out. val. de } n \end{cases}$$

PROPRIEDADES:

1) $0,25 \times 0,75^n \geq 0$ para todos os valores de $n \in \mathbb{N}_0$

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} 0,25 \times \frac{1-0,75^n}{1-0,75} = 0,25 \times \frac{1}{1-0,75} = \frac{0,25}{0,25} = 1$

Os dois requisitos estão cumpridos

d) $F(n) = P(X \leq n) = \underbrace{0,25 + 0,25 \times 0,75^1 + \dots + 0,25 \times 0,75^n}_{n+1 \text{ TERMOS}} =$
 $= 0,25 \times \frac{1-0,75^{n+1}}{1-0,75} = 1 - 0,75^{n+1}, \quad n=0,1,2,\dots$

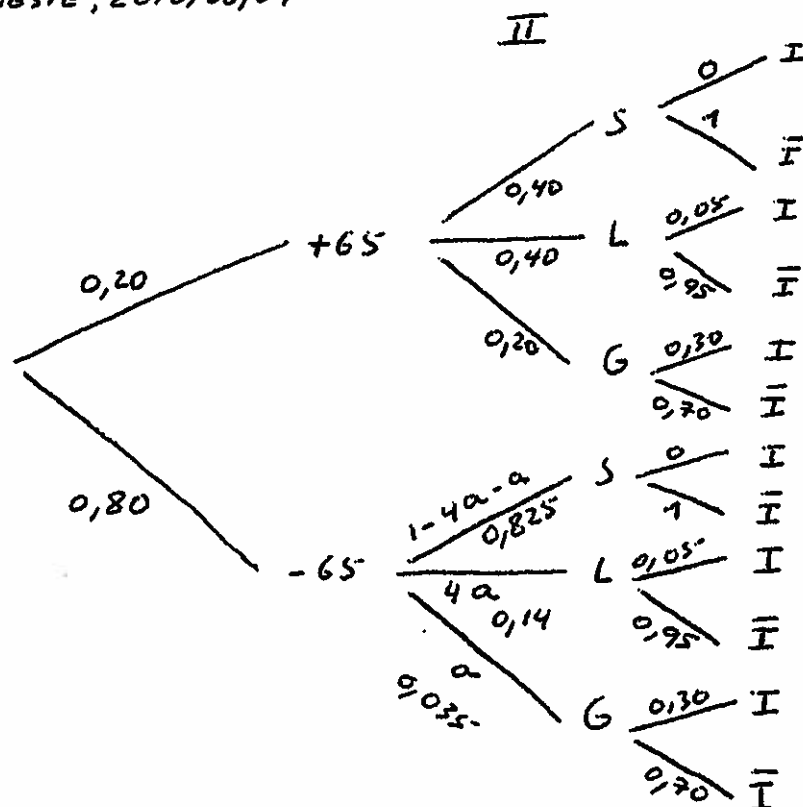
$$P(5 \leq X < 10) = P(5 < X \leq 10) - P(X=10) + P(X=5) =$$

$$= F(10) - F(5) - f(10) + f(5) =$$

$$= (1 - 0,75^{11}) - (1 - 0,75^6) - 0,25 \times 0,75^{10} + 0,25 \times 0,75^5 =$$

$$= 0,95776 - 0,82202 - 0,01408 + 0,05933 = 0,18099$$

a)



$$0,40 + 2 P(G|+65) + P(G|-65) = 1$$

$$\Leftrightarrow P(G|+65) = \frac{1-0,40}{3} = 0,20$$

$$P(L|+65) = 2 P(G|+65) = 2 \times 0,20 = 0,40$$

$$P(I) = 0,03 \quad [\text{PARÁGRAFO INICIAL DO ENUNCIADO}]$$

$$P(I) = 0,20 \times 0,40 \times 0,05 + 0,20 \times 0,20 \times 0,30 +$$

$$+ 0,80 \times 4a \times 0,05 + 0,80 \times a \times 0,30 =$$

$$= 0,004 + 0,012 + 0,16a + 0,24a =$$

$$= 0,016 + 0,4a$$

JUNTANDO AS DUAS CONDIÇÕES

$$0,016 + 0,4a = 0,03 \Leftrightarrow 0,4a = 0,014 \Leftrightarrow a = 0,035$$

$$P(G|-65) = 0,035$$

$$P(L|-65) = 4 \times 0,035 = 0,14$$

$$P(S|-65) = 1 - 0,035 - 0,14 = 0,825$$

$$\begin{aligned}
 b) \quad P(+65 \cap \bar{S}) &= P(+65 \cap L) + P(+65 \cap G) = \\
 &= P(+65) \times P(L | +65) + P(+65) \times P(G | +65) = \\
 &= 0,20 \times 0,40 + 0,20 \times 0,20 = 0,08 + 0,04 = 0,12
 \end{aligned}$$

$$c) \quad P(I | +65) = ?$$

$$\begin{aligned}
 P(I | +65) &= \frac{P(+65 \cap L \cap I) + P(+65 \cap G \cap I)}{P(I)} = \\
 &= \frac{0,20 \times 0,40 \times 0,05 + 0,20 \times 0,20 \times 0,30}{0,03 \quad (\text{INFORMAÇÃO INICIAL})} = \\
 &= \frac{0,004 + 0,012}{0,03} = \frac{0,016}{0,03} = 0,533(3)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 d) \quad P(\text{MARIA INTERNADA}) &= P(I | +65) = 0,40 \times 0,05 + 0,20 \times 0,30 = \\
 &= 0,08
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P(\text{LEONOR INTERNADA}) &= P(I | -65) = 0,14 \times 0,05 + 0,035 \times 0,30 = \\
 &= 0,0175
 \end{aligned}$$

$$P(\text{MARIA INTERNADA} \cap \text{LEONOR INTERNADA}) = 0,08 \times 0,0175 = 0,0014$$

e) Número de internamentos esperados:

$$100 \times P(I | +65) = 100 \times 0,08 = 8 \text{ pessoas}$$

Custo dos internamentos:

$$8 \times 2000 = 16000 \text{ euros}$$

A seguradora deve subir o seu preço em pelo menos:

$$16000 - 6000 = 10000 \text{ euros.}$$

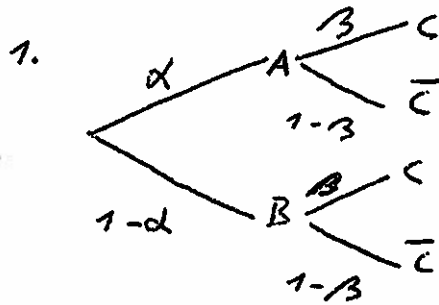
NOTA: A seguradora terá feito as contas pela probabilidade não condicionada do internamento. Já que

$$100 \times P(I) = 100 \times 0,03 = 3 \text{ pessoas}$$

$$3 \times 2000 = 6000 \text{ euros}$$

ESTATÍSTICA I

2.º TESTE, 2010/06/04

III

$$P(C|A) = P(C|B) = \beta$$

$$\begin{cases} \frac{\alpha \times \beta}{\alpha \times \beta + (1-\alpha) \times \beta} = 0,9 \\ \frac{(1-\alpha) \times \beta}{\alpha \times \beta + (1-\alpha) \times \beta} = 0,1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0,9 \\ 1-\alpha = 0,1 \end{cases}$$

% DA POPULAÇÃO TOTAL QUE VIVE EM A: 90%.

" " " " " " " " B: 10%.

RESPOSTA, NECESSARIAMENTE JUSTIFICADA

NOTA: Pode verificar-se que $P(A) = P(A|C) + P(B) = P(B|C)$. - Ahim, ganhar em conhecimentos ao saber $P(A) + P(B)$. MAS NÃO GANHA EM REVER AS PROBABILIDADES JA QUE AS PROBABILIDADES A POSTERIORI SÃO IGUAIS AS PROBABILIDADES A PRIORI.

2. a) $F(x) = P(X \leq x) = 1 - P(X > x) = 1 - (1 - 0,01x^2) = 0,01x^2$

$$F(b) = 1 \Rightarrow 0,01b^2 = 1 \Rightarrow b^2 = 100 \Rightarrow b = 10 \text{ [b é positivo]}$$

b) $f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = 0,02x, \quad 0 < x < 10$

NOTA: b também pode ser obtido como:

$$\int_0^b f(x) dx = 1 \Rightarrow \int_0^b 0,02x dx = 1 \Rightarrow \left[0,01x^2 \right]_0^b = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0,01b^2 = 1 \Rightarrow b = +\sqrt{100} = 10$$

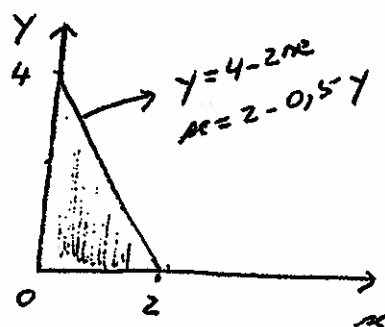
3. $P(0,20 \leq X \leq 80) > 0,75$

PELO T. TCHEBYCHEV: $1 - \frac{1}{k^2} = 0,75 \Rightarrow k = 2$

$$\begin{cases} \mu + 2\sigma = 0,80 \\ \mu - 2\sigma = 0,20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\mu = 1 \\ - \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu = 0,5 \\ \sigma = 0,15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu = 0,5 \\ \sigma^2 = 0,0225 \end{cases}$$

IV

$$f(x, y) = \begin{cases} 0,25 & \begin{cases} 0 < x < 2 \\ 0 < y < 4 \\ y + 2x \leq 4 \end{cases} \\ 0 & \text{out. val. de } x, y \end{cases}$$



$$a) f_1(x) = \int_0^{4-2x} 0,25 dy = [0,25y]_0^{4-2x} = 1 - 0,5x, \quad 0 < x < 2$$

$$E(X) = \int_0^2 x(1 - 0,5x) dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{0,5x^3}{3} \right]_0^2 = 2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3} = 0,666(6)$$

$$b) f(x|y=1) = \frac{f(x, y=1)}{f_2(y=1)}$$

$$f_2(y) = \int_0^{2-0,5y} 0,25 dx = [0,25x]_0^{2-0,5y} = 0,5 - 0,125y, \quad 0 < y < 4$$

$$f(x|y=1) = \frac{0,25}{0,5 - 0,125} = \frac{0,25}{0,375} = 0,666(6), \quad 0 < x < 1,5$$

$$\text{nota: } \begin{cases} x = 2 - 0,5y \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow x = 1,5$$

$$E[x|y=1] = \int_0^{1,5} x \cdot 0,666(6) dx = \left[\frac{0,666(6)x^2}{2} \right]_0^{1,5} =$$

$$= 0,75 \neq E(X) \Rightarrow X \text{ e } Y \text{ não são independentes}$$

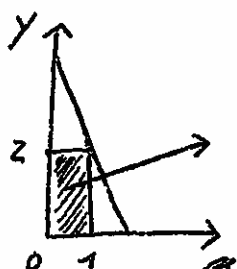
$$c) F(x, y) = \int_0^x \left[\int_0^y 0,25 \, dv \right] du =$$

$$= \int_0^x \left[0,25 \cdot v \right]_0^y du = \int_0^x 0,25 \cdot y \, du = \left[0,25 \cdot y \cdot u \right]_0^x =$$

$$= 0,25 \cdot y \cdot x = 0,25 \cdot x \cdot y \quad , \quad \begin{cases} 0 < x < 2 \\ 0 < y < 4 \\ y + 2x \leq 4 \end{cases}$$

$$P(X < 1, Y < 2) = F(2, 1) = 0,25 \cdot 2 \cdot 1 = 0,5$$

nota:



Valores para x e y em que o produto não é destruído.

$$d) E(W) = E(X^3 + 2Y) = E(X^3) + 2E(Y)$$

$$E(X^3) = \int_0^2 x^3 f_1(x) \, dx = \int_0^2 x^3 (1 - 0,5x) \, dx = \int_0^2 (x^3 - 0,5x^4) \, dx =$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{0,5x^5}{5} \right]_0^2 = \left[0,25x^4 - 0,1x^5 \right]_0^2 = 4 - 3,2 = 0,8$$

$$2E(Y) = 2 \int_0^4 y (0,5 - 0,125y) \, dy =$$

$$= 2 \int_0^4 (0,5y - 0,125y^2) \, dy = \left[\frac{0,5y^2}{2} - \frac{0,125y^3}{3} \right]_0^4 \times 2 =$$

$$= 2 \times (4 - 2,666(6)) = 2,666(6) \approx 2,667$$

$$E(Z) = E(XY) = \int_0^2 \left[\int_0^{4-2x} xy \cdot 0,25 \, dy \right] dx = \int_0^2 \left[\frac{0,25 \cdot x y^2}{2} \right]_0^{4-2x} dx =$$

$$= \int_0^2 \frac{0,25x}{2} (16 - 16x + 4x^2) \, dx = \int_0^2 (2x - 2x^2 + 0,5x^3) \, dx =$$

$$= \left[x^2 - \frac{2x^3}{3} + \frac{0,5x^4}{4} \right]_0^2 = 4 - \frac{16}{3} + 2 = \frac{18}{3} - \frac{16}{3} = \frac{2}{3}$$



LICENCIATURAS EM ECONOMIA E GESTÃO

ESTATÍSTICA I

Exame - 23 de Junho de 2010

O teste é constituído por quatro grupos. Responda em folhas separadas para cada grupo. Se eventualmente não fizer algum grupo, entregue em branco a folha respectiva devidamente identificada.

Lêa cuidadosamente a totalidade de cada grupo antes de o responder. Sempre que o enquadramento teórico o permite dê respostas mais simples.

Explicite todas as hipóteses e os cálculos que tiver de fazer para a resolução dos problemas. Use um mínimo de quatro casas decimais. Os grupos ou as perguntas podem não estar pela ordem em que a matéria foi leccionada. Um grupo pode incluir diferentes matérias.

I (4,0 valores)

Dispõe-se da seguinte informação, respeitante aos preços (P, em unidades monetárias, u.m.) e quantidades consumidas (Q, em unidades) de três bens:

Bem	2006		2007		2008		2009	
	P	Q	P	Q	P	Q	P	Q
1	3,1	12	4,4	-	3,5	15	2,8	-
2	1,3	-	1,6	16	2	10	1,5	-
3	4	-	3,5	20	4,5	14	4	18

- Utilizando a informação disponível, calcule para cada um dos anos, um índice de agregados ponderado com base em 2007.
 - Classifique o índice utilizado e interprete os resultados obtidos.
- Verifique analiticamente se o índice calculado na alínea anterior verifica as propriedades da reversibilidade (em relação ao tempo) e da circularidade.
- Qual a taxa média de crescimento anual do índice entre 2006 e 2009?
- Sabendo que a variação da despesa total entre 2007 e 2008 foi de 15% e que o índice de quantidades de Laspeyres de 2008 com base em 2006 foi de 1,21, calcule o valor do índice de quantidades de Laspeyres de 2007 com base em 2006.

II (6,0 valores)

Considere a seguinte distribuição conjunta de frequências absolutas:

		X			
		$[0 - 10]$	$]10 - 20]$	$]20 - 30]$	$]30 - 50]$
Y	1	10	0	0	0
	2	0	10	10	10
	3	0	10	20	30

- a) (i) Construa as distribuições marginais de frequências relativas de X e de Y .
(ii) Construa a distribuição condicional $f(x|y=2)$.
(iii) Verifique, através de médias condicionais, se as variáveis X e Y são independentes. Justifique analiticamente o seu procedimento.
- b) Sabendo que X e Y são grandezas de natureza diferente, expressas em unidades diferentes, compare a variação destas duas variáveis. Justifique a escolha do indicador que utilizou.
- c) Analise a variável X quanto à sua localização e, através desta, quanto à sua assimetria. Interprete.
- e) (i) Construa a “caixa dos bigodes” para a variável X .
(ii) Explique por palavras e em termos genéricos o que é possível observar através da “caixa dos bigodes”.
- e) Calcule o Índice de Gini para X . Indique também que características deve ter a variável X para fazer sentido o cálculo do Índice de Gini.

III (5,0 valores)

[Na resolução deste grupo use cinco casas decimais]

Três máquinas, designadas como máquina A, B e C, produzem respectivamente 50%, 30% e 20% do total de produtos de uma fábrica. O controlo de qualidade revelou que 3%, 4% e 5% respectivamente da produção de cada uma das máquinas é defeituosa. Quando os produtos não são defeituosos são vendidos por 2000 euros a unidade. Quando os produtos são defeituosos, em 10% dos casos têm de ser destruídos e não proporcionam qualquer ganho; nos restantes casos são recuperados e vendidos a metade do preço.

- a) Um produto escolhido ao acaso é defeituoso. Qual a probabilidade de ter sido produzido por cada uma das três máquinas?
- b) Um produto escolhido ao acaso vai ser destruído. Qual a probabilidade de não ter sido produzido pela máquina A?
- c) Há um operário que faz a recuperação dos produtos defeituosos que podem ser recuperados. Para a empresa não ter prejuízo com o salário desse operário qual o valor máximo desse salário por produto produzido?

O que se passa com a produção de cada máquina é independente do que se passa com a produção das outras máquinas. Suponha que foi escolhido um produto de cada máquina:

- d) Calcule o valor esperado do n.º de produtos defeituosos. Como interpreta o valor encontrado?
- e) Calcule o coeficiente de correlação linear de Pearson entre o n.º de produtos defeituosos e o n.º de produtos não defeituosos. Interprete.

IV (5,0 valores)

Considere a seguinte função densidade de probabilidade conjunta:

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 y & , \quad \begin{cases} 0 < x < 1 \\ 0 < y < \sqrt{6} \end{cases} \\ 0 & \text{outros valores de } x \text{ e de } y \end{cases}$$

- a) Calcule a Função Distribuição de Y e a partir dela determine a $P(Y < 2)$
- b) Determine a $P(Y > X)$
- c) Sabendo que $Y = 1$, calcule $P(0 < X < 0,5)$
- d) Calcule $\text{COV}(X,Y)$

LICENCIATURAS EM ECONOMIA E GESTÃO

ESTATÍSTICA I

FORMULÁRIO

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_i x_i F_i = \sum_i x_i f_i$$

$$\bar{x} = \sum_i w_i x_i \quad (\text{com } \sum_i w_i = 1)$$

$$\bar{x}_g = \sqrt[n]{x_1^{F_1} \times x_2^{F_2} \times \dots}$$

$$\bar{x}_h = \frac{1}{\frac{1}{n} \sum_i F_i \frac{1}{x_i}} = \frac{1}{\sum_i f_i \frac{1}{x_i}}$$

$$M = l_m + k \times \frac{F_m - F_{m-1}}{(F_m - F_{m+1}) + (F_m - F_{m-1})}$$

$$M_s = l_{m_s} + k_{m_s} \frac{0,5 - s(l_{m_s})}{s(L_{m_s}) - s(l_{m_s})}$$

$$Q_I = l_I + k_I \frac{0,25 - s(l_I)}{s(L_I) - s(l_I)}$$

$$Q_{III} = l_{III} + k_{III} \frac{0,75 - s(l_{III})}{s(L_{III}) - s(l_{III})}$$

$$IV = \max_{x_i} \{x_i\} - \min_{x_i} \{x_i\}$$

$$IIQ = Q_{III} - Q_I$$

$$DAM_x = \frac{1}{n} \sum_i F_i |x_i - \bar{x}| = \sum_i f_i |x_i - \bar{x}|$$

$$s_x^2 = \frac{1}{n} \sum_i F_i (x_i - \bar{x})^2 = \sum_i f_i (x_i - \bar{x})^2 = \sum_i f_i x_i^2 - \bar{x}^2$$

$$s_x = +\sqrt{s_x^2}$$

$$C_v = \frac{s_x}{\bar{x}} \times 100$$

$$CA_p = \frac{\bar{X} - M_o}{s}$$

$$CA_B = \frac{Q_3 + Q_1 - 2M_s}{Q_3 - Q_1}$$

$$K_{Fisher} = \frac{\sum_{i=1}^m (x_i - \bar{X})^4 F_i / n}{\left[\sum_{i=1}^m (x_i - \bar{X})^2 F_i / n \right]^2}$$

$$K = \frac{Q_3 - Q_1}{2(P_{90} - P_{10})}$$

$$IG = 1 - \sum_{j=1}^m (q_j + q_{j-1}) \times (p_j - p_{j-1})$$

$$F_i^{(x)} = F_i(X = x_i) = \sum_j F_{ij}$$

$$F_j^{(y)} = F_j(Y = y_j) = \sum_i F_{ij}$$

$$f(y_j | x_i) = \frac{F(x_i, y_j)}{F_i^{(x)}} = \frac{f(x_i, y_j)}{f_i^{(x)}}$$

$$f(x_i | y_j) = \frac{F(x_i, y_j)}{F_j^{(y)}} = \frac{f(x_i, y_j)}{f_j^{(y)}}$$

$$COV(X, Y) = \frac{1}{n} \sum_k (x_k - \bar{x})(y_k - \bar{y}) = \frac{1}{n} \sum_k x_k y_k - \bar{x} \bar{y}$$

$$COV(X, Y) = \frac{1}{n} \sum_i \sum_j F_{ij} (x_i - \bar{X})(y_j - \bar{Y}) = \sum_i \sum_j f_{ij} (x_i - \bar{x})(y_j - \bar{y}) = \sum_i \sum_j (x_i y_j f_{ij}) - \bar{x} \bar{y}$$

$$\text{ou} \quad = \frac{1}{n} \sum_i \sum_j (x_i y_j F_{ij}) - \bar{x} \bar{y}$$

$$r(X, Y) = \frac{COV(X, Y)}{s_x s_y}$$

Nota: As fórmulas abaixo têm 100 como referência para o ano base.

$$I_{i/0}^{(p)} = \frac{p_i}{p_0} \times 100 \quad I_{i/0}^{(q)} = \frac{q_i}{q_0} \times 100 \quad I_{i/0}^{(v)} = \frac{p_i q_i}{p_0 q_0} \times 100 \quad I_{i/0}^{(p)} = \frac{\sum_{i=1}^n p_{ii}}{\sum_{i=1}^n p_{0i}} \times 100$$

$$I_{(i/0)}^{(p)} = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n \frac{p_{ii}}{p_{0i}} \right) \times 100$$

$$I_{i/0}^{(q)} = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n \frac{q_{ii}}{q_{0i}} \right) \times 100$$

$$I_{(i/0)}^{(p)} = \left(\sum_{i=1}^n \frac{p_{ii}}{p_{0i}} \times w_i \right) \times 100$$

$$I_{i/0}^{(q)} = \left(\sum_{i=1}^n \frac{q_{ii}}{q_{0i}} \times w_i \right) \times 100$$

$$I_{i/0}^{(p)}(L) = \frac{\sum_{i=1}^n p_{ii} q_{0i}}{\sum_{i=1}^n p_{0i} q_{0i}} \times 100$$

$$I_{i/0}^{(q)}(L) = \frac{\sum_{i=1}^n p_{0i} q_{ii}}{\sum_{i=1}^n p_{0i} q_{0i}} \times 100;$$

$$I_{i/0}^{(p)}(P) = \frac{\sum_{i=1}^n p_{ii} q_{ii}}{\sum_{i=1}^n p_{0i} q_{ii}} \times 100$$

$$I_{i/0}^{(q)}(P) = \frac{\sum_{i=1}^n p_{ii} q_{ii}}{\sum_{i=1}^n p_{ii} q_{0i}} \times 100$$

$$I_{i/0}(F) = \sqrt{I_{i/0}(L) \times I_{i/0}(P)}$$

Nota: o formulário não esgota todos os tratamentos estatísticos possíveis.

Exame, 2010.06.23,
Grupo I - Resolução

a)

$$(i) I_{t/07}^P = \frac{\sum P_t * Q_{08}}{\sum P_{07} * Q_{08}}$$

$$I_{06/07}^P = \frac{3,1 * 15 + 1,3 * 10 + 4 * 14}{4,4 * 15 + 1,6 * 10 + 3,5 * 14} = \frac{115,5}{131} = 0,8817$$

$$I_{07/07}^P = 1$$

$$I_{08/07}^P = \frac{3,5 * 15 + 2 * 10 + 4,5 * 14}{131} = \frac{135,5}{131} = 1,0344$$

$$I_{09/07}^P = \frac{2,8 * 15 + 1,5 * 10 + 4 * 14}{131} = \frac{113}{131} = 0,8626$$

(ii) Índice de preços, agregado, absoluto e ponderado pelas quantidades de 2008.

(iii) Entre 2006 e 2007, os preços subiram em média cerca de 11,83%; entre 2007 e 2008 aumentaram cerca de 3,44% e entre 2007 e 2009 reduziram perto de 13,74%.

b)

Reversibilidade em relação ao tempo

$$I_{t/07} * I_{07/t} = 1 ?$$

$$\frac{\sum P_t * Q_{08}}{\sum P_{07} * Q_{08}} * \frac{\sum P_{07} * Q_{08}}{\sum P_t * Q_{08}} = 1$$

O índice verifica a propriedade da reversibilidade em relação ao tempo.

Circularidade

$$I_{t/07} = I_{t/08} * I_{08/07} ?$$

$$\frac{\sum P_t * Q_{08}}{\sum P_{07} * Q_{08}} = \frac{\sum P_t * Q_{08}}{\sum P_{08} * Q_{08}} * \frac{\sum P_{08} * Q_{08}}{\sum P_{07} * Q_{08}}$$

$$\frac{\sum P_t * Q_{08}}{\sum P_{07} * Q_{08}} = \frac{\sum P_t * Q_{08}}{\sum P_{07} * Q_{08}}$$

$$c) I_{09/06}^P = I_{09/07}^P * I_{07/06}^P = \frac{0,8626}{0,8817} = 0,9783$$

$$\sqrt[3]{(0,9783)} = 0,9927$$

Crescimento médio negativo de cerca de -0,73%.

$$d) I_{08/07}^P(P) * I_{08/07}^Q(L) = I_{08/07}^V$$

$$1,0344 * I_{08/07}^Q(L) = 1,15$$

$$I_{08/07}^Q(L) = 1,1118$$

Índices de quantidades de Laspeyres – Mudança de base

	Base 2006	Base 2007
2007	x	1
2008	1,21	1,1118

$$X = I_{07/06}^Q(L) = \frac{1,21}{1,1118} = 1,0883$$

II

a) i)

CLASSE	x_i	$f_1(x_i)$
0-10	5	$10/100 = 0,10$
10-20	15	$20/100 = 0,20$
20-30	25	$30/100 = 0,30$
30-50	40	$40/100 = 0,40$
		<u>1,00</u>

y_j	$f_2(y_j)$
1	$10/100 = 0,10$
2	$30/100 = 0,30$
3	$60/100 = 0,60$
	<u>1,00</u>

ii)

$$f(x|y=2) = \begin{cases} 0/30 = 0 & x = 5 \\ 10/30 = 1/3 & x = 15 \\ 10/30 = 1/3 & x = 25 \\ 10/30 = 1/3 & x = 40 \end{cases}$$

iii) Quando há independência estatística $f(x|y) = f_1(x)$.
 Sendo assim, como $\bar{X} = \sum_i f_1(x_i) \times x_i$, então, quando
 há independência estatística $\bar{X} = \bar{X}_y$

Assim, como temos que

$$\bar{X} = 5 \times 0,10 + 15 \times 0,20 + 25 \times 0,30 + 40 \times 0,40 = 27$$

$$\bar{X}_{y=2} = 5 \times 0 + 15 \times \frac{1}{3} + 25 \times \frac{1}{3} + 40 \times \frac{1}{3} = \frac{80}{3} = 26,6$$

Estes dois valores não são iguais, pelo
 que X e Y não são independentes.

- b) Como as grandezas estão expressas em unidades diferentes, a comparação deve ser feita com base no coeficiente de variação.

$$\bar{X} = 27$$

$$\frac{\sum x_i^2 F_i}{n} = (25^2 \times 10 + 225^2 \times 20 + 625^2 \times 30 + 1600 \times 40) / 100 = 87500 / 100 = 875$$

$$S_x^2 = 875 - 27^2 = 146$$

$$CV_x = \frac{\sqrt{146}}{27} = \frac{12,083046}{27} = 0,4475 \text{ ou } 44,75\%$$

$$\bar{Y} = (\sum y_j F_j) / n = \frac{1 \times 10 + 2 \times 30 + 3 \times 60}{100} = \frac{250}{100} = 2,5$$

$$\frac{\sum y_j^2 F_j}{n} = \frac{1^2 \times 10 + 4^2 \times 30 + 9^2 \times 60}{100} = 670 / 100 = 6,7$$

$$S_y^2 = 6,7 - 2,5^2 = 0,45$$

$$CV_y = \frac{\sqrt{0,45}}{2,5} = \frac{0,6708}{2,5} = 0,2683 \text{ ou } 26,83\%$$

A dispersão relativa é maior na variável X do que na Y.

c) $\bar{X} = 27$

$$Me = 20 + \frac{0,5 - 0,30}{0,3} \times 10 = 20 + 0,6(6) \times 10 = 26,6 \approx 26,6667$$

$H_0 = 25$ Uma vez que a densidade das classes adjacentes é igual a moda é o meio da classe.

CLASSE	x_i	F_i	F_i / K_i
0-10	5	10	1
10-20	15	20	2
20-30	25	30	3
30-50	40	40	2
		100	

$$M_0 < Me < \bar{X}$$

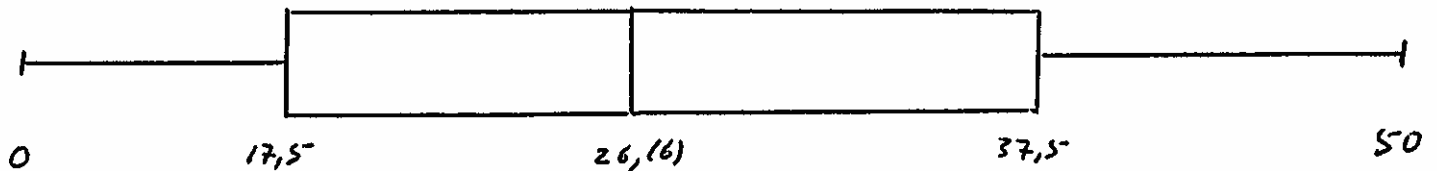
↳ Distribuição enviesada à esquerda ou assimétrica positiva.

$$d) i) \varphi_1 = 10 + \frac{0,25 - 0,10}{0,20} \times 10 = 10 \times 0,75 \times 10 = 17,5$$

$$\varphi_3 = 30 + \frac{0,75 - 0,60}{0,40} \times 20 = 30 + 0,375 \times 20 = 37,5$$

$$\varphi_3 - \varphi_1 = 20$$

$$(\varphi_3 - \varphi_1) \times 1,5 = 30$$



nota: Não existem "outliers"

ii) $\left. \begin{array}{l} \text{Dispersão} \\ \text{Simétrica} \\ \text{Valores extremos} \\ \text{Localização} \end{array} \right\} \text{ BASTAM PARA A RESPOSTA ESTAR TODA CERTA}$

2)	x_i	F_i	p_i	$x_i F_i$	q_i	$\sum f_i (q_i + q_{i-1})$
	5	10	0,10	50	$50/2700 = 0,01852$	0,001852
	15	20	0,30	300	$350/2700 = 0,12963$	0,029630
	25	30	0,60	750	$1000/2700 = 0,40741$	0,161112
	40	40	1,00	1600	$2700/2700 = 1,00000$	0,562964
		<u>100</u>		<u>2700</u>		<u>0,755558</u>

$$I.G. = 1 - \sum_i f_i (q_i + q_{i-1}) = 1 - 0,76 = 0,24 \text{ ou } 24 \%$$

Para o Índice de Gini fazer sentido deve tomar-se de uma grandeza que possa ser distribuída pelos "membros" da população em causa.

Estadística I - Examen
2010/06/23

			III		VALOR ESPERADO	VALOR ESPERADO RECUPERADOS
0,50 0,30 0,20	A	0,97	I	1	2000	970
			I	0,90	1000	13,5
		0,03	I	0,10	0	0
	B	0,96	I	1	2000	576
			I	0,90	1000	10,8
		0,04	I	0,10	0	0
C	0,95	I	I	1	2000	380
			I	0,90	1000	9
	0,05	I	I	0,10	0	0
TOTAL					1959,3	33,3

$$a) P(I) = 0,5 \times 0,03 + 0,3 \times 0,04 + 0,2 \times 0,05 = \\ = 0,015 + 0,012 + 0,01 = 0,037$$

$$P(A|I) = 0,015 / 0,037 = 0,405$$

$$P(B|I) = 0,012 / 0,037 = 0,324$$

$$P(C|I) = 0,010 / 0,037 = 0,270 \\ 0,999 \approx 1$$

$$b) P(D) = P(I) \times 0,1 = 0,0037$$

$$P[D \cap (B \cup C)] = (0,012 \times 0,10 + 0,01 \times 0,10) = 0,0022$$

$$P[(B \cup C) | D] = \frac{0,0022}{0,0037} = 0,5946$$

$$c) 13,5 + 10,8 + 9 = 33,3 \text{ EUROS por unidad producida.}$$

NOTA: R: 1000 euros por unidad recuperada.

R: 900 " " " defectuosas.

d) X : N.º de produtos defeituosos

$$P(X=0) = 0,97 \times 0,96 \times 0,95 = 0,88464$$

$$\begin{aligned} P(X=1) &= 0,03 \times 0,96 \times 0,95 + \\ &\quad + 0,97 \times 0,04 \times 0,95 + \\ &\quad + 0,97 \times 0,96 \times 0,05 = \\ &= 0,02736 + 0,03686 + 0,04556 = 0,11078 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X=2) &= 0,03 \times 0,04 \times 0,95 + \\ &\quad + 0,03 \times 0,96 \times 0,05 + \\ &\quad + 0,97 \times 0,04 \times 0,05 = \\ &= 0,00114 + 0,00144 + 0,00194 = 0,00452 \end{aligned}$$

$$P(X=3) = 0,03 \times 0,04 \times 0,05 = \frac{0,00006}{1,00000}$$

$$f(x) = \begin{cases} 0,88464 & x=0 \\ 0,11078 & x=1 \\ 0,00452 & x=2 \\ 0,00006 & x=3 \\ 0 & \text{out. val. de } x \end{cases}$$

NOTA:
Pode ser feito como
 $E[\text{MAPUINA 1} + \text{MAPUINA 2} + \text{MAPUINA 3}] =$
 $= 0,3 + 0,4 + 0,5 = 1,2$

$$\begin{aligned} E(X) &= 0 \times 0,88464 + 1 \times 0,11078 + 2 \times 0,00452 + 3 \times 0,00006 = \\ &= 0,12 \end{aligned}$$

Se esta experiência eletrónica for repetida muitas vezes, o n.º de peças de inferior qualidade é de 0,12.

e) $Y = 3 - X$: PRODUTOS DE BOA QUALIDADE

$$r = \frac{\text{COV}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

$$\begin{aligned} E(Y) &= 3 - E(X) \\ V(Y) &= V(X) \end{aligned}$$

NOTA:
Pode ser feito q o cálculo convém, a partir da função $f(x, y)$

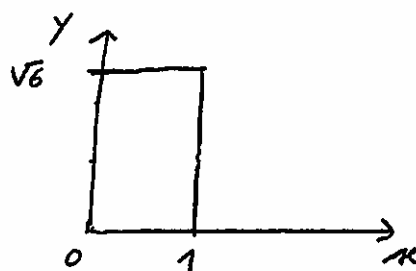
$$\begin{aligned} \text{COV}(X, Y) &= [(X - E(X))(3 - X - (3 - E(X)))] = [(X - E(X)) \times (-1)(X - E(X))] = \\ &= -V(X) \end{aligned}$$

$$r = \frac{-V(X)}{\sqrt{V(X)} \sqrt{V(X)}} = -1$$

A correlação é perfeita. Quando o n.º de produtos defeituosos diminui os perfeitos aumentam.

IV

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 y, & 0 < x < 1 \\ & 0 < y < \sqrt{6} \end{cases}$$



NOTA:

$$\int_0^1 \left[\int_0^{\sqrt{6}} x^2 y \, dy \right] dx = \int_0^1 \left[\frac{x^2 y^2}{2} \right]_0^{\sqrt{6}} dx = \int_0^1 3 x^2 dx =$$

$$= \left[x^3 \right]_0^1 = 1 - 0 = 1$$

NOTA:

$$F(x, y) = \int_0^x \left[\int_0^y v^2 v \, dv \right] du = \int_0^x \left[\frac{v^2 v^2}{2} \right]_0^y du = \int_0^x \frac{v^2 y^2}{2} du =$$

$$= \left[\frac{v^3 y^2}{6} \right]_0^x = \frac{x^3 y^2}{6}, \quad \begin{matrix} 0 < x < 1 \\ 0 < y < \sqrt{6} \end{matrix}$$

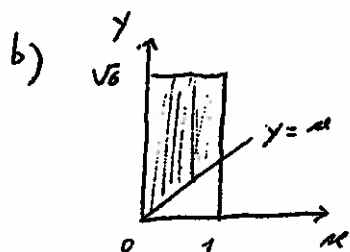
a)

$$f_2(y) = \int_0^1 x^2 y \, dx = \left[\frac{x^3 y}{3} \right]_0^1 = \frac{y}{3} \quad 0 < y < \sqrt{6}$$

NOTA:

$$\int_0^{\sqrt{6}} \frac{y}{3} \, dy = \left[\frac{y^2}{6} \right]_0^{\sqrt{6}} = \frac{6}{6} = 1$$

$$P(Y < 2) = \int_0^2 \frac{y}{3} \, dy = \left[\frac{y^2}{6} \right]_0^2 = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$



$$P(Y > x) = \int_0^1 \left[\int_x^{\sqrt{6}} x^2 y \, dy \right] dx = \int_0^1 \left[\frac{x^2 y^2}{2} \right]_x^{\sqrt{6}} dx =$$

$$= \int_0^1 \left(3x^2 - \frac{x^4}{2} \right) dx = \left[x^3 - 0,1 x^5 \right]_0^1 =$$

$$= 1 - 0,1 = 0,9$$

$$c) f(x|y=1) = \frac{f(x, y=1)}{f_2(y=1)} = \frac{x^2}{\frac{1}{3}} = 3x^2, \quad 0 < x < 1$$

nota: $\int_0^1 3x^2 dx = [x^3]_0^1 = 1$

$$P(0 < X < 0,5) = \int_0^{0,5} 3x^2 dx = [x^3]_0^{0,5} = 0,125$$

$$d) \text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

$$f_1(x) = \int_0^{\sqrt{6}} x^2 y dy = \left[\frac{x^2 y^2}{2} \right]_0^{\sqrt{6}} = 3x^2$$

nota: $f_1(x) = f(x|y) \Rightarrow X \text{ e } Y \text{ são independentes}$

Logo: $\text{Cov}(X, Y) = 0$

$$\begin{aligned} E(XY) &= \int_0^1 \left[\int_0^{\sqrt{6}} xy \cdot x^2 y dy \right] dx = \int_0^1 \left[\frac{x^3 y^3}{3} \right]_0^{\sqrt{6}} dx = \\ &= \int_0^1 2\sqrt{6} x^3 dx = \left[\frac{2\sqrt{6}}{4} x^4 \right]_0^1 = \frac{2\sqrt{6}}{4} \end{aligned}$$

$$E(X) = \int_0^1 x \cdot 3x^2 dx = \left[\frac{3x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{3}{4}$$

$$E(Y) = \int_0^{\sqrt{6}} y \cdot \frac{y}{3} dy = \left[\frac{y^3}{9} \right]_0^{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{9}$$

$$\text{Cov}(X, Y) = \frac{2\sqrt{6}}{4} - \frac{3}{4} \times \frac{2\sqrt{6}}{3} = \frac{2\sqrt{6}}{4} - \frac{2\sqrt{6}}{4} = 0$$

LICENCIATURAS EM ECONOMIA E GESTÃO

ESTATÍSTICA I

1º Teste - 21 de Outubro de 2010

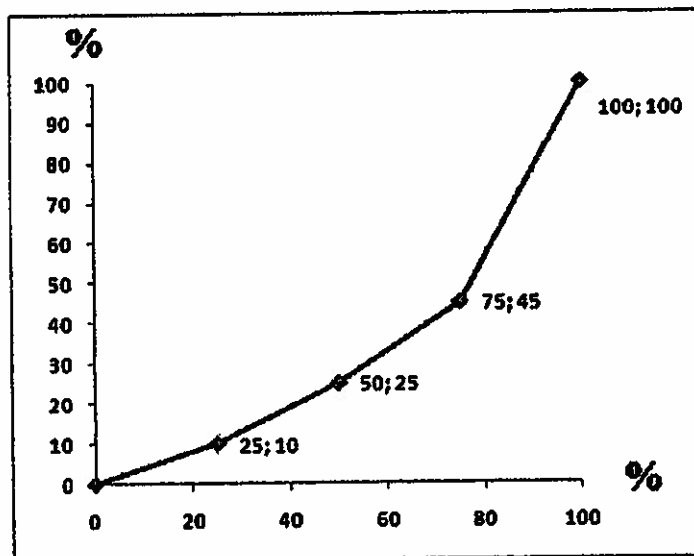
Responda em folhas separadas para cada grupo. Se eventualmente não fizer algum grupo, entregue em branco a folha respectiva devidamente identificada.

Leia cuidadosamente a totalidade de cada grupo antes de o responder.

Explicite todas as hipóteses e os cálculos que tiver de fazer para a resolução dos problemas. Use um mínimo de quatro casas decimais. Os grupos ou as perguntas podem não estar pela ordem em que a matéria foi leccionada. Um grupo pode incluir diferentes matérias.

I (4,0 valores)

A curva de Lorenz representativa do modo como as 200 famílias de certa comunidade detêm o rendimento nela produzido (igual a 1000 unidades monetárias) é a seguinte:



- Determine o índice de Gini. Explique o resultado encontrado.
- Para o rendimento familiar desta comunidade:
 - Calcule a média e interprete;
 - Calcule o desvio-padrão e interprete;
 - Calcule a mediana e interprete.

II (9,0 valores)

Considere os seguintes dados referentes à facturação de 40 empresas de um determinado sector:

X : facturação (milhões de euros)

Y : número de empregados

$X \backslash Y$	50 - 60	60 - 70	70 - 80	80 - 90
1,5 - 1,6	7	0	0	0
1,6 - 1,7	7	5	0	0
1,7 - 1,8	2	6	3	0
1,8 - 1,9	0	1	4	5

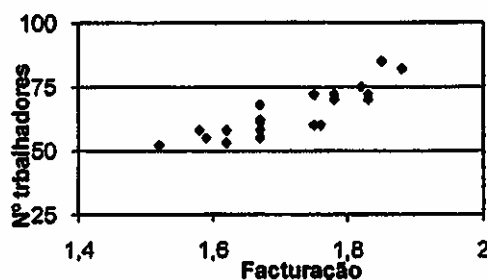
- a) Considere o conjunto das empresas de menor dimensão, i.e., aquelas que empregam 70 trabalhadores ou menos, e têm volume de facturação igual ou inferior a 1,8 milhões de euros. Num quadro de dupla entrada apresente a distribuição relativa conjunta das variáveis X e Y , condicionada a este conjunto de empresas, i.e., $f[(x, y) | x \leq 1.8, y \leq 70]$. Apresente também as respectivas distribuições marginais.

Nota: As alíneas abaixo têm todas como referência o quadro de dupla entrada original.

- b) Calcule a moda e a mediana da facturação. Interprete os valores encontrados.
- c) Construa a caixa dos bigodes da facturação. Interprete, em termos genéricos, a sua utilidade e o que está em causa com os "outliers".
- d) Utilizando a informação disponível que considerar mais conveniente compare a dispersão das variáveis "facturação" e "número de empregados". Justifique devidamente a escolha da medida de dispersão utilizada.

$$\sum_{i=1}^4 x_i^2 f(x_i) = 2.935; \quad \sum_{i=1}^4 x_i f(x_i) = 1.71; \quad \sum_{j=1}^4 y_j^2 f(y_j) = 4365; \quad \sum_{j=1}^4 y_j f(y_j) = 65.25$$

- e) Verifique, através das frequências, se a variável "número de empregados" é estatisticamente independente da variável "facturação" e confirme o resultado a que chegar através da comparação da média do número de empregados para as empresas com menor e maior facturação. Justifique analiticamente, em termos genéricos, o seu procedimento e as suas conclusões.
- f) Baseando-se no gráfico abaixo, e sem fazer cálculos, qual lhe parece ser o sinal da covariância entre as variáveis X e Y ? Justifique por palavras e utilize na explicação o gráfico abaixo e a fórmula da covariância.



III (7,0 valores)

PARTE 1

Uma empresa comercializa três produtos, A B e C, em relação aos quais dispõe da seguinte informação:

Produtos	2007		2008		2009	
	Q	P	Q	P	Q	P
A	70	*	85	10	75	*
B	100	*	105	5	107	*
C	100	*	115	5	115	6

Índices Quantidades

2005	96,5
2006	100
2007	112,3

Índice Valores

2007	84,6
2008	100
2009	102

A produção da empresa, em quantidade, aumentou de 36% entre 2000 e 2007.

- Comente a evolução da produção desta empresa entre 2007 e 2009 utilizando um Índice de Agregados Ponderado com base em 2008. Como denomina este índice?
- Qual foi a taxa anual média de crescimento da produção da empresa entre 2000 e 2009?
- Apresente a série completa (2005 -2009) de Índices Quantidade com base em 2007.
- Como evoluíram os preços praticados por esta empresa entre 2008 e 2009?

PARTE 2

Tem-se a seguinte informação sobre uma determinada região:

	PIB preços correntes	Índice Preços
2005	2400	90
2006	2595	95
2007	2800	98
2008	2878	100
2009	2960	102

- Qual foi o crescimento do PIB, em termos nominais, de 2005 para 2009? Que tipo de índice utilizou?
- E qual foi o crescimento do PIB, em termos reais, durante o mesmo período? Que tipo de índice utilizou?
- Qual o valor do PIB de 2009 a preços de 2006?

LICENCIATURAS EM ECONOMIA E GESTÃO

ESTATÍSTICA I

FORMULÁRIO

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_i x_i F_i = \sum_i x_i f_i$$

$$\bar{x} = \sum_i w_i x_i \quad (\text{com } \sum_i w_i = 1)$$

$$\bar{x}_g = \sqrt[n]{x_1^{F_1} \times x_2^{F_2} \times \dots}$$

$$\bar{x}_h = \frac{1}{\frac{1}{n} \sum_i F_i \frac{1}{x_i}} = \frac{1}{\sum_i f_i \frac{1}{x_i}}$$

$$M = l_m + k \times \frac{F_m - F_{m-1}}{(F_m - F_{m+1}) + (F_m - F_{m-1})}$$

$$M_e = l_{m_e} + k_{m_e} \frac{0,5 - s(l_{m_e})}{s(L_{m_e}) - s(l_{m_e})}$$

$$Q_I = l_I + k_I \frac{0,25 - s(l_I)}{s(L_I) - s(l_I)}$$

$$Q_{III} = l_{III} + k_{III} \frac{0,75 - s(l_{III})}{s(L_{III}) - s(l_{III})}$$

$$IV = \max_{x_i} \{x_i\} - \min_{x_i} \{x_i\}$$

$$IIQ = Q_{III} - Q_I$$

$$DAM_x = \frac{1}{n} \sum_i F_i |x_i - \bar{x}| = \sum_i f_i |x_i - \bar{x}|$$

$$s_x^2 = \frac{1}{n} \sum_i F_i (x_i - \bar{x})^2 = \sum_i f_i (x_i - \bar{x})^2 = \sum_i f_i x_i^2 - \bar{x}^2$$

$$s_x = +\sqrt{s_x^2}$$

$$C_v = \frac{s_x}{\bar{x}} \times 100$$

$$CA_p = \frac{\bar{X} - M_o}{s}$$

$$CA_B = \frac{Q_3 + Q_1 - 2M_e}{Q_3 - Q_1}$$

$$K_{Fisher} = \frac{\sum_{i=1}^m (x_i - \bar{X})^4 F_i / n}{\left[\sum_{i=1}^m (x_i - \bar{X})^2 F_i / n \right]^2}$$

$$K = \frac{Q_3 - Q_1}{2(P_{90} - P_{10})}$$

$$IG = 1 - \sum_{j=1}^m (q_j + q_{j-1}) \times (p_j - p_{j-1})$$

$$F_i^{(x)} = F_i(X = x_i) = \sum_j F_{ij}$$

$$F_j^{(y)} = F_j(Y = y_j) = \sum_i F_{ij}$$

$$f(y_j | x_i) = \frac{F(x_i, y_j)}{F_i^{(x)}} = \frac{f(x_i, y_j)}{f_i^{(x)}}$$

$$f(x_i | y_j) = \frac{F(x_i, y_j)}{F_j^{(y)}} = \frac{f(x_i, y_j)}{f_j^{(y)}}$$

$$COV(X, Y) = \frac{1}{n} \sum_i (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \frac{1}{n} \sum_i x_i y_i - \bar{x} \bar{y}$$

$$COV(X, Y) = \frac{1}{n} \sum_i \sum_j F_{ij} (x_i - \bar{x})(y_j - \bar{y}) = \sum_i \sum_j f_{ij} (x_i - \bar{x})(y_j - \bar{y}) = \sum_i \sum_j (x_i y_j f_{ij}) - \bar{x} \bar{y}$$

$$r(X, Y) = \frac{COV(X, Y)}{s_x s_y}$$

Nota: As fórmulas abaixo têm 100 como referência para o ano base.

$$I_{i/0}^{(p)} = \frac{P_i}{P_0} \times 100 \quad I_{i/0}^{(q)} = \frac{q_i}{q_0} \times 100 \quad I_{i/0}^{(v)} = \frac{P_i q_i}{P_0 q_0} \times 100 \quad I_{i/0}^{(p)} = \frac{\sum_{i=1}^n P_{ii}}{\sum_{i=1}^n P_{0i}} \times 100$$

$$I_{i/0}^{(p)} = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n \frac{P_{ii}}{P_{0i}} \right) \times 100$$

$$I_{i/0}^{(q)} = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n \frac{q_{ii}}{q_{0i}} \right) \times 100$$

$$I_{i/0}^{(p)} = \left(\sum_{i=1}^n \frac{P_{ii}}{P_{0i}} \times w_i \right) \times 100$$

$$I_{i/0}^{(q)} = \left(\sum_{i=1}^n \frac{q_{ii}}{q_{0i}} \times w_i \right) \times 100$$

$$I_{i/0}^{(p)}(L) = \frac{\sum_{i=1}^n P_{ii} q_{0i}}{\sum_{i=1}^n P_{0i} q_{0i}} \times 100$$

$$I_{i/0}^{(q)}(L) = \frac{\sum_{i=1}^n P_{0i} q_{ii}}{\sum_{i=1}^n P_{0i} q_{0i}} \times 100;$$

$$I_{i/0}^{(p)}(P) = \frac{\sum_{i=1}^n P_{ii} q_{ii}}{\sum_{i=1}^n P_{0i} q_{ii}} \times 100$$

$$I_{i/0}^{(q)}(P) = \frac{\sum_{i=1}^n P_{ii} q_{ii}}{\sum_{i=1}^n P_{ii} q_{0i}} \times 100$$

$$I_{i/0}(F) = \sqrt{I_{i/0}(L) \times I_{i/0}(P)}$$

Nota: o formulário não esgota todos os tratamentos estatísticos possíveis.

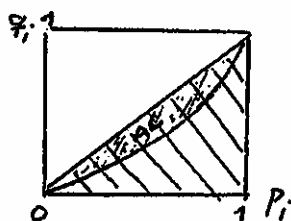
$$a) \quad IG = 1 - \sum_{i=1}^m f_i (q_i + q_{i-1})$$

x_i	F_i	f_i	$\alpha_i = p_i$	$x_i \cdot F_i$	$\sum_{j=1}^i x_j \cdot F_j$	q_i	$f_i (q_i + q_{i-1})$
2	50	0,25	0,25	100	100	0,10	0,0250
3	50	0,25	0,50	150	250	0,25	0,0875
4	50	0,25	0,75	200	450	0,45	0,1750
11	50	0,25	1,00	550	1000	1,00	0,3625
		1,00		1000			0,6500

$$q_i = \frac{\sum_{j=1}^i x_j \cdot F_j}{\sum_{i=1}^m x_i \cdot F_i} \Rightarrow \sum_{j=1}^i x_j \cdot F_j = q_i \times 1000$$

$$\alpha_i = \frac{x_i \cdot F_i}{F_i}$$

$$IG = 1 - 0,65 = 0,35 \text{ ou } 35\%$$



A área de concentração ^(LAC) sobre a área máxima de concentração é de 35%.

/// Área máxima de concentração.

$$b) \quad i) \quad \bar{x} = \frac{\sum x_i \cdot F_i}{n} = \frac{1000}{200} = 5 \text{ unidades monetárias.}$$

Se o rendimento estivesse igualmente distribuído pelas 200 famílias cada uma receberia 5 unidades monetárias.

$$ii) \quad S_x^2 = \sum x_i^2 f_i - \bar{x}^2 = (4 + 9 + 16 + 121) \times 0,25 - 5^2 = 150 \times 0,25 - 25 =$$

$$S_x = \sqrt{S_x^2} = 3,54 \quad \left| = 37,5 - 25 = 12,5 \text{ unidades monetárias.} \right.$$

Em média o rendimento de cada família afasta-se da média do rendimento 12,5 unidades monetárias [quando calculado a partir dos desvios quadrados para a média].

$$iii) \quad H_c = \frac{x_{100} + x_{101}}{2} = \frac{3 + 4}{2} = 3,5 \text{ unidades monetárias.}$$

Metade das famílias recebe 3,5 unidades monetárias

ou menos e metade recebe 3,5 unidades monetárias ou mais

NOTA: Com classe o valor sai direito do extremo da segunda classe.

a) Frequência absoluta condicionada

$X \backslash Y$	50-60	60-70	TOTAL
1,5-1,6	7	0	7
1,6-1,7	7	5	12
1,7-1,8	2	6	8
TOTAL	16	11	27

NOTA: Não é usual usar o termo condicionado para frequências absolutas - podemos entender como tal as frequências num subconjunto.

Cálculos pedidos no enunciado:

$X \backslash Y$	50-60	60-70	$f_1(x_i)$
1,5-1,6	.25926	0	.25926
1,6-1,7	.25926	.18519	.44445
1,7-1,8	.07407	.2222	.29627
$f_2(y_j)$.59259	.40741	1.0000

no interior do quadro:

$$f(x, y) | x \leq 1,8, y \leq 70$$

As distribuições marginais

$$f_1(x) | x \leq 1,8, y \leq 70$$

$$f_2(y) | x \leq 1,8, y \leq 70$$

d) Cálculos para X:

$$S_x^2 = \sum_{i=1}^4 x_i^2 f(x_i) - \left(\sum_{i=1}^4 x_i f(x_i) \right)^2 = 2,935 - 1,71^2 = 0,01090$$

$$S_x = \sqrt{S_x^2} = 0,10440$$

$$CV_x = \frac{S_x}{\bar{x}} = \frac{0,10440}{1,71} = 0,06105$$

ou 6,105%.

Cálculos para Y:

$$S_y^2 = \sum_{j=1}^4 y_j^2 f(y_j) - \left(\sum_{j=1}^4 y_j f(y_j) \right)^2 = 4365 - 65,25^2 = 107,43750$$

$$S_y = \sqrt{S_y^2} = 10,36521$$

$$CV_y = \frac{S_y}{\bar{y}} = \frac{10,36521}{65,25} = 0,15885$$

ou 15,885%.

A dispersão relativa da faturações é maior do que a dispersão relativa do numero de empregados.

Trata-se de variáveis de natureza diferente e expressas em unidades diferentes. A comparação da dispersão tem de ser feita por meio de uma medida relativa da dispersão.

b)

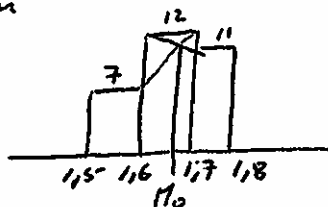
Classe	x_i	K_i	F_i	h_i	$A_i(K)$
1,5 - 1,6	1,55	0,1	7	0,175	0,175
1,6 - 1,7	1,65	0,1	12	0,300	0,475
1,7 - 1,8	1,75	0,1	11	0,275	0,750
1,8 - 1,9	1,85	0,1	10	0,250	1,000
			40	1,000	

MODA:

$$M_0 = 1,6 + \frac{(12-7)}{(12-7)+(12-11)} \times 0,1 =$$

$$= 1,6 + \frac{5}{6} \times 0,1 = 1,68333 \text{ unidades monetárias}$$

ou



$$\frac{12-11}{1,7-M_0} = \frac{12-7}{M_0-1,6} \Leftrightarrow \frac{1}{1,7-M_0} = \frac{5}{M_0-1,6} \quad (=)$$

$$\Leftrightarrow M_0 - 1,6 = 8,5 - 5M_0 \quad (=) 6M_0 = 10,1 \quad (=)$$

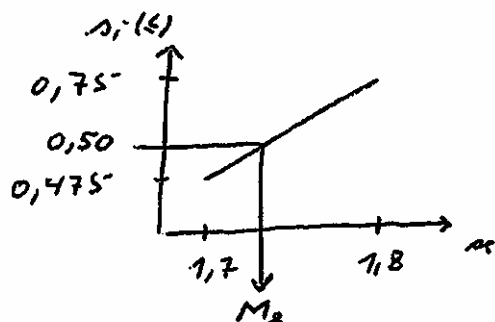
$$\Leftrightarrow M_0 = 10,1/6 = 1,68333$$

MEDIANA:

De acordo com os pressupostos usados para o cálculo da moda o valor da faturação que se verifica mais vezes é 1,68333 milhões de

$$M_e = 1,7 + \frac{0,5 - 0,475}{0,275} \times 0,1 = 1,7 + 0,09091 \times 0,1 = 1,70909 \text{ euros}$$

unidades monetárias.



$$\frac{0,75 - 0,475}{1,8 - 1,7} = \frac{0,5 - 0,475}{M_e - 1,7} \quad (=)$$

$$\Leftrightarrow \frac{0,275}{0,1} = \frac{0,025}{M_e - 1,7} \quad (=)$$

$$\Leftrightarrow 2,75 = \frac{0,025}{M_e - 1,7} \quad (=)$$

$$\Leftrightarrow M_e = 1,70909$$

Metade das observações são de valor 1,70909 milhões de euros ou menos; metade são de valor 1,70909 milhões de euros ou mais.

$$c) \quad Q_1 = 1,6 + \frac{0,25 - 0,175}{0,3} \times 0,1 = 1,625$$

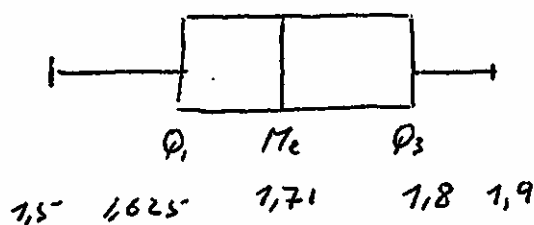
$$\text{ou } \frac{0,475 - 0,175}{1,7 - 1,6} = \frac{0,25 - 0,175}{Q_1 - 1,6} \Rightarrow Q_1 = 1,625$$

$Q_3 = 1,8$ O valor mais próximo do quântil pois atinge-se 75% das observações no final da terceira classe

$$(Q_3 - Q_1) \times 1,5 = 0,175 \times 1,5 = 0,2625$$

$Q_1 - 0,2625 = 1,3625 \rightarrow 1,5$ limite inferior do "boxplot" não pode ser menor que o extremo inferior do domínio

$Q_3 + 0,2625 = 2,0625 \rightarrow 1,9$ limite superior do "boxplot" não pode ser maior que o extremo superior do domínio



A caixa dos bigodes permite visualizar:

- a dispersão;
- a assimetria;
- a existência de valores extremos ["outliers"]

Valores acima ou abaixo do que se considera normal para aqueles dados.

12) Para haver independência estatística entre X e Y , para a amostra em causa, então:

$$f(x_i, y_j) = f_1(x_i) \times f_2(y_j) \quad \text{para quaisquer valores } (x_i, y_j) \text{ do domínio.}$$

Uma, por exemplo,

$$f(x_4, y_1) = 0/40 = 0$$

$$f_1(x_4) = 10/40 = 0,25$$

$$f_2(y_1) = 16/40 = 0,40$$

$$f_1(x_4) \times f_2(y_1) = 0,25 \times 0,40 = 0,10$$

$$[f(x_4, y_1) = 0] \neq [f_1(x_4) \times f_2(y_1) = 0,10] \quad \text{Pelo que as variáveis } X \text{ e } Y \text{ não são independentes.}$$

MÉDIAS CONDICIONADAS:

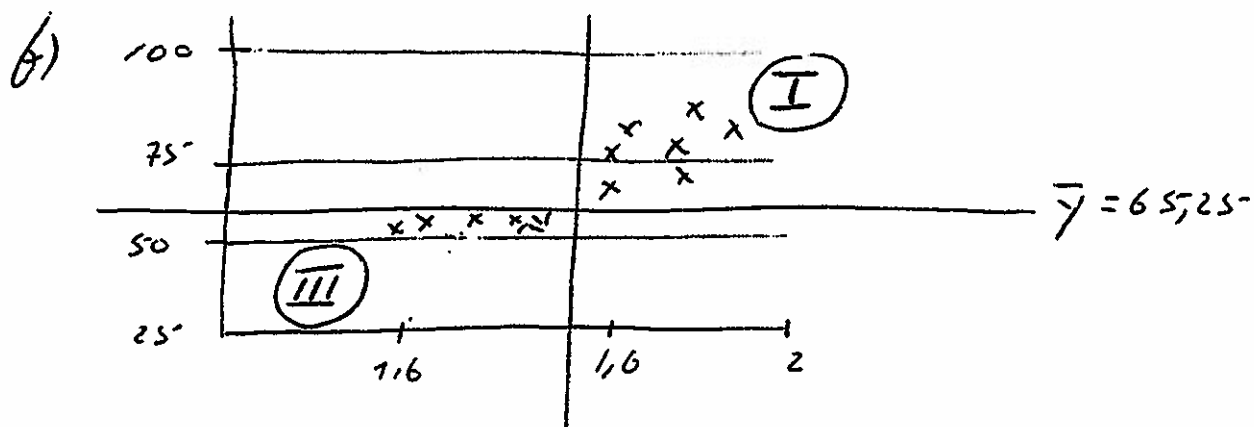
$$\bar{y}_{x \in [1,5-1,6]} = \frac{55 \times 7}{7} = 55$$

$$\bar{y}_{x \in [1,8-1,9]} = \frac{55 \times 0 + 65 \times 1 + 75 \times 4 + 85 \times 5}{10} = \frac{790}{10} = 79$$

Estas duas médias são diferentes. Se as ^{variáveis} fossem independentes eram iguais uma vez que as frequências relativas condicionadas eram iguais às frequências relativas não condicionadas.

$$\text{MÉDIA DE } Y = \sum y_j f(y_j)$$

Se houver independência estatística $f(y_j | x_i) = f(y_j)$ pelo que as médias condicionais são iguais e também iguais à média não condicionada.



$$\text{Cov}(X, Y) \text{ ou } S_{X,Y} = \frac{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^p (x_i - \bar{x})(y_j - \bar{y}) F(x_i, y_j)}{n}$$

O gráfico permite ver que os valores estão predominantemente no primeiro e no terceiro quadrantes. Logo, os produtos dos desvios são predominantemente positivos e o sinal da covariância é positivo.

1.º TESTE, 2010/10/21

GRUPO III

PARTI 1

a) $I_{t/2008}^p = \frac{\sum p_{08} q_t}{\sum p_{08} q_{08}}$ É UM ÍNDICE DE LASPEYRES

$$I_{07/08} = \frac{10 \times 70 + 5 \times 100 + 5 \times 100}{10 \times 85 + 5 \times 105 + 5 \times 115} = \frac{1700}{1950} = 0,8718 \text{ ou } 87,18$$

$$I_{08/08} = \frac{1950}{1950} = 1 \text{ ou } 100$$

$$I_{09/08} = \frac{10 \times 75 + 5 \times 107 + 5 \times 115}{1950} = \frac{1860}{1950} = 0,95385$$

b)

$$\underbrace{2000}_{1,36} \quad \underbrace{2007}_{0,95385} \quad \underbrace{2009} = 1,094$$

$$I_{2009/2000} = 1,36 \times 1,094 = 1,48784$$

2000 2001 2002 2003 2004 2005 2006 2007 2008 2009

$$\sqrt[9]{1,48784} = 1,045$$

10,032% Taxa média anual de crescimento da produção, entre 2000 e 2009.

c)

	$I_{t/06}^p$	$I_{t/08}^p$	$I_{t/07}^p$
2005	96,5		$96,5 / 112,3 \times 100 = 85,931$
2006	100		$100 / 112,3 \times 100 = 89,047$
2007	112,3	87,78	$112,3 / 112,3 \times 100 = 100$
2008	128,814	100	$128,814 / 112,3 \times 100 = 114,705$
2009	122,869	95,385	$122,869 / 112,3 \times 100 = 109,471$

$$I_{08/06}^p = \frac{100}{87,78} \times 112,3 = 128,814$$

$$I_{09/06}^p = 128,814 \times \frac{95,385}{100} = 122,869$$

$$I_{t/07}^p = \frac{I_{t/06}^p}{I_{07/06}^p} \times 100$$

$$d) I^V = I^P(L) \times I^P(P) = I^P(P) \times I^P(L)$$

$$\frac{I^P(P)}{09/08} = \frac{I^V}{\frac{I^P(L)}{09/08}} = \frac{102}{95,385} = 1,06935 \text{ ou } 106,935$$

Entre 2008 e 2009 os preços evoluíram 6,935%.

PARTE 2		
	PIB PREÇOS CORRENTES	ÍNDICE DE PREÇOS
2005	2400	90
2006	2595	95
2007	2800	98
2008	2878	100
2009	2960	102

$$a) I_{09/05}^{PIB (NOMINAL)} = \frac{2960}{2400} = 1,23333 \text{ ou } 123,333$$

O crescimento nominal foi 23,33%.

$$I_{09/05}^{PIB (NOMINAL)} = \frac{\sum P_{09-09}}{\sum P_{05-05}} \quad \text{É UM ÍNDICE DE VALOR}$$

$$b) I_{09/05}^{PIB (REAL)} = \frac{\frac{PIB_{2009}}{P_{2008}}}{\frac{PIB_{2005}}{P_{2008}}} = \frac{\frac{2960}{1,02}}{\frac{2400}{0,90}} = \frac{2901,96}{2666,67} = 1,08823$$

O crescimento real foi 8,82%.

$$I_{09/05}^{PIB (REAL)} = \frac{\sum P_{08-09}}{\sum P_{08-05}} \quad \text{É UM ÍNDICE DE QUANTIDADES.}$$

$$c) PIB_{P_{2006}}^{2009} = \frac{2960}{1,02} \times 0,95 = 2756,86$$

$$\hookrightarrow PIB_{P_{2009}}^{2009} \times \frac{1}{I_{09/06}^P}$$

LICENCIATURAS EM ECONOMIA E GESTÃO

ESTATÍSTICA I

2º Teste - 5 de Janeiro de 2011

Responda em folhas separadas para cada grupo. Se eventualmente não fizer algum grupo, entregue em branco a folha respectiva devidamente identificada.

Explicite todas as hipóteses e os cálculos que tiver de fazer para a resolução dos problemas. Use um mínimo de quatro casas decimais. Leia cuidadosamente a totalidade de cada grupo antes de o responder.

Os grupos ou as perguntas podem não estar pela ordem em que a matéria foi leccionada. Um grupo pode incluir diferentes matérias.

I (7,0 valores)

Após a morte do Sr. Inácio, os seus seis herdeiros acordaram dividir o património em seis parcelas de igual valor que serão atribuídas a cada herdeiro. Assim, as parcelas foram numeradas de 1 a 6 e representadas através de bolas com o mesmo número colocadas dentro de uma caixa. O filho mais velho deverá iniciar o sorteio e, como tal, tem o direito a tirar duas bolas da caixa sem reposição e escolher a parcela que mais lhe agradar.

Seja X o módulo da diferença entre as bolas retiradas pelo filho mais velho e Y o menor valor dessas duas bolas.

- a) Determine a função de probabilidade da variável aleatória X e a a função de probabilidade da variável aleatória Y .
- b) i) Determine a função de probabilidade de (X, Y) e verifique se as duas variáveis são estatisticamente independentes.
ii) Calcule $P(X + Y \leq 4 | Y < 4)$.
- c) Determine a função de distribuição conjunta de (X, Y) e, através desta, $P(2 \leq X < 4; 2 < Y \leq 5)$
- d) Calcule o valor esperado da variável aleatória X através da função geradora de momentos.

II (6,0 valores)

Depois de consultar diversos estudos sobre o mercado em que a sua empresa actua, um gestor probabilizou as vendas a realizar no próximo ano do seguinte modo:

Quantidade a vender	Probabilidade
A: superior a 300 unidades	0,5
B: entre 100 e 300 unidades inclusivé	0,3
C: inferir a 100 unidades	0,2

Este gestor pensa que a realização de uma campanha publicitária poderá alterar estas probabilidades, aumentando a probabilidade de vender mais de 300 unidades para 60% e diminuindo a probabilidade de vender menos de 100 unidades para 15%.

Qualquer campanha implica a contratação de uma firma especializada em publicidade e de momento apresentam-se duas candidatas: a Publy e a Brandy, esta última com uma probabilidade três vezes maior de vir a ser escolhida.

A decisão de levar a cabo uma campanha publicitária é tomada na reunião de direcção. No actual contexto de crise prevê-se que seja de 40% a probabilidade de optar pela realização da campanha publicitária.

Neste momento e considerando toda a informação disponível

- a) Qual a probabilidade de que a empresa venda no próximo ano uma quantidade igual ou superior a 100 unidades?

Considere que de facto a empresa conseguiu vender 500 unidades.

- b) Qual a probabilidade de ter sido feita a campanha?
- c) E qual a probabilidade de ter sido feita a campanha pela Publy?
- d) Será que a obtenção desse volume de vendas depende da escolha da agência? Justifique.

III (7,0 valores)

O Sr. Ernesto, tem um hotel de charme no Alentejo, que oferece ao fim-de-semana dois tipos de produtos, o *pack Y* (que inclui programa de entretenimento – bicicleta, cavalo, canoagem, jogos) e o *pack X* (sem programa de entretenimento).

A função densidade de probabilidade conjunta de X e Y é representada por:

$$f(x,y) = \begin{cases} x/2 + y/4 & \text{para } 0 < x < 1 ; 0 < y < k \\ 0 & \text{para outros valores de } x \text{ e } y \end{cases}$$

X representa a receita com as vendas do *pack X* (em milhares de euros) e Y representa a receita com as vendas do *pack Y* (também em milhares de euros).

- a) Qual a receita máxima que o *pack Y* pode gerar num fim-de-semana?

Nota: Se não resolveu a alínea a) considere $0 < y < 2$ para a resolução das restantes alíneas.

- b) Qual a probabilidade de que as receitas do *pack X* sejam inferiores às receitas do *pack Y*?
- c) Calcule a função distribuição $F(x,y)$ e a partir dela calcule a probabilidade das receitas de X e das receitas de Y excederem simultaneamente os 0,5 milhares de euros.
- d) Qual o valor esperado e a variância das receitas geradas pelo *pack Y*?
- e) O filho do Sr. Ernesto pensa que o aumento das receitas com o *pack Y* num fim-de-semana leva necessariamente à diminuição das receitas com o *pack X*. Concorda com esta afirmação? Justifique.

Grupo I

Após a morte do Sr. Inácio, os seus seis herdeiros acordaram dividir o património em seis parcelas de igual valor que serão atribuídas a cada herdeiro. Assim, as parcelas foram numeradas de 1 a 6 e representadas através de bolas com o mesmo número colocadas dentro de uma caixa. O filho mais velho deverá iniciar o sorteio e, como tal, tem o direito a tirar duas bolas da caixa sem reposição e escolher a parcela que mais lhe agrada.

Seja X o módulo da diferença entre as bolas retiradas pelo filho mais velho e Y o menor valor dessas duas bolas.

a) Determine a função de probabilidade da variável aleatória X e a a função de probabilidade da variável aleatória Y.

1ª Bola Tirada	2ª Bola Tirada	Módulo da Diferença	Menor valor das bolas	Probabilidade
1	2	1	1	$1/6 \times 1/5 = 1/30$
	3	2	1	1/30
	4	3	1	1/30
	5	4	1	1/30
	6	5	1	1/30
2	1	1	1	1/30
	3	1	2	1/30
	4	2	2	1/30
	5	3	2	1/30
3	6	4	2	1/30
	1	2	1	1/30
	2	1	2	1/30
	4	1	3	1/30
4	5	2	3	1/30
	6	3	3	1/30
	1	3	1	1/30
	2	2	2	1/30
5	3	1	3	1/30
	4	1	4	1/30
	6	2	4	1/30
	1	4	1	1/30
6	2	3	2	1/30
	3	2	3	1/30
	4	1	4	1/30
	6	1	5	1/30
6	1	5	1	1/30
	2	4	2	1/30
	3	3	3	1/30
	4	2	4	1/30
	5	1	5	1/30

x	$f_1(x)$
1	10/30
2	8/30
3	6/30
4	4/30
5	2/30

y	$f_2(y)$
1	10/30
2	8/30
3	6/30
4	4/30
5	2/30

Nota: As funções poderiam ser determinadas a partir da função de probabilidade conjunta de (X,Y).

- b) i) Determine a função de probabilidade de (X,Y) e verifique se as duas variáveis são estatisticamente independentes.

Quero calcular $f(x,y)$

x\y	1	2	3	4	5	$f_1(x)$
1	2/30	2/30	2/30	2/30	2/30	10/30
2	2/30	2/30	2/30	2/30	0	8/30
3	2/30	2/30	2/30	0	0	6/30
4	2/30	2/30	0	0	0	4/30
5	2/30	0	0	0	0	2/30
$f_2(y)$	10/30	8/30	6/30	4/30	2/30	1

$f(x_1, y_2) \neq f_1(x_1) \times f_2(y_2)$ Para todos os valores do domínio \Rightarrow Não há independência estatística entre X e Y. [Na resposta era necessário exemplificar; nota: basta haver zeros na tabela acima para vermos que esta situação ocorre].

- ii) Calcule $P(X + Y \leq 4 | Y < 4)$.

$$P(X + Y \leq 4 | Y < 4) = \frac{P(X + Y \leq 4; Y < 4)}{P(Y < 4)} = \frac{12/30}{24/30} = \frac{1}{2}$$

- c) i) Determine a função de distribuição conjunta de (X,Y) e, através desta, $P(2 \leq X < 4; 2 < Y \leq 5)$

Quero calcular $F(x,y)$:

x\y	1	2	3	4	5	$F_1(x)$
1	2/30	4/30	6/30	8/30	10/30	10/30
2	4/30	8/30	12/30	16/30	18/30	18/30
3	6/30	12/30	18/30	22/30	24/30	24/30
4	8/30	16/30	22/30	26/30	28/30	28/30
5	10/30	18/30	24/30	28/30	30/30	30/30
$F_2(y)$	10/30	18/30	24/30	28/30	30/30	1

$$\begin{aligned} P(2 \leq X < 4; 2 < Y \leq 5) &= F(4, 5) - F(2, 5) - F(4, 2) + F(2, 2) - \\ &\quad - f(x=4; 2 < Y \leq 5) + f(x=2; 2 < Y \leq 5) = \\ &= (28/30 - 18/30 - 16/30 + 8/30) - (0 + 0 + 0) + (2/30 + 2/30 + 0) = 6/30 = 1/5 \end{aligned}$$

Forma mais expedita de resolver:

$$\begin{aligned} P(2 \leq X < 4; 2 < Y \leq 5) &= P(1 < X \leq 3; 2 < Y \leq 5) = \\ &= F(3, 5) - F(3, 2) - F(1, 5) + F(1, 2) = 24/30 - 12/30 - 10/30 + 4/30 = 6/30 = 1/5 \end{aligned}$$

Nota:

x\y	1	2	3	4	5	$f_1(x)$
1	2/30	2/30	2/30	2/30	2/30	10/30
2	2/30	2/30	2/30	2/30	0	8/30
3	2/30	2/30	2/30	0	0	6/30
4	2/30	2/30	0	0	0	4/30
5	2/30	0	0	0	0	2/30
$f_2(y)$	10/30	8/30	6/30	4/30	2/30	1

- d) Calcule o valor esperado da variável aleatória X através da função geradora de momentos.

$$M_x(t) = E[e^{tx}] = \sum_x e^{tx} f(x) = e^{1t} \frac{10}{30} + e^{2t} \frac{8}{30} + e^{3t} \frac{6}{30} + e^{4t} \frac{4}{30} + e^{5t} \frac{2}{30} =$$

$$M'_x(t) = \frac{dM_x(t)}{dt} = e^{1t} \frac{10}{30} + e^{2t} \frac{16}{30} + e^{3t} \frac{18}{30} + e^{4t} \frac{16}{30} + e^{5t} \frac{10}{30}$$

$$E[X] = M'_x(t=0) = \frac{10}{30} + \frac{16}{30} + \frac{18}{30} + \frac{16}{30} + \frac{10}{30} = \frac{70}{30} = 2, (3)$$

Resolução alternativa a partir da segunda parte da alínea b)

Função $f(x,y)$

$x \backslash y$	1	2	3	4	$f_i(x)$
1	1/10	0	0	0	1/10
2	0	1/10	1/10	0	2/10
3	0	1/10	0	1/10	2/10
4	0	0	2/10	3/10	5/10
$f_j(y)$	1/10	2/10	3/10	4/10	1

PARA OS ALUNOS QUE
NÃO CONSEGUIRAM
RESOLVER a) e a PRIMEIRA
PARTE DE b).

- b) i) A partir da função de probabilidade de (X,Y) verifique se as duas variáveis são estatisticamente independentes.

$f(x_1, y_2) \neq f_1(x_1) \times f_2(y_2)$ Para todos os valores do domínio \Rightarrow Não há independência estatística entre X e Y . [Basta haver zeros na tabela acima para vermos que esta situação ocorre].

- ii) Calcule $P(X+Y \leq 4 | Y < 4)$.

$$P(X+Y \leq 4 | Y < 4) = \frac{P(X+Y \leq 4; Y < 4)}{P(Y < 4)} = \frac{2/10}{6/10} = \frac{1}{3}$$

- c) i) Determine a função de distribuição conjunta de (X,Y) e, através desta, $P(2 \leq X < 4; 2 < Y \leq 4)$

Quero calcular $F(x,y)$:

$x \backslash y$	1	2	3	4	$F_i(x)$
1	1/10	1/10	1/10	1/10	1/10
2	1/10	2/10	3/10	3/10	3/10
3	1/10	3/10	4/10	5/10	5/10
4	1/10	3/10	6/10	10/10	10/10
$F_j(y)$	1/10	3/10	6/10	10/10	1

$$\begin{aligned} P(2 \leq X < 4; 2 < Y \leq 4) &= F(4,4) - F(2,4) - F(4,2) + F(2,2) - \\ &\quad - f(x=4; 2 < Y \leq 4) + f(x=2; 2 < Y \leq 4) = \\ &= (10/10 - 3/10 - 3/10 + 2/10) - (2/10 + 3/10) + (1/10 + 0) = 2/10 = 1/5 \end{aligned}$$

Forma mais expedita de resolver:

$$\begin{aligned} P(2 \leq X < 4; 2 < Y \leq 4) &= P(1 < X \leq 3; 2 < Y \leq 4) = \\ &= F(3,4) - F(3,2) - F(1,4) + F(1,2) = 5/10 - 3/10 - 1/10 + 1/10 = 2/10 = 1/5 \end{aligned}$$

Nota:

x\y	1	2	3	4	f _i (x)
1	1/10	0	0	0	1/10
2	0	1/10	1/10	0	2/10
3	0	1/10	0	1/10	2/10
4	0	0	2/10	3/10	5/10
f _j (y)	1/10	2/10	3/10	4/10	1

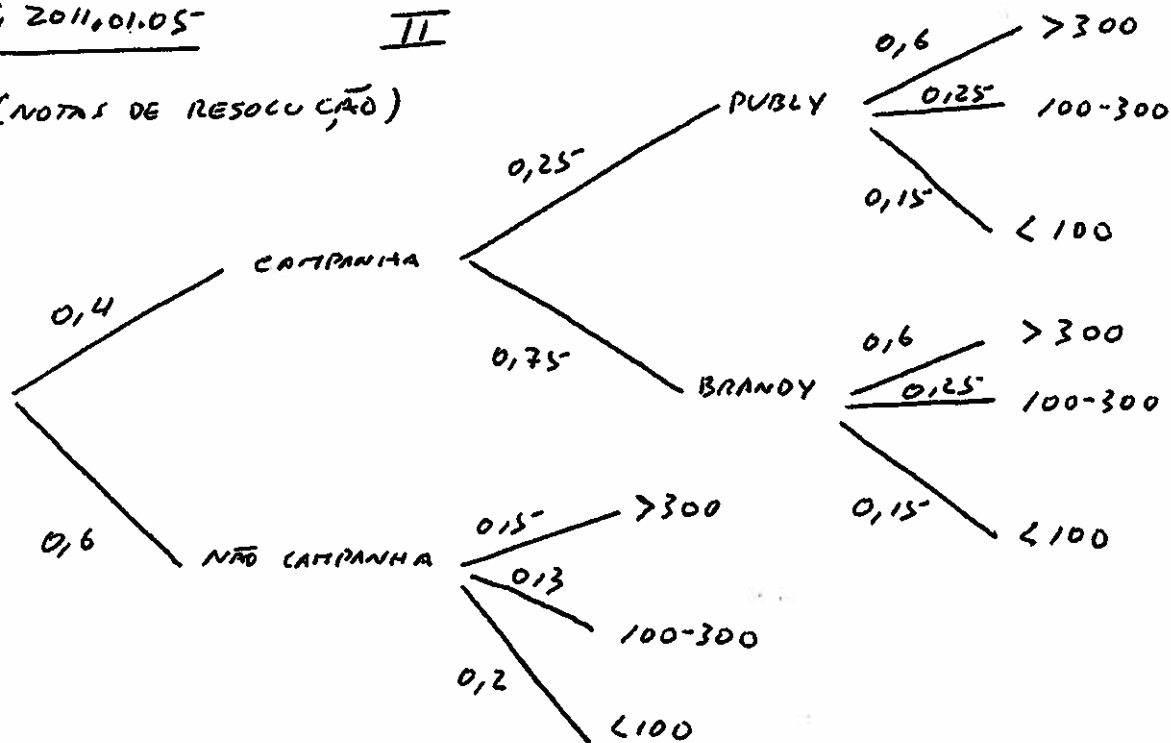
d) Calcule o valor esperado da variável aleatória X através da função geradora de momentos.

$$M_x(t) = E[e^{tx}] = \sum_x e^{tx} f(x) = e^{1t} \frac{1}{10} + e^{2t} \frac{2}{10} + e^{3t} \frac{2}{10} + e^{4t} \frac{5}{10} =$$

$$M'_x(t) = \frac{dM_x(t)}{dt} = e^{1t} \frac{1}{10} + e^{2t} \frac{4}{10} + e^{3t} \frac{6}{10} + e^{4t} \frac{20}{10}$$

$$E[X] = M'_x(t=0) = \frac{1}{10} + \frac{4}{10} + \frac{6}{10} + \frac{20}{10} = 3,1$$

(NOTAS DE RESOLUÇÃO)



$$\begin{aligned}
 a) \quad P(>100) &= 0,4 \times 0,25 \times 0,6 + 0,4 \times 0,25 \times 0,25 + \\
 &\quad + 0,4 \times 0,75 \times 0,6 + 0,4 \times 0,75 \times 0,25 + \\
 &\quad + 0,6 \times (0,15 + 0,3) = \\
 &= 0,06 + 0,025 + 0,180 + 0,075 + 0,48 = \\
 &= 0,82 \quad \text{ou } 82\%
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b) \quad P(\text{CAMPAÑA} | >300) &= \frac{P(\text{CAMPAÑA} \cap >300)}{P(>300)} = \\
 &= \frac{0,4 \times 0,6}{0,4 \times 0,25 \times 0,6 + 0,4 \times 0,75 \times 0,6 + 0,6 \times 0,5} = \frac{0,24}{0,54} = 0,44(4) \\
 &\quad \text{ou } 44,4\%
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 c) \quad P(\text{CAMPAÑA PUBLY} | >300) &= \frac{0,4 \times 0,25 \times 0,6}{0,54} = 0,11(1) \\
 &\quad \text{ou } 11,1\% \\
 &= b) \times 0,25
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 d) \quad &\left. \begin{aligned} P(>300 | \text{CAMPAÑA} \cap \text{PUBLY}) &= 0,6 \\ P(>300 | \text{CAMPAÑA} \cap \text{BRANDY}) &= 0,6 \\ P(>300 | \text{NÃO CAMPAÑA}) &= 0,5 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &P(>300) \text{ Não depende} \\ &\text{da escolha da agência} \\ &\text{mas depende de} \\ &\text{existir ou não campanha.} \end{aligned}
 \end{aligned}$$

$$a) \int_0^1 dx \int_0^K \left(\frac{x}{2} + \frac{y}{4} \right) dy = 1$$

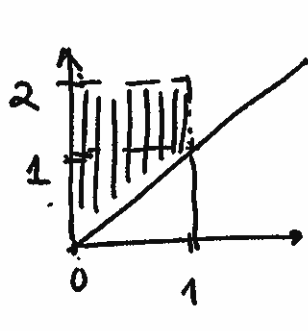
$$\int_0^1 \left[\frac{xy}{2} + \frac{y^2}{8} \right]_0^K dx = 1$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \left(\frac{Kx}{2} + \frac{K^2}{8} \right) dx = 1$$

$$\Rightarrow \left[\frac{Kx^2}{4} + \frac{K^2 x}{8} \right]_0^1 = 1 \Rightarrow \frac{K}{4} + \frac{K^2}{8} = 1$$

$$\Rightarrow K=2 \vee K=-4$$

$$b) P[X < Y] = \int_0^1 dx \int_x^2 \left(\frac{x}{2} + \frac{y}{4} \right) dy =$$



$$\int_0^1 \left[\frac{xy}{2} + \frac{y^2}{8} \right]_x^2 dx =$$

$$= \int_0^1 \left(x + \frac{1}{2} \right) - \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{8} \right) dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^3}{24} \right]_0^1 =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} - \frac{1}{24} = 1 - \frac{5}{24} = \frac{19}{24}$$

$$0.791(6)$$

$$c) F(x,y) = \int_0^x dx \int_0^y \left(-\frac{x}{2} + \frac{y}{4}\right) dy =$$

(2)

$$= \int_0^x \left[\frac{xy}{2} + \frac{y^2}{8} \right]_0^y dx =$$

$$= \int_0^x \left(\frac{xy}{2} + \frac{y^2}{8} \right) dx = \left[\frac{x^2 y}{4} + \frac{xy^2}{8} \right]_0^x =$$

$$= \frac{x^2 y}{4} + \frac{xy^2}{8} = \frac{xy(2x+y)}{8}$$

$$P(X > 0,5 \cap Y > 0,5) = 1 - F(0,5, 0,5) =$$

$$1 - \frac{0,5^2 \times 0,5}{4} + \frac{0,5 \times 0,5^2}{8} = 0,95$$

$$d) f_1(y) = \int_0^1 \left(\frac{x}{2} + \frac{y}{4}\right) dx = \frac{1}{4} + \frac{y}{4} \quad 0 < y < 2$$

$$E[Y] = \int_0^2 y \left(\frac{1}{4} + \frac{y}{4}\right) dy = \left[\frac{y^2}{8} + \frac{y^3}{12} \right]_0^2 =$$

$$= 1,17 \quad \left(\frac{7}{6}\right)$$

$$E[Y^2] = \int_0^2 y^2 \left(\frac{1}{4} + \frac{y}{4}\right) dy = \left[\frac{y^3}{12} + \frac{y^4}{16} \right]_0^2 =$$

$$= 1,67 = \left(\frac{5}{3}\right)$$

$$V[Y] = E[Y^2] - (E[Y])^2 = 1,67 - 1,17^2 = 0,306 \quad \frac{11}{36}$$

$$d) E[X] = \int_0^1 x \left(x + \frac{1}{2}\right) dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{4}\right]_0^1 = 0,58 \quad \textcircled{3}$$

$$= \frac{7}{12}$$

$$E[XY] = \int_0^1 dx \int_0^2 xy \left(\frac{x}{2} + \frac{y}{4}\right) dy =$$

$$\int_0^1 \left[\frac{x^2 y^2}{4} + \frac{x y^3}{12} \right]_0^2 dx$$

$$= \frac{2}{3}$$

$$\text{Cov} = E(XY) - E(X)E(Y) = -0,01389$$

$$\text{Cov} = \left(-\frac{1}{12}\right)$$

COVARIÂNCIA NEGATIVA SIGNIFICA RELAÇÃO NEGATIVA ENTRE AS VARIÁVEIS! O filho do Sr. Ernesto tem razão.



LICENCIATURAS EM ECONOMIA E GESTÃO

ESTATÍSTICA I

Exame - 27 de Janeiro de 2011

O teste é constituído por quatro grupos. Responda em folhas separadas para cada grupo. Se eventualmente não fizer algum grupo, entregue em branco a folha respectiva devidamente identificada.

Leia cuidadosamente a totalidade de cada grupo antes de o responder. Sempre que o enquadramento teórico o permite dê respostas mais simples.

Explicite todas as hipóteses e os cálculos que tiver de fazer para a resolução dos problemas.
Os grupos ou as perguntas podem não estar pela ordem em que a matéria foi leccionada. Um grupo pode incluir diferentes matérias.

I (4,0 valores)

IV-1

O quadro seguinte mostra os preços e as quantidades consumidas de três bens nos últimos três anos:

Bem	2008		2009		2010	
	P	Q	P	Q	P	Q
A	10	20	14	30	15	30
B	15	40	21	50	20	50
C	20	10	28	20	25	22

- Determine a evolução dos preços nos últimos três anos mediante o cálculo de um índice de rácios ponderado pela despesa efectuada em 2009 e tomando como ano base 2008.
- Qual a taxa média de crescimento anual entre 2008 e 2010 do índice de preços calculado em a)?
- Admitindo que se pretende passar a utilizar como ano base 2009, faça a mudança do índice calculado em a) para essa nova base. Acha que os valores encontrados correspondem ao mesmo tipo de índice? Justifique analiticamente e indique qual a razão que determina o facto de a mudança de base ser ou não ser exacta.

IV-2

O quadro seguinte mostra os preços e as quantidades consumidas de um determinado bens em quatro anos.

Ano	2001	2002	2003	2004
Vendas a preços correntes	11 000	12 000	17 600	30 000
Índice de preços com base no ano anterior	1,10000	1,09091	1,33333	1,25000

Questão: Calcule a evolução das vendas reais a preços de 2001 com base em 2001. Verifique analiticamente se o cálculo efectuado é exacto.

II (6,0 valores)

A – Considere a seguinte distribuição de frequências dos lucros de 100 empresas:

Classes	Frequências absolutas acumuladas
0 – 4	20
4 – 8	50
8 – 16	90
16 – 28	100

- Calcule a mediana e a moda desta distribuição e interprete por palavras cada um dos valores encontrados.
- Determine, através de um indicador apropriado, o nível de concentração dos lucros. Interprete.

B – Suponha que a repartição dos salários do pessoal de uma empresa foi nos últimos dois anos a constante do quadro seguinte:

		Anos	
		2009	2010
Salário (milhares de euros)	0 – 2	3	6
	2 – 4	5	12
	4 – 6	7	10
	6 – 8	4	8
	8 – 12	1	4

- Compare, para os dois anos, os encargos totais e os encargos médios que a empresa suportou com o seu pessoal.
- Compare, para os dois anos, o desvio-padrão e o coeficiente de variação dos salários do pessoal. (ii) Interprete estes indicadores e refira as situações em que devem ser utilizados.
- Fazendo o mínimo de contas, calcule o impacto nos cálculos efectuados nas alíneas a) e b) das seguintes situações:
 - Todos os salários têm uma redução de 1 milhar de euros;
 - Todos os salários têm uma redução de 10%.
 - Relacione os resultados que obteve em c) i) e c) ii) com b) ii).

III (4,0 valores)

Uma empresa pretende seleccionar uma pessoa para um certo serviço, tendo encarregue um grupo de trabalho de submeter cada candidato sucessivamente a três testes, os teste A, B e C que terão de ser feitos em sequência (primeiro o A, depois o B e finalmente o C).

Os candidatos são submetidos sucessivamente aos três testes, mas o processo termina logo que haja um candidato que seja seleccionado. Não há qualquer comunicação dos candidatos entre si e cada teste é valorizado de 0 a 100 pontos.

Os candidatos que obtenham 91-100 pontos num dos testes são imediatamente seleccionados, e os que tiverem 61-90 pontos em qualquer teste passam ao teste seguinte. Se obtiverem pelo menos 61 pontos no último teste [teste C] então são seleccionados. Os que não alcançarem estas pontuações são eliminados.

Um especialista neste tipo de testes estima o seguinte:

- Dos candidatos que fazem o teste A, 10% têm neste teste pelo menos 91 pontos e 30% têm entre 61 e 90 pontos.
- Dos candidatos que fazem o teste B, 20% têm neste teste pelo menos 91 pontos e 40% têm entre 61 e 90 pontos.
- Dos candidatos que fazem o teste C, 24% têm neste teste pelo menos 91 pontos e 26% têm entre 61 e 90 pontos.

Com base na informação disponibilizada responda às seguintes questões:

- a) Qual a probabilidade de se ter de analisar dois indivíduos para seleccionar um candidato?
- b) O Sr. Manuel, que estava desesperado para obter o lugar em causa, foi avaliado e ficou de fora. Qual a probabilidade de ter feito o teste B?
- c) Qual a probabilidade de um candidato ser admitido sabendo que fez os três testes?
- d) Calcule o valor esperado da soma da pontuação de um candidato.

IV (6,0 valores)

O Sr. Ambrósio é vendedor da empresa Portugalis. Considere "X" o valor das vendas mensais do Sr. Ambrósio (em milhares de euros). Sabe-se que a função densidade de probabilidade de X é:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{20-x}{50} & 10 < x < 20 \\ 0 & \text{out. val. de } x \end{cases}$$

- a) Calcule a função de Distribuição de X, F(x), e a partir dela determine a probabilidade do Sr. Ambrósio vender mais de 15 mil euros num mês.
- b) Calcule o valor esperado e a variância de X.

Sabe-se ainda que nesta empresa existem mais 9 vendedores, com uma função densidade de probabilidade que é igual à do Sr. Ambrósio [há um total de 10 vendedores]. As vendas de cada vendedor são independentes das vendas dos outros vendedores. Sabe-se ainda que a empresa tem contratos estabelecidos que lhe asseguram vendas fixas [são fixas e não são feitas pelos vendedores] no montante de 50 mil euros por mês.

- c) Calcule o valor esperado e a variância das vendas totais da empresa Portugalis.

Suponha agora que o Sr. Ambrósio recebe um montante de comissões que varia entre 50% e 100% do valor das suas vendas. Seja Y o montante das comissões recebidas pelo Sr. Ambrósio. A distribuição conjunta de X e Y é dada por:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{25} \times \frac{20-x}{x} & \begin{cases} 10 < x < 20 \\ 0,5x < y < x \end{cases} \\ 0 & \text{out. val. de } x \text{ e de } y \end{cases}$$

- d) Verifique que $f(x, y)$ é efectivamente uma função densidade de probabilidade conjunta.
- e) Num determinado mês o Sr. Ambrósio vendeu 12 mil euros. Qual a probabilidade de receber pelo menos 8 mil euros de comissão?
- f) Calcule a probabilidade de, num dado mês, o valor das comissões exceder 75% do valor total das vendas ($Y > 0,75X$).



LICENCIATURAS EM ECONOMIA E GESTÃO

ESTATÍSTICA I

FORMULÁRIO

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_i x_i F_i = \sum_i x_i f_i$$

$$\bar{x} = \sum_i w_i x_i \quad (\text{com } \sum_i w_i = 1)$$

$$\bar{x}_g = \sqrt[n]{x_1^{f_1} \times x_2^{f_2} \times \dots}$$

$$\bar{x}_h = \frac{1}{\frac{1}{n} \sum_i F_i \frac{1}{x_i}} = \frac{1}{\sum_i f_i \frac{1}{x_i}}$$

$$M = l_m + k \times \frac{F_m - F_{m-1}}{(F_m - F_{m+1}) + (F_m - F_{m-1})}$$

$$M_s = l_{m_s} + k_{m_s} \frac{0,5 - s(l_{m_s})}{s(L_{m_s}) - s(l_{m_s})}$$

$$Q_l = l_l + k_l \frac{0,25 - s(l_l)}{s(L_l) - s(l_l)}$$

$$Q_{III} = l_{III} + k_{III} \frac{0,75 - s(l_{III})}{s(L_{III}) - s(l_{III})}$$

$$IV = \max_i \{x_i\} - \min_i \{x_i\}$$

$$IIQ = Q_{III} - Q_l$$

$$DAM_x = \frac{1}{n} \sum_i F_i |x_i - \bar{x}| = \sum_i f_i |x_i - \bar{x}|$$

$$s_x^2 = \frac{1}{n} \sum_i F_i (x_i - \bar{x})^2 = \sum_i f_i (x_i - \bar{x})^2 = \sum_i f_i x_i^2 - \bar{x}^2$$

$$s_x = +\sqrt{s_x^2}$$

$$C_v = \frac{s_x}{\bar{x}} \times 100$$

$$CA_p = \frac{\bar{X} - M_o}{s}$$

$$CA_B = \frac{Q_3 + Q_1 - 2M_s}{Q_3 - Q_1}$$

$$K_{Fisher} = \frac{\sum_{i=1}^m (x_i - \bar{X})^4 F_i / n}{\left[\sum_{i=1}^m (x_i - \bar{X})^2 F_i / n \right]^2}$$

$$K = \frac{Q_3 - Q_1}{2(P_{90} - P_{10})}$$

$$IG = 1 - \sum_{j=1}^m (q_j + q_{j-1}) \times (p_j - p_{j-1})$$

$$F_i^{(x)} = F_i(X = x_i) = \sum_j F_{ij}$$

$$F_j^{(y)} = F_j(Y = y_j) = \sum_i F_{ij}$$

$$f(y_j | x_i) = \frac{F(x_i, y_j)}{F_i^{(x)}} = \frac{f(x_i, y_j)}{f_i^{(x)}}$$

$$f(x_i | y_j) = \frac{F(x_i, y_j)}{F_j^{(y)}} = \frac{f(x_i, y_j)}{f_j^{(y)}}$$

$$COV(X, Y) = \frac{1}{n} \sum_k (x_k - \bar{x})(y_k - \bar{y}) = \frac{1}{n} \sum_k x_k y_k - \bar{x} \bar{y}$$

$$COV(X, Y) = \frac{1}{n} \sum_i \sum_j F_{ij} (x_i - \bar{X})(y_j - \bar{Y}) = \sum_i \sum_j f_{ij} (x_i - \bar{x})(y_j - \bar{y}) = \sum_i \sum_j (x_i y_j f_{ij}) - \bar{x} \bar{y}$$

$$r(X, Y) = \frac{COV(X, Y)}{s_x s_y}$$

Nota: As fórmulas abaixo têm 100 como referência para o ano base.

$$I_{i/0}^{(p)} = \frac{P_i}{P_0} \times 100 \quad I_{i/0}^{(q)} = \frac{q_i}{q_0} \times 100 \quad I_{i/0}^{(v)} = \frac{p_i q_i}{p_0 q_0} \times 100 \quad I_{i/0}^{(p)} = \frac{\sum_{i=1}^n p_{ii}}{\sum_{i=1}^n p_{0i}} \times 100$$

$$I_{i/0}^{(p)} = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n \frac{p_{ii}}{p_{0i}} \right) \times 100$$

$$I_{i/0}^{(q)} = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n \frac{q_{ii}}{q_{0i}} \right) \times 100$$

$$I_{i/0}^{(p)} = \left(\sum_{i=1}^n \frac{p_{ii}}{p_{0i}} \times w_i \right) \times 100$$

$$I_{i/0}^{(q)} = \left(\sum_{i=1}^n \frac{q_{ii}}{q_{0i}} \times w_i \right) \times 100$$

$$I_{i/0}^{(p)}(L) = \frac{\sum_{i=1}^n p_{ii} q_{0i}}{\sum_{i=1}^n p_{0i} q_{0i}} \times 100$$

$$I_{i/0}^{(q)}(L) = \frac{\sum_{i=1}^n p_{0i} q_{ii}}{\sum_{i=1}^n p_{0i} q_{0i}} \times 100;$$

$$I_{i/0}^{(p)}(P) = \frac{\sum_{i=1}^n p_{ii} q_{ii}}{\sum_{i=1}^n p_{0i} q_{ii}} \times 100$$

$$I_{i/0}^{(q)}(P) = \frac{\sum_{i=1}^n p_{ii} q_{ii}}{\sum_{i=1}^n p_{ii} q_{0i}} \times 100$$

$$I_{i/0}(F) = \sqrt{I_{i/0}(L) \times I_{i/0}(P)}$$

Nota: o formulário não esgota todos os tratamentos estatísticos possíveis.

FLEE, EST. I, EXAME

2011.01.27

I

$$a) I_{t/08}^P = \sum_i \frac{P_{ti}}{P_{08i}} \times \frac{P_{09i} \cdot q_{09i}}{\sum P_{09i} \cdot q_{09i}}$$

Resposta em 2009:

 w_i

A:	$14 \times 30 = 420$	0,20690
B:	$21 \times 50 = 1050$	0,51724
C:	$28 \times 20 = 560$	0,27586
	2030	1,00000

$$I_{08/08}^P = 1 \quad \text{ou} \quad 100$$

$$I_{09/08}^P = \frac{14}{10} \times \frac{420}{2030} + \frac{21}{15} \times \frac{1050}{2030} + \frac{28}{20} \times \frac{560}{2030} = 1,4 \quad \text{ou} \quad 140$$

$$I_{10/08}^P = \frac{15}{10} \times \frac{420}{2030} + \frac{20}{15} \times \frac{1050}{2030} + \frac{25}{20} \times \frac{560}{2030} \approx 1,345 \quad \text{ou} \quad 134,5$$

$$= 1,34483$$

$$b) \sqrt{1,34483} = 1,15967 \rightarrow \text{TAXA M\u00c9DIA DE } 15,967\%$$

$$c) I_{t/09}^P = \frac{I_{t/08}^P}{I_{09/08}^P} \rightarrow \frac{\sum \frac{P_{ti}}{P_{08i}} w_i}{\sum \frac{P_{09i}}{P_{08i}} w_i}$$

$$\rightarrow \sum_i \frac{P_{ti}}{P_{09i}} w_i$$

Estes valores n\u00e3o s\u00e3o iguais. Portanto os c\u00e1lculos n\u00e3o s\u00e3o exatos. Apesar dos fundamentos serem os mesmos esta situa\u00e7\u00e3o deve de se tratar de um \u00edndice de relativos.

$$I_{08/09}^P = 100/140 = 0,71429 \quad \text{ou} \quad 71,429$$

$$I_{09/09} = 140/140 = 1 \quad \text{ou} \quad 100$$

$$I_{10/09} = 134,5/140 = 0,9607 \quad \text{ou} \quad 96,07$$

IV-2

ANO	VENIDAS CORRENTES	$I_{t/t-1}$	$I_{t/2000}$	$I_{t/2001}$	VENIDAS PREÇOS 2000	VENIDAS PREÇOS 2001	$I_{VENIDAS, 2000}$ $t/2001$
2000	—	—	1	0,90909	—	—	—
2001	11 000	1,10	1,1	1	10 000	11 000	$11000/11000 = 1$
2002	12 000	1,09091	1,2	1,09091	10 000	11 000	$11000/11000 = 1$
2003	17 600	1,33333	1,6	1,45455	11 000	12 100	$12100/11000 = 1,1$
2004	30 000	1,25	2,0	1,81818	15 000	16 500	$16500/11000 = 1,5$

Não é
preciso

Obtem-se

NOTA: O mais prático é fazer

$$\frac{\text{Vendas a preços de 2001}}{\text{Vendas correntes}} = \frac{I_{t/2000}^P}{I_{t/2000}^P} \times I_{01/00}^P$$

o mesmo resultado de vendas a preços de 2000.

O cálculo efetuado é exato uma vez que o índice simples de preços é circular:

$$P_t = P_0 \times I_{t/0}^P = P_0 \times I_{t/t-1}^P \times \dots \times I_{1/0}^P$$

$$I_{t/0}^{\text{VENIDAS A PREÇOS DE } a} = \frac{P_a q_t}{P_a q_0} = \frac{q_t}{q_0} \quad (\text{Não depende dos preços})$$

$$I_{t/2001}^{\text{VENIDAS A PREÇOS DE 2001}} = \frac{P_{2001} \times q_t}{P_{2001} \times q_{2001}} = \frac{\frac{P_t}{I_{t/2000}^P} \times I_{01/00}^P \times q_t}{P_{2001} \times q_{2001}} = \frac{P_0 \times I_{01/00}^P \times q_t}{P_{2001} \times q_{2001}}$$

II

A - a)

Classe	x_i	K_i	F_i	F_i / K_i	p_i
0-4	2	4	20	5	0,20
4-8	6	4	30	7,5	0,50
8-16	12	8	40	5	0,90
16-28	22	12	10	0,8(3)	1,00

$$H_2 = 8$$

$$H_0 = 6$$

H_2 : Hétede das 100 empresas tem um lucro de 8 milhares de euros ou menos e metade tem um lucro de 8 milhares de euros ou mais.

H_0 : A maior parte das empresas tem um lucro de 6 milhares de euros.

b)

x_i	F_i	f_i	p_i	$x_i F_i$	$\sum_{j=1}^i x_j f_j$	q_i	$(q_i + q_{i-1}) f_i$
2	20	.2	.2	40	40	0,04348	0,00870
6	30	.3	.5	180	220	0,23913	0,08478
12	40	.4	.9	480	700	0,76087	0,40000
22	10	.1	1.0	220	920	1,00000	0,17609
	<u>100</u>	<u>1</u>		<u>920</u>			<u>0,66957</u>

$$IG = 1 - \sum (q_i + q_{i-1}) f_i = 1 - 0,66957 = 0,33043$$

ou 33,043%

20.11.01.27

II

B - a)

2009

x_i	F_i	$x_i F_i$	$x_i^2 F_i$
1	3	3	3
3	5	15	45
5	7	35	175
7	4	28	196
10	1	10	100
	<u>20</u>	<u>91</u>	<u>519</u>

2010

x_i	F_i	$x_i F_i$	$x_i^2 F_i$
1	6	6	6
3	12	36	108
5	10	50	250
7	8	56	392
10	4	40	400
	<u>40</u>	<u>188</u>	<u>1156</u>

Encargos Totais: $\sum x_i F_i$

2009: 91

2010: 188

Encargos médios: $\sum x_i F_i / n = \bar{x}$ 2009: $\bar{x} = 91/20 = 4,55$ 2010: $\bar{x} = 188/40 = 4,7$

Os encargos médios e os encargos totais foram mais altos em 2010.

$$b) \quad DP = \sqrt{s^2} = \sqrt{\frac{\sum x_i^2 F_i}{n} - \bar{x}^2} \quad CV = \frac{s}{\bar{x}}$$

2009:

$$s^2 = \frac{\sum x_i^2 F_i}{n} - \bar{x}^2 = \frac{519}{20} - 4,55^2 = 5,24750$$

$$s = \sqrt{5,24750} = 2,291$$

$$CV = \frac{2,291}{4,55} = 0,5035 \text{ ou } 50,35\%$$

2010:

$$s^2 = \frac{1156}{40} - 4,7^2 = 6,81$$

$$s = \sqrt{6,81} = 2,6096$$

$$CV = \frac{2,6096}{4,7} = 0,55523 \text{ ou } 55,523\%$$

FLEE, EST. I - EXAME
2011.01.27

II B-b) (cont.)

O desvio-padrão e o coeficiente de variação são mais altos em 2010.

O desvio-padrão é uma medida absoluta de variação e este é expresso nas mesmas unidades do fenômeno em estudo.

O coeficiente de variação é uma medida relativa de dispersão e não depende das unidades e por este expresso o fenômeno em estudo. Deve ser usado para comparar variáveis expressas em unidades diferentes, necessariamente por serem fenômenos diferentes.

c)

$$Y = X - 1 \rightarrow \bar{Y} = \bar{X} - 1$$

$$V(Y) = V(X)$$

$$CV(Y) = \frac{\sqrt{V(X)}}{\bar{X} - 1} > CV(X)$$

$$Y = aX \rightarrow \bar{Y} = a\bar{X}$$

$$V(Y) = a^2 V(X)$$

$$CV(Y) = \frac{\sqrt{a^2 V(X)}}{a\bar{X}} = CV(X)$$

i) 2009

$$\bar{Y} = 4,55 - 1 = 3,55$$

$$V(Y) = V(X) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow DP(Y) = DP(X) = 2,291$$

$$CV(Y) = \frac{2,291}{3,55} > CV(X)$$

2010

$$\bar{Y} = 4,7 - 1 = 3,7$$

$$DP(Y) = DP(X) = 2,6096$$

$$CV(Y) = \frac{2,6096}{3,7} > CV(X)$$

ii) $\bar{Y} = 0,9 \times 4,55$

$$\bar{Y} = 0,9 \times 4,7$$

$$V(Y) = a^2 V(X) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow DP(Y) = a DP(X) =$$

$$= 0,9 \times 2,291$$

$$DP(Y) = 0,9 DP(X) = 0,9 \times 2,6096$$

$$CV(Y) = CV(X) = 0,5035$$

$$CV(Y) = CV(X) = 0,5552$$

ii) A média é afectada por mudanças na origem mas não no eixo.

O desvio padrão é afectado por mudanças no eixo mas não é afectado por mudanças na origem.

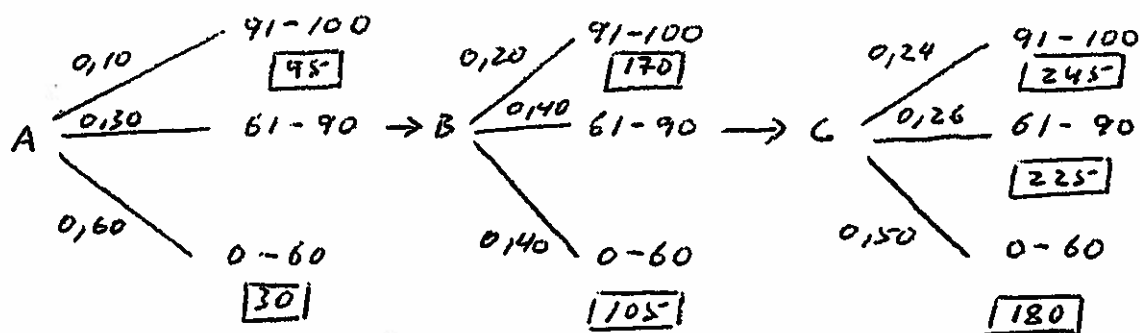
O coeficiente de variação é afectado por mudanças na origem mas não é afectado por mudanças no eixo, ou seja, pelas unidades em que este é expresso o fenómeno.

FLEE, EST. I - EXAME

2011. 01. 27

III

a)

 S : SELECCIONADO

$$P(S) = 0,10 + 0,30 \times 0,20 + 0,30 \times 0,40 \times 0,24 + 0,3 \times 0,40 \times 0,26 =$$

$$= 0,10 + 0,06 + 0,0288 + 0,0312 = 0,10 + 0,06 + 0,06 = 0,22$$

$$P(\bar{S}) = 1 - P(S) = 1 - 0,22 = 0,78$$

$$P(\text{TER DE ANALISAR DOIS INDIVÍDUOS}) = 0,78 \times 0,22 = 0,1716$$

$$b) P(B|\bar{S}) = \frac{P(B \cap \bar{S})}{P(\bar{S})} = \frac{0,3 \times 0,4 + 0,3 \times 0,4 \times 0,5}{0,78} =$$

$$= \frac{0,18}{0,78} = 0,23077$$

$$c) P(\text{ADMITIDO 13 TESTES}) = \frac{P(3 \text{ TESTES} \cap \text{ADMITIDO})}{P(3 \text{ TESTES})} =$$

$$= \frac{0,3 \times 0,4 \times 0,5}{0,3 \times 0,4} = 0,5 = P(>60 | C)$$

d)	x	$f(x)$	x	$f(x)$
	30	0,60		18
	95	0,10		9,5
	105	$0,30 \times 0,40$		12,6
	170	$0,3 \times 0,20$		10,2
	180	$0,3 \times 0,40 \times 0,50$		10,8
	225	$0,3 \times 0,40 \times 0,26$		7,02
	245	$0,3 \times 0,40 \times 0,24$		7,056
				<hr/>
				75,176

FCEE, EST. I - Exame
2011.01.22

IV

$$f(x) = \begin{cases} \frac{20-x}{50} & 10 < x < 20 \\ 0 & \text{out. val. de } x \end{cases}$$

NOTA: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{10}^{20} \frac{20-x}{50} dx = \left[\frac{20}{50} x - \frac{x^2}{100} \right]_{10}^{20} =$

$$= \left(\frac{400}{50} - \frac{400}{100} \right) - \left(\frac{200}{50} - \frac{100}{100} \right) = (8 - 4) - (4 - 1) = 4 - 3 = 1$$

a) $F(x) = P(X \leq x) = \int_{10}^x \frac{20-u}{50} du = \left[\frac{20}{50} u - \frac{u^2}{100} \right]_{10}^x =$

$$= \left(\frac{20}{50} x - \frac{x^2}{100} \right) - \left(\frac{200}{50} - \frac{100}{100} \right) = \frac{20}{50} x - \frac{x^2}{100} - 3$$

$$10 < x < 20$$

NOTA: $F(x=20) = \frac{400}{50} - \frac{400}{100} - 3 = 8 - 4 - 3 = 1$

$$P(X > 15) = 1 - P(X \leq 15) = 1 - F(x=15) =$$

$$= 1 - \left(\frac{20}{50} \times 15 - \frac{15^2}{100} - 3 \right) = 1 - (6 - 2,25 - 3) =$$

$$= 1 - 0,75 = 0,25$$

$$\begin{aligned}
 b) \quad E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_{10}^{20} x \cdot \frac{20-x}{50} dx = \\
 &= \int_{10}^{20} \left(\frac{20}{50} x - \frac{x^2}{50} \right) dx = \left[20 \frac{x^2}{100} - \frac{x^3}{150} \right]_{10}^{20} = \\
 &= (80 - 53,33) - (20 - 6,66) = 13,33 \quad \text{milhares de euros}
 \end{aligned}$$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

$$\begin{aligned}
 E(X^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx = \int_{10}^{20} x^2 \cdot \frac{20-x}{50} dx = \\
 &= \int_{10}^{20} \left(20 \frac{x^2}{50} - \frac{x^3}{50} \right) dx = \left[20 \frac{x^3}{150} - \frac{x^4}{200} \right]_{10}^{20} = \\
 &= (1066,66 - 800) - (133,33 - 50) = 183,33
 \end{aligned}$$

$$V(X) = 183,33 - (13,33)^2 = 57,77$$

$$c) \quad E\left[\sum_{i=1}^{10} X_i + 50\right] = \sum_{i=1}^{10} E(X_i) + E(50) =$$

$$= 10 \times 13,33 + 50 = 183,33 \quad \text{milhares de euros}$$

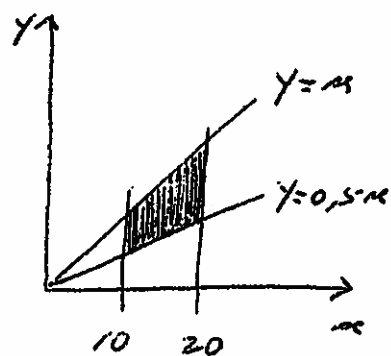
$$V\left[\sum_{i=1}^{10} X_i + 50\right] = \sum_{i=1}^{10} V(X_i) + V(50) =$$

$$= 10 \times 57,77 + 0 = 577,77$$

A variância é a soma das variâncias se as variáveis forem independentes.

$$d) \int_{10}^{20} \left[\int_{0,5x}^x \frac{1}{25} \times \frac{20-x}{x} dy \right] dx =$$

$$= \int_{10}^{20} \left[\frac{1}{25} \times \frac{20-x}{x} y \right]_{0,5x}^x dx =$$



$$= \int_{10}^{20} \left[\frac{20-x}{25} - \frac{20-x}{50} \right] dx = \left[\frac{20}{25}x - \frac{x^2}{50} - \frac{20}{50}x + \frac{x^2}{100} \right]_{10}^{20} =$$

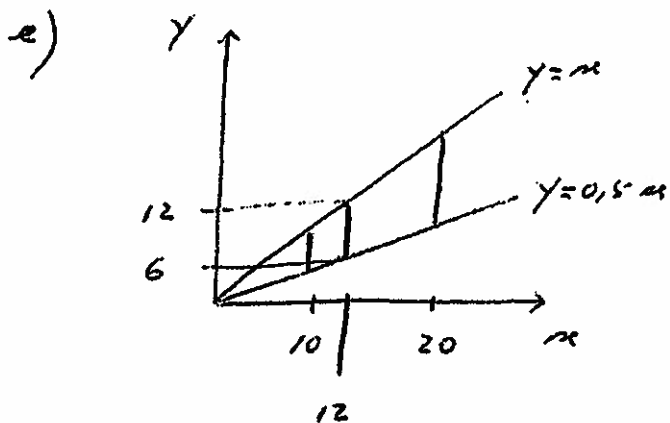
$$= \left[\frac{20}{50}x - \frac{x^2}{100} \right]_{10}^{20} = \left(\frac{400}{50} - \frac{400}{100} \right) - \left(\frac{200}{50} - \frac{100}{100} \right) =$$

$$= (8 - 4) - (4 - 1) = 4 - 3 = 1$$

Prove-se assim que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) dy \right] dx = 1$$

sendo que $f(x,y) \geq 0$ para todos os valores do domínio.



$$f(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_1(x)} = \frac{1}{25-x} \times \frac{20-x}{x} \times \frac{5-0}{20-x} =$$

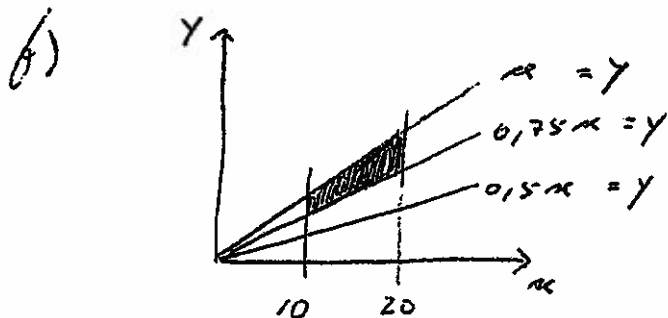
$$= \frac{50}{25-x} = \frac{2}{x}$$

$$f(y|x=12) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}, \quad 6 < y < 12$$

NOTA:

$$\int_6^{12} \frac{1}{6} dy = \left[\frac{y}{6} \right]_6^{12} = \frac{12}{6} - \frac{6}{6} = 2 - 1 = 1$$

$$P(Y \geq 8) = \int_8^{12} \frac{1}{6} dy = \left[\frac{y}{6} \right]_8^{12} = \frac{12}{6} - \frac{8}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$



$$P(Y > 0,75X) = \int_{10}^{20} \left[\int_{0,75x}^x \frac{1}{25} \times \frac{20-x}{x} dy \right] dx =$$

$$= \int_{10}^{20} \left[\frac{1}{25} \times \frac{20-x}{x} y \right]_{0,75x}^x dx =$$

$$= \int_{10}^{20} \left(\frac{20-x}{25} - 0,75 \times \frac{20-x}{25} \right) dx =$$

$$= \left[\frac{20}{25} x - \frac{x^2}{50} - 0,75 \times \frac{20}{25} x + 0,75 \times \frac{x^2}{50} \right]_{10}^{20} =$$

$$= \left[0,25 \times \frac{20}{25} x - 0,25 \frac{x^2}{50} \right]_{10}^{20} = \left[0,2 x - 0,005 x^2 \right]_{10}^{20} =$$

$$= (4 - 2) - (2 - 0,5) = 2 - 1,5 = 0,5$$





UNIVERSIDADE CATÓLICA PORTUGUESA

LICENCIATURAS EM ECONOMIA E GESTÃO

ESTATÍSTICA I - 1º TESTE - 9 DE ABRIL DE 2011

Responda em folhas separadas para cada grupo. Se eventualmente não fizer algum grupo, entregue em branco a folha respectiva devidamente identificada.

Leia cuidadosamente a totalidade de cada grupo antes de o responder.

Explicite todas as hipóteses e os cálculos que tiver de fazer para a resolução dos problemas. Use um mínimo de quatro casas decimais. Os grupos ou as perguntas podem não estar pela ordem em que a matéria foi leccionada. Um grupo pode incluir diferentes matérias.

O teste é constituído por três grupos.

I (6,0 valores)

Considere a seguinte informação acerca das vendas da empresa “Vende Tudo” em milhares de euros:

VENDAS A PREÇOS CORRENTES

	<u>2008</u>	<u>2009</u>	<u>2010</u>
Marca / Produto A	54	62	60
Marca / Produto B	134	162	183
Marca / Produto C	210	204	201
Marca / Produto D	171	186	207

VENDAS A PREÇOS CONSTANTES DE 2006

	<u>2008</u>	<u>2009</u>	<u>2010</u>
Marca / Produto A	49	58	56
Marca / Produto B	115	136	149
Marca / Produto C	189	187	187
Marca / Produto D	162	171	189

- a) A partir da informação disponível, calcule a variação dos preços para a empresa “Vende Tudo” para os anos de 2008, 2009 e 2010, com base em 2006. Interprete os resultados.
- b) Qual o índice que utilizou e como o classifica? Verifique se goza as propriedades da proporcionalidade e da reversibilidade quanto ao tempo.
- c) A partir dos resultados obtidos em a), calcule o índice de preços para a “Vende Tudo”, tomando como base o ano de 2008. O que teve de admitir para responder a esta questão?
- d) (i) Qual foi o crescimento das vendas de 2008 para 2009 e de 2009 para 2010, em termos nominais [preços correntes]?
- (ii) Qual foi a taxa média anual de crescimento das vendas nominais [preços correntes] no período 2008 a 2010.
- e) Comente a seguinte afirmação do presidente da “Vende Tudo” na reunião anual de quadros da empresa:
- «De 2008 para 2010 conseguimos fazer crescer o nosso negócio através de um aumento real das nossas vendas.»
- Justifique a sua resposta quantitativamente.

II (7,0 valores)

Suponha que uma determinada empresa vai lançar um novo produto no mercado, com o nome de código "WIO". O departamento de marketing dessa empresa, para saber qual o preço que os potenciais consumidores estarão dispostos a pagar por este novo produto, realizou um estudo de mercado baseado em entrevistas pessoais a uma amostra de 100 potenciais consumidores, com idades compreendidas entre os 20 e os 50 anos. A cada entrevistado foi fornecido um protótipo do "WIO", tendo sido depois perguntado quanto estaria disposto a pagar por este produto (em euros).

Os resultados desse estudo de mercado foram os seguintes:

X : Idade do entrevistado

Y : Preço, em euros, que o entrevistado está disposta a pagar pelo "WIO"

Frequências absolutas conjuntas, $F(x_i, y_j)$

	[25 – 35]] 35 – 45]] 45 – 55]
[0 – 2]	15	0	5
] 2 – 4]	10	25	15
] 4 – 6]	0	10	20

- Existe alguma relação estatística entre a idade do entrevistado e o preço que ele está disposto a pagar pelo "WIO"? Explique porquê.
- Será que posso afirmar que existe uma forte correlação linear positiva entre X e Y ? Justifique.
- Que percentagem de inquiridos, com idades acima dos 35 anos, estão dispostos a pagar mais de 4 euros pelo "WIO"? Qual o conceito estatístico subjacente a esta questão?
- Se a decisão do departamento de Marketing for a de fixar um preço " p_1 " tal que 75% dos inquiridos estejam dispostos a pagar um preço igual ou superior a esse valor, que valor deve ter " p_1 "?
- E se a decisão do departamento de Marketing for a de fixar um preço " p_2 " que seja o preço Modal para aqueles que têm mais de 35 anos, que valor deve ter " p_2 "?

III (7,0 valores)

A Ana estudou o número de bolos vendidos no bar do edifício da *Católica Lisbon*. A tabela ao lado representa os dados recolhidos para esse efeito, sendo x_i a variável que representa o número de bolos que foram vendidos por dia e F_i o número de dias em que se verificou essa quantidade vendida.

x_i	F_i
120	10
121	40
122	50
123	40
124	30
125	15
126	10
127	5

- a) Analise, através de medidas de tendência central, a assimetria do número de bolos que foram vendidos. Interprete.

O responsável do bar afirma que a concentração de bolos vendidos, de acordo com os dias, é muito grande.

- b) Através de um indicador adequado, analise essa concentração.

O Bernardo estudou a duração do atendimento de cada pedido, respectivamente no bar do edifício da *Católica Lisbon* e no bar do edifício da Biblioteca. Os dados estão resumidos na tabela ao lado (assuma y_i e z_i como o tempo em minutos que cada aluno demorou a ser atendido, respectivamente no bar da *Católica Lisbon* e no bar da Biblioteca, e F_i e F_j como as respectivas frequências absolutas).

Duração do atendimento em minutos	Católica Lisbon F_i	Biblioteca F_j
[1 - 3]	2	4
] 3 - 5]	6	8
] 5 - 7]	46	18
] 7 - 9]	30	22
] 9 - 13]	10	36
] 13 - 19]	6	12
Total	100	100

- c) Represente graficamente os dados da duração do atendimento na Biblioteca, através de um histograma de frequências absolutas, e calcule a moda.

Está a ser organizado um curso, a decorrer na Universidade Católica, o qual tem previsto um intervalo em que todos os participantes recebem uma senha para ser atendidos num dos dois bares indicados acima, sendo esse bar determinado pela organização.

- d) Quem retornar ao curso depois do fim do intervalo perde um ponto na classificação por cada minuto que chega atrasado e quem chegar antes ganha um ponto por cada minuto que chega adiantado. Foi pedida ajuda ao Bernardo para, consoante o bar escolhido, determinar a duração do intervalo do curso, de forma a que a soma dos pontos perdidos seja igual à soma dos pontos ganhos, para o total dos utilizadores desse bar. Determine essa duração do intervalo do curso, consoante o bar em causa. Responda quantificadamente.

A Carolina está com muita fome e quer comer antes de ir para a aula. Sabe que se demorar mais de 5 minutos a ser atendida o professor não a deixa entrar na sala. Encontra o Bernardo e pede-lhe conselho para a escolha do bar.

- e) Qual dos dois bares deve ser aconselhado à Carolina? Justifique quantificadamente
f) Quais os conceitos e qual a matéria da cadeira de Estatística I que estão em causa para, com base na informação disponível, responder à alínea e).



**CATOLICA
LISBON**
SCHOOL OF BUSINESS & ECONOMICS

UNIVERSIDADE CATÓLICA PORTUGUESA

LICENCIATURAS EM ECONOMIA E GESTÃO

**ESTATÍSTICA I
FORMULÁRIO**

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_i x_i F_i = \sum_i x_i f_i$$

$$\bar{x} = \sum_i w_i x_i \quad (\text{com } \sum_i w_i = 1)$$

$$\bar{x}_g = \sqrt[n]{x_1^{f_1} \times x_2^{f_2} \times \dots}$$

$$\bar{x}_h = \frac{1}{\frac{1}{n} \sum_i F_i \frac{1}{x_i}} = \frac{1}{\sum_i f_i \frac{1}{x_i}}$$

$$M = l_m + k \times \frac{F_m - F_{m-1}}{(F_m - F_{m+1}) + (F_m - F_{m-1})}$$

$$M_s = l_{m_s} + k_{m_s} \frac{0,5 - s(l_{m_s})}{s(L_{m_s}) - s(l_{m_s})}$$

$$Q_l = l_l + k_l \frac{0,25 - s(l_l)}{s(L_l) - s(l_l)}$$

$$Q_m = l_m + k_m \frac{0,75 - s(l_m)}{s(L_m) - s(l_m)}$$

$$IV = \max_{x_i} \{x_i\} - \min_{x_i} \{x_i\}$$

$$IIQ = Q_m - Q_l$$

$$DAM_x = \frac{1}{n} \sum_i F_i |x_i - \bar{x}| = \sum_i f_i |x_i - \bar{x}|$$

$$s_x^2 = \frac{1}{n} \sum_i F_i (x_i - \bar{x})^2 = \sum_i f_i (x_i - \bar{x})^2 = \sum_i f_i x_i^2 - \bar{x}^2$$

$$s_x = +\sqrt{s_x^2}$$

$$C_v = \frac{s_x}{\bar{x}} \times 100$$

$$CA_p = \frac{\bar{X} - M_o}{s}$$

$$CA_B = \frac{Q_3 + Q_1 - 2M_s}{Q_3 - Q_1}$$

$$K_{Fisher} = \frac{\sum_{i=1}^m (x_i - \bar{X})^4 F_i / n}{\left[\sum_{i=1}^m (x_i - \bar{X})^2 F_i / n \right]^2}$$

$$K = \frac{Q_3 - Q_1}{2(P_{90} - P_{10})}$$

$$IG = 1 - \sum_{j=1}^m (q_j + q_{j-1}) \times (p_j - p_{j-1})$$

$$F_i^{(x)} = F_i(X = x_i) = \sum_j F_{ij}$$

$$F_j^{(y)} = F_j(Y = y_j) = \sum_i F_{ij}$$

$$f(y_j | x_i) = \frac{F(x_i, y_j)}{F_i^{(x)}} = \frac{f(x_i, y_j)}{f_i^{(x)}}$$

$$f(x_i | y_j) = \frac{F(x_i, y_j)}{F_j^{(y)}} = \frac{f(x_i, y_j)}{f_j^{(y)}}$$

$$COV(X, Y) = \frac{1}{n} \sum_k (x_k - \bar{x})(y_k - \bar{y}) = \frac{1}{n} \sum_k x_k y_k - \bar{x} \bar{y}$$

$$COV(X, Y) = \frac{1}{n} \sum_i \sum_j F_{ij} (x_i - \bar{X})(y_j - \bar{Y}) = \sum_i \sum_j f_{ij} (x_i - \bar{x})(y_j - \bar{y}) = \sum_i \sum_j (x_i y_j f_{ij}) - \bar{x} \bar{y}$$

$$r(X, Y) = \frac{COV(X, Y)}{s_x s_y}$$

Nota: As fórmulas abaixo têm 100 como referência para o ano base.

$$I_{i/0}^{(p)} = \frac{p_i}{p_0} \times 100 \quad I_{i/0}^{(q)} = \frac{q_i}{q_0} \times 100 \quad I_{i/0}^{(v)} = \frac{p_i q_i}{p_0 q_0} \times 100 \quad I_{i/0}^{(p)} = \frac{\sum_{i=1}^n p_{ii}}{\sum_{i=1}^n p_{0i}} \times 100$$

$$I_{i/0}^{(p)} = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n \frac{p_{ii}}{p_{0i}} \right) \times 100$$

$$I_{i/0}^{(q)} = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n \frac{q_{ii}}{q_{0i}} \right) \times 100$$

$$I_{i/0}^{(p)} = \left(\sum_{i=1}^n \frac{p_{ii}}{p_{0i}} \times w_i \right) \times 100$$

$$I_{i/0}^{(q)} = \left(\sum_{i=1}^n \frac{q_{ii}}{q_{0i}} \times w_i \right) \times 100$$

$$I_{i/0}^{(p)}(L) = \frac{\sum_{i=1}^n p_{ii} q_{0i}}{\sum_{i=1}^n p_{0i} q_{0i}} \times 100$$

$$I_{i/0}^{(q)}(L) = \frac{\sum_{i=1}^n p_{0i} q_{ii}}{\sum_{i=1}^n p_{0i} q_{0i}} \times 100;$$

$$I_{i/0}^{(p)}(P) = \frac{\sum_{i=1}^n p_{ii} q_{ii}}{\sum_{i=1}^n p_{0i} q_{ii}} \times 100$$

$$I_{i/0}^{(q)}(P) = \frac{\sum_{i=1}^n p_{ii} q_{ii}}{\sum_{i=1}^n p_{ii} q_{0i}} \times 100$$

$$I_{i/0}(F) = \sqrt{I_{i/0}(L) \times I_{i/0}(P)}$$

Nota: o formulário não esgota todos os tratamentos estatísticos possíveis.

ESTATÍSTICA I

1º TESTE, 2011.04.09

Resolução de referência.

[Outras respostas correctas
podem ter sido consideradas]

a) Ind. Preço

Preço Corrente	
Vendas ano 08	569
Vendas ano 09	614
Vendas ano 10	651
$\Sigma p_t q_t$	

Preço de 2006	
Vendas 08	515
09	532
10	581
$\Sigma p_{06} q_t$	

$$I_{t/06}^P = \frac{\Sigma p_t q_t}{\Sigma p_{06} q_t}$$

$$I_{08/06}^P = \frac{569}{515} = 1,1049$$

$$I_{09/06}^P = \frac{614}{552} = 1,1123$$

$$I_{10/06}^P = \frac{651}{581} = 1,1205$$

b). Índice de preço de Paasche: É um índice de preços ^{DE VALORES ABSOLUTOS} ponderado pelas quantidades do ano corrente.

• [VERIFICAÇÃO DAS PROPRIEDADES INDICADAS]

$$I_{08/08}^P = \frac{I_{08/06}^P}{I_{08/06}^P} = \frac{1,1049}{1,1049} = 1,00$$

$$I_{09/08}^P = \frac{I_{09/06}^P}{I_{08/06}^P} = \frac{1,1123}{1,1049} = 1,0067 \quad + 0,67\%$$

$$I_{10/08}^P = \frac{I_{10/06}^P}{I_{08/06}^P} = \frac{1,1205}{1,1049} = 1,0141 \quad + 1,41\%$$

Não é circular: admite circularidade

d)

$$I_{08/08}^V = \frac{614}{569} = 1,079 + 7,9\%$$

$$I_{10/08}^V = \frac{651}{614} = 1,060 + 6,0\%$$

$$I_{10/08}^V = \frac{651}{569} = 1,144 + 14,4\%$$

Incremento médio anual das vendas

$$\sqrt{1,144} = 1,069\% + 7,0\%$$

e) Com preço fixo as vendas em valor cresceram 14,4%

em peso cresceram apenas 4,4%

Logo o motor do crescimento das vendas foi o aumento da quantidade vendida em vez de:

$$I^V = I^P \times I^Q$$

$$I^Q = \frac{I^V}{I^P} = \frac{1,144}{1,079} = 1,060$$

ou 6,2% média anual

Nota: admitindo reversibilidade quanto aos fatores

- a) Existe uma relação, já que as variáveis não são independentes.

Repare-se que, para haver independência,

$$f(x_i, y_j) = f_1(x_i) \times f_2(y_j) \text{ para todos os } x_i, y_j$$

verificação (exemplo):

$$f(x_1, y_1) = 0/100 = 0$$

$$f_1(x_1) \times f_2(y_1) = \frac{25}{100} \times \frac{30}{100} = 0,075$$

Os valores são diferentes pelo que X e Y não são independentes.

b) $\bar{X} = 30 \times 0,25 + 40 \times 0,35 + 50 \times 0,40 = 41,5$

$$\bar{Y} = 1 \times 0,20 + 3 \times 0,50 + 5 \times 0,30 = 3,2$$

$$S_x^2 = 30^2 \times 0,25 + 40^2 \times 0,35 + 50^2 \times 0,40 - 41,5^2 = 1785 - 1722,25 = 62,75$$

$$S_x = \sqrt{62,75} = 7,92$$

$$S_y^2 = 1^2 \times 0,20 + 3^2 \times 0,50 + 5^2 \times 0,30 - 3,2^2 = 12,2 - 10,24 = 1,96$$

$$S_y = \sqrt{1,96} = 1,4$$

$$\text{Cov}(x_i, y_j) = \underbrace{\sum x_i y_j f(i, j)}_{\frac{\sum x_i y_j F_{ij}}{n}} - \bar{x} \bar{y}$$

$$\rightarrow \text{Cov}(X, Y) = \frac{\sum x_i y_j F_{ij}}{n} - \bar{x} \bar{y} \quad \text{fórmula operacional (mais simples)} \rightarrow$$

b) (cont.)

Fij	30	40	50	Fj	YjFj
1	15	0	5	20	20
3	10	25	15	50	150
5	0	10	20	30	150
Fi	25	35	40	100	320
$\bar{x}(F)$	750	1400	2000		4150
XiYj Fij	30	40	50		
1	450	0	250		
3	900	3000	2250		
5	0	2000	5000		
					13850

$$\text{Cov}(X, Y) = \frac{13850}{100} - 41,5 \times 3,2 = 138,5 - 132,8 = 5,7$$

$$r = \frac{5,7}{7,92 \times 1,4} = 0,514$$

A correlação é positiva.

Mas não é forte; é moderada.

$$c) \quad P(Y > 4 \mid X > 35) = \frac{30}{75} = 0,4 \text{ ou } 40\%$$

Conceito de frequência relativa condicionada

d) P_1 é o QUARTIL 1

$$P_1 = 2 + \frac{0,25 - 0,20}{0,5} \times 2 = 2 + 0,1 \times 2 = 2,2 \text{ EUROS}$$

e) DISTRIBUIÇÃO DE Y_j PARA QUEM TEM MAIS DE 35 ANOS:

Y_j	$F_j \mid X > 35$
0-2	5
2-4	40
4-6	30
	<hr/> 75

$$M_0 = 2 + \frac{40 - 5}{(40 - 5) + (40 - 30)} \times 2 =$$

$$= 2 + 0,77(7) \times 2 =$$

$$= 2 + 1,55(5) \approx 3,56 \text{ EUROS}$$

a) b)

xi	Fi	fi	Si	si	xi*Fi	xi*fi	Acum xi*Fi	qi	(qi+qi-1)	(qi+qi-1)fi
120	10	0,0500	10	0,050	1200	6,000	1200	0,049	0,049	0,002
121	40	0,2000	50	0,250	4840	24,200	6040	0,246	0,295	0,059
122	50	0,2500	100	0,500	6100	30,500	12140	0,495	0,741	0,185
123	40	0,2000	140	0,700	4920	24,600	17060	0,695	1,189	0,238
124	30	0,1500	170	0,850	3720	18,600	20780	0,846	1,541	0,231
125	15	0,0750	185	0,925	1875	9,375	22655	0,923	1,769	0,133
126	10	0,0500	195	0,975	1260	6,300	23915	0,974	1,897	0,095
127	5	0,0250	200	1,000	635	3,175	24550	1,000	1,974	0,049
	200				24550	122,750				0,993

a)

Média 122,750
 Mediana 122,500
 Moda 122,000

$M_o < M_e < \bar{X} \rightarrow$ ASSIMETRIA POSITIVA
 OU ENVIESAMENTO À ESQUERDA

b)

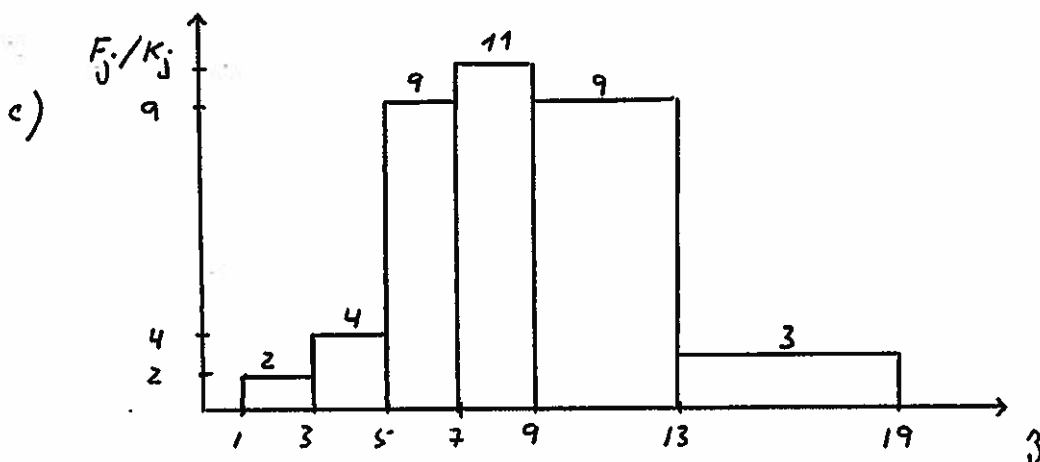
IG = 0,007

A CONCENTRAÇÃO É DE 0,7%.
 É UMA CONCENTRAÇÃO MUITO BAIXA

c) a f)

7/7

Classe	y_i, z_j	K_i, K_j	F_i	F_j	$y_i F_i$	$z_j F_j$	F_j / K_j
[1-3]	2	2	2	4	4	8	2
] 3-5]	4	2	6	8	24	32	4
] 5-7]	6	2	46	18	276	108	9
] 7-9]	8	2	30	22	240	176	11
] 9-13]	11	4	10	36	110	396	9
] 13-19]	16	6	6	12	96	192	2
Total			100	100	750	912	
Média					7,5	9,12	



$M_0 = 8$ pois as classes adjacentes à classe modal têm igual densidade de frequência.

d) Bar da Católica Lisbon : $\bar{Y} = 7,5$ | PORQUE A SOMA DOS DESVIOS EM RELAÇÃO À MÉDIA É ZERO.
 " " Biblioteca : $\bar{Z} = 9,12$

e) $P_i(\leq 5) = 8/100 = 0,08$ ou 8% p/ Católica Lisbon
 $= 12/100 = 0,12$ ou 12% p/ Biblioteca

DEVE SER ACONSELHADO O BAR DA BIBLIOTECA POIS A PROBABILIDADE DE SER ATENDIDO EM MENOS DE 5 MINUTOS É MAIOR.

f) Conceito de probabilidade frequentista da matéria de probabilidades. Também está implícito na resposta a d).

LICENCIATURAS EM ECONOMIA E GESTÃO

ESTATÍSTICA I - 2º TESTE - 4 DE JUNHO DE 2011

ESTATÍSTICA I

2º Teste - 4 de Junho de 2011

Responda em folhas separadas para cada grupo. Se eventualmente não fizer algum grupo, entregue em branco a folha respectiva devidamente identificada.

Leia cuidadosamente a totalidade de cada grupo antes de o responder.

Explicite todas as hipóteses e os cálculos que tiver de fazer para a resolução dos problemas. Use um mínimo de quatro casas decimais. Os grupos ou as perguntas podem não estar pela ordem em que a matéria foi leccionada. Um grupo pode incluir diferentes matérias.

O teste é constituído por três grupos.

I (7,0 valores)

Considere a seguinte função de probabilidade conjunta para as variáveis aleatórias X "número de filhos do agregado familiar" e Y "maior número de anos de escolaridade presente no agregado familiar" numa dada população:

		Variável Y			
		4	9	12	17
Variável X	1	0,05	0,10	a	b
	2	0,02	0,04	c	d
	3	e	f	g	h

As funções de probabilidade marginais de X e Y são as seguintes:

X	Probabilidade marginal
1	0,60
2	0,25
3	0,15

Y	Probabilidade marginal
4	0,08
9	0,16
12	0,44
17	0,32

Sabe-se ainda que $f(x | y = 17)$ é:

X	$f(x y = 17)$
1	0,625
2	0,250
3	0,125

- Calcule os valores esperados das variáveis X e Y . Como interpreta os valores encontrados?
 - Qual das variáveis X ou Y apresenta uma maior variação em torno da respectiva média? Justifique quantitativamente.
- Confirme o valor esperado e a variância da variável X através da função geradora de momentos.
- Complete o quadro da função de probabilidade conjunta.

Nota: Se não conseguir chegar a todas as probabilidades pedidas, considere $a=0,09$ e todos os outros valores em falta iguais a $0,10$, e utilize o quadro assim preenchido nas alíneas d) e/ou e) para as quais precisar dessa informação [será considerada uma redução na cotação por esse efeito].

- Calcule a função de distribuição conjunta e, através desta função, calcule $P(X \leq 2 | Y < 12)$.
- Calcule a covariância das variáveis X e Y e comente acerca da eventual independência entre estas duas variáveis. Justifique devidamente.

II (6,0 valores)

[Na resolução deste exercício use 6 casas decimais ou um mínimo de 6 casas decimais]

Um certo modelo de avião está equipado com três reactores – A, B e C. Cada um daqueles reactores tem uma probabilidade de 5% de falhar durante a decolagem; se durante esta falharem um ou dois reactores o avião vai para o hangar do aeroporto de partida para ser reparado; falhando todos os reactores regista-se um acidente grave.

Uma vez o avião no ar, no percurso do aeroporto de partida até ao seu destino, os reactores têm uma probabilidade de falhar de 3%, 2% e 1% respectivamente. Falhando os três reactores o avião detroça-se no solo, havendo acidente grave; se falhar um ou dois apenas, em 50% destes casos o avião chega ao seu destino, pois está mais próximo dele, e nos restantes 50% regressa ao aeroporto de partida e vai para o hangar para reparação, não completando pois a sua viagem.

A probabilidade de um reactor falhar, em qualquer circunstância, é independente da probabilidade de qualquer outro reactor falhar.

- a) Ilustre a situação descrita através de um diagrama em árvore.

Nota: Se não conseguir chegar a todas as probabilidades pedidas, arbitre valores coerentes para as probabilidades em falta na árvore pedida. A adequação da árvore e o uso da informação do texto inicial serão tomados em conta nas cotações das alíneas seguintes.

- b) Esse avião está estacionado e vai fazer-se à pista para iniciar a viagem:
- i) Qual a probabilidade de nenhum reactor falhar durante a decolagem?
 - ii) Qual a probabilidade de se registar um acidente grave?
 - iii) Qual a probabilidade de o avião chegar ao seu destino final?
- c) i) O avião chegou ao seu destino final. Qual a probabilidade de ter os três reactores em bom estado?
- ii) O avião foi para o hangar do aeroporto de partida, para reparação. Qual a probabilidade de não ter sequer descolado?
- d) Qual a função de probabilidade do “nº de reactores de um avião que falham durante a decolagem”?

III (7,0 valores)

Uma empresa comercial tem a sua sede em Lisboa e tem uma sucursal no Porto. Sabe-se que:

- O volume diário de vendas da sede em Lisboa é uma variável aliatória X com a seguinte função densidade de probabilidade: $f(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{8}$

- As vendas em Lisboa nunca excedem as 4 unidades.

- O lucro diário obtido com as vendas de X pode ser descrito como $\text{Lucro} = 70X - 90$.

- As vendas conjuntas, na sede de Lisboa e na sucursal do Porto, têm como função densidade de probabilidade conjunta: $f(x, y) = \frac{1}{8}$

- O total das vendas (vendas em Lisboa + vendas no Porto) é sempre inferior a 4 unidades.

- a) Calcule a probabilidade de num determinado dia o volume de vendas em Lisboa ser superior a 3 unidades.

- b) Calcule o Valor Esperado e a Variância do lucro diário em Lisboa.

- c) Calcule a probabilidade das vendas diárias em Lisboa serem mais do dobro das vendas diárias no Porto

- d) Num dia em que as vendas no Porto foram 3 unidades qual o valor esperado das vendas em Lisboa?

- e) Averigue se as vendas diárias em Lisboa são independentes das vendas diárias no Porto.

a.i) $0,5 + 0,5 = 1,0$

$$E[X] = \sum x_i f_i(x_i) = 1 \times 0,6 + 2 \times 0,25 + 3 \times 0,15 = 1,55$$

O número médio de "felhas por aspersão foliar" é de 1,55

$$E[Y] = \sum y_i f_i(y_i) = 4 \times 0,08 + 9 \times 0,16 + 12 \times 0,44 + 17 \times 0,32 = 12,48$$

O número médio de "anos de escolaridade" é de 12,48

a.ii) $0,25 + 0,25 + 0,5 = 1,0$

Calcular a variância de X e Y (0,5)

Calcular o coeficiente de variação de X e Y $CV_x = \frac{O_x}{M_x}$

$$E[X^2] = \sum x_i^2 f_i(x_i) = 1^2 \times 0,6 + 2^2 \times 0,25 + 3^2 \times 0,15 = 2,95$$

$$V[X] = 2,95 - (1,55)^2 = E[X^2] - (E[X])^2 = 0,5475$$

$$E[Y^2] = \sum y_i^2 f_i(y_i) = 4^2 \times 0,08 + 9^2 \times 0,16 + 12^2 \times 0,44 + 17^2 \times 0,32 = 170,08$$

$$V[Y] = E[Y^2] - (E[Y])^2 = 170,08 - (12,48)^2 = 14,3296$$

$$CV_x = \frac{\sqrt{0,5475}}{1,55} = \frac{0,7399}{1,55} = 0,4774 \text{ ou } 47,74\%$$

$$CV_y = \frac{\sqrt{14,3296}}{12,48} = \frac{3,7855}{12,48} = 0,3033 \text{ ou } 30,33\%$$

A dispersão é maior para a variável X

b) Função geradora de momentos de X

(2)

$$M_X(t) = E[e^{tx}] = \sum_k e^{tx} f(x) = e^t \times 0,6 + e^{2t} \times 0,25 + e^{3t} \times 0,15$$

1º momento ordinário é a média de X , μ'_1

$$M'_X(t) = 0,6 e^t + 0,5 e^{2t} + 0,45 e^{3t}$$

$$M'_X(t=0) = 0,6 + 0,5 + 0,45 = 1,55 = E[X]$$

2º momento ordinário é $E[X^2] = \mu'_2$

$$M''_X(t) = 0,6 e^t + 1 e^{2t} + 1,35 e^{3t}$$

$$M''_X(t=0) = 0,6 + 1 + 1,35 = 2,95 = E[X^2]$$

$$V[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = 2,95 - (1,55)^2 = 0,5475$$

$$E[X] = \left. \frac{d M_X(t)}{dt} \right|_{t=0} = \left[0,6 e^t + 0,5 e^{2t} + 0,45 e^{3t} \right]_{t=0}$$

$$E[X^2] = \left. \frac{d^2 M_X(t)}{dt^2} \right|_{t=0} = \left[0,6 e^t + 1 e^{2t} + 1,35 e^{3t} \right]_{t=0}$$

c) complete o quadro de função probabilidade conjunta

(3)

$x \backslash y$	4	9	12	17	$f_1(x)$
1	0.05	0.10	0.25	0.20	0.60
2	0.02	0.04	0.08	0.08	0.25
3	0.01	0.02	0.08	0.04	0.15
$f_2(y)$	0.08	0.16	0.44	0.32	1.00

1º Passo e) e f) calculam x por diferença / marginais de y

$$e = 0.08 - 0.05 - 0.02 = 0.01$$

$$f = 0.16 - 0.1 - 0.04 = 0.02$$

2º Passo

Função probab. condicionada $f_1(x | y=17) = \begin{cases} 0.625 & x=1 \\ 0.250 & x=2 \\ 0.125 & x=3 \end{cases}$

$$f(x | y=17) = \frac{f(x, y=17)}{f_2(y=17)} \quad \text{logo} \quad f(x, y=17) = f(x | y=17) \cdot f_2(y=17)$$

$$b = 0.625 \times 0.32 = 0.2$$

$$d = 0.250 \times 0.32 = 0.08$$

$$e = 0.125 \times 0.32 = 0.04$$

3º Passo

valores encontram x por diferença

$$a = 0.6 - 0.2 - 0.1 - 0.05 = 0.25$$

$$c = 0.25 - 0.08 - 0.02 - 0.04 = 0.11$$

$$g = 0.15 - 0.04 - 0.01 - 0.02 = 0.08$$

$x \backslash y$	4	9	12	17	$f_1(x)$
1	0.05	0.1	0.09	0.1	0.34
2	0.02	0.04	0.1	0.1	0.26
3	0.11	0.1	0.1	0.1	0.4
$f_2(y)$	0.17	0.24	0.29	0.3	1.0

$$E[X_1] = 2.56$$

$$\text{cov}(X_1) = 3.216$$

a)

(4)

$X \backslash Y$	4	9	12	17	
1	0.05	0.15	0.40	0.60	
2	0.07	0.21	0.57	0.85	
3	0.08	0.24	0.68	1.00	

$$P(X \leq 2, Y \leq 12) = F(2, 9) = 0.21$$

Podem calcular a base no quadro
inicial e/ valores

$$P(X \leq 2 | Y \leq 12) = \frac{F(2, 9)}{F_2(9)} = \frac{0.21}{0.24} = 0.875 //$$

5

e) Cálculo da covariância e independência

$$\text{COV}(X, Y) = E[XY] - E[X]E[Y]$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{já temos de ai)}$

$$\begin{aligned} E[XY] &= 1 \times 4 \times 0.05 + 1 \times 9 \times 0.1 + 1 \times 12 \times 0.25 + 1 \times 17 \times 0.2 + & (7.5) \\ &+ 2 \times 4 \times 0.02 + 2 \times 9 \times 0.04 + 2 \times 12 \times 0.11 + 2 \times 17 \times 0.08 + & (6.24) \\ &+ 3 \times 4 \times 0.01 + 3 \times 9 \times 0.02 + 3 \times 12 \times 0.08 + 3 \times 17 \times 0.04 = & (5.58) \end{aligned}$$

$$E[XY] = 19.32$$

$$\text{COV}(X, Y) = 19.32 - 1.55 \times 12.48 = 19.32 - 19.344 = -0.024$$

Muito pequena variação conjunta e negativa

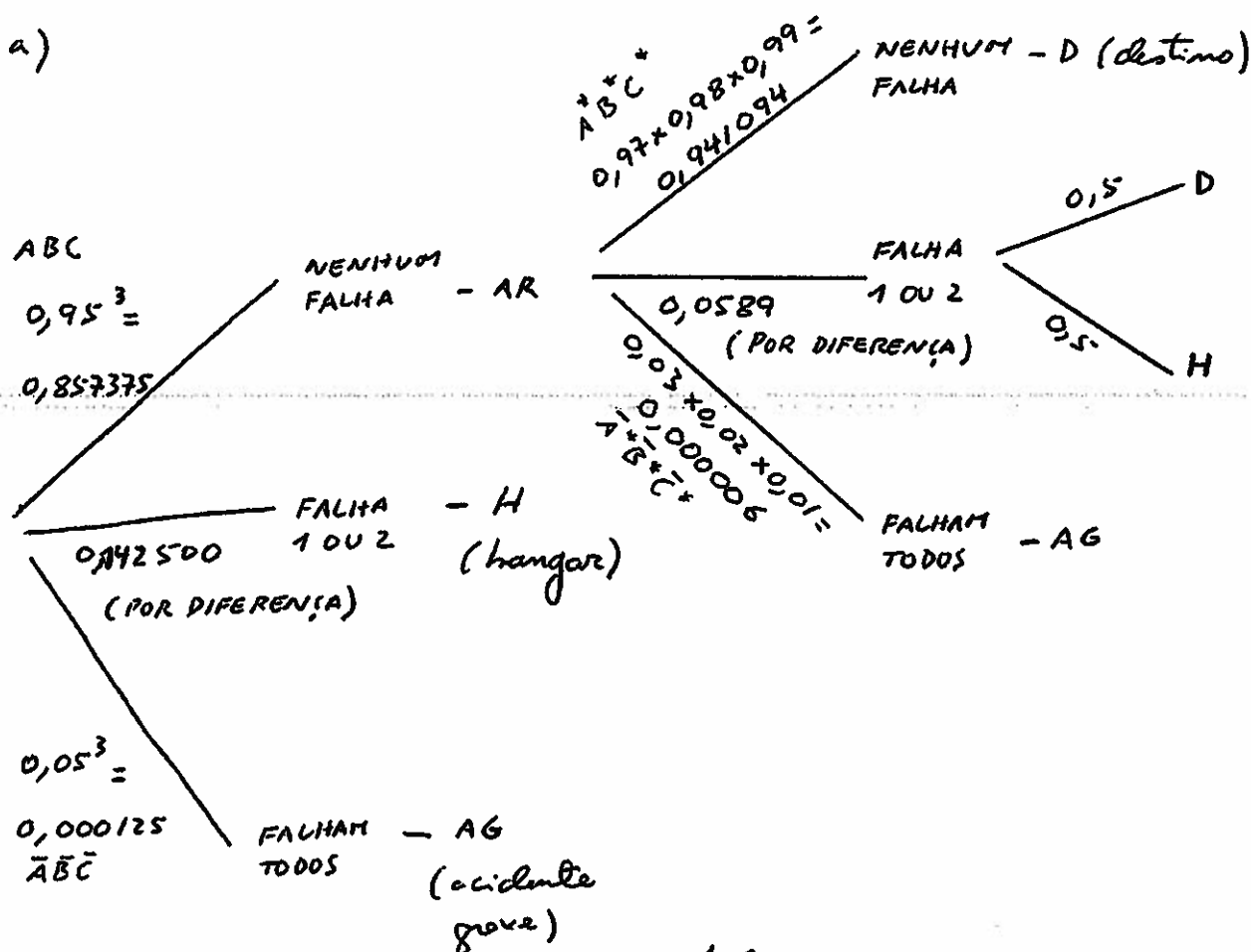
Não são independentes pois existe

$$f(x_i, y_j) \neq f_1(x_i) f_2(y_j) \text{ pois } 0.05 \neq \frac{0.08 \times 0.6}{0.048}$$

e/ou

$$\text{COV}(X, Y) \neq 0$$

a)



b)

A : REACTOR A NÃO FALHA NA DESCOLAGEM					A* : REACTOR A NÃO FALHA EM VÔO				} PODIA NÃO SE CONSIDERAR ESTA SEGUNDA DISTINÇÃO
B :	"	B	"	"	B* :	"	B	"	
C :	"	C	"	"	C* :	"	C	"	

i) $P(\text{Nenhum falhar}) = P(ABC) = 0,95^3 = 0,857375$

ii) $P(AG) = 0,000125 + 0,857375 \times 0,000006 = 0,000125 + 0,000005 = 0,000130$

iii) $P(D) = 0,857375 \times [0,941094 + 0,0589 \times 0,5] = 0,857375 [0,941094 + 0,02945] = 0,806870 + 0,025250 = 0,83212$

a)

$$c) i) P(ABC|D) = \frac{0,806870}{0,83212} = 0,969656$$

ou
 $P(AB\bar{C} \cap A^*B^*C^*|D)$
 Poderia não se fazer
 esta distinção.

$$ii) P(\text{Não ter descolado} | \text{unipar}) =$$

$$= \frac{0,142500}{0,142500 + \underbrace{0,025250}_{a)}} = \frac{0,142500}{0,167750} = 0,849478$$

UMA RESPOSTA MAIS FORMAL, PARA ALÉM DAS CONTAS, PODERIA SER:

$$b) i) P(ABC)$$

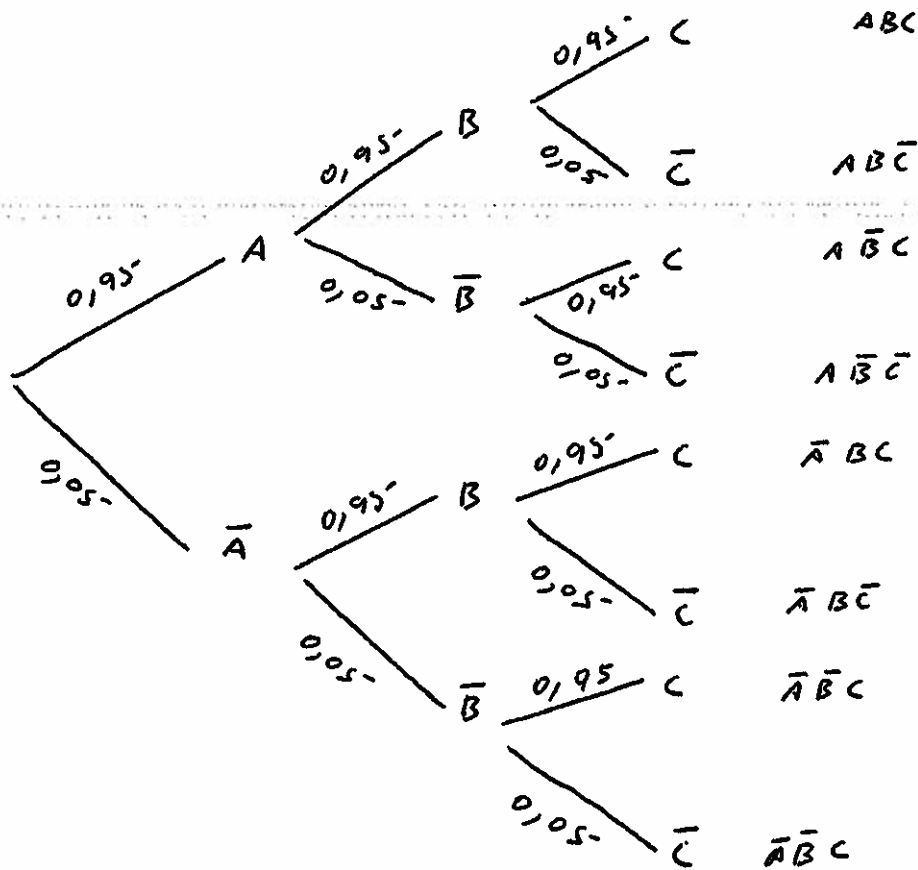
$$ii) P(\bar{A}\bar{B}\bar{C}) + P(\bar{A}^*\bar{B}^*\bar{C}^*|ABC) \times P(ABC)$$

$$iii) P(D) = P(AR) \times (\text{Nenhum falhar} | AR) + \\ + P(AR) \times P(\text{Falhar 1 ou 2} | AR) \times P(D | AR \cap \text{Falhar 1 ou 2})$$

$$c) i) P(ABC \cap A^*B^*C^* | D)$$

$$ii) P(\text{Falhar 1 ou 2 na descolagem} | H)$$

d) X : n.º de reactivos que podem falhar durante a descolagem
 $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5$



$$f(x) = P(X=x) = \begin{cases} 0,857375 & x=0 \\ 0,135375 & x=1 \\ 0,007125 & x=2 \\ 0,000125 & x=3 \\ 0 & \text{out. val. de } x \end{cases}$$

$$a) f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{x}{8} & , 0 \leq x \leq 4 \\ 0 & \text{out. val. de } x \end{cases}$$

$$\text{norm: } \int_0^4 f(x) dx = \left[\frac{1}{2}x - \frac{x^2}{16} \right]_0^4 = \frac{4}{2} - \frac{16}{16} = 2 - 1 = 1$$

$$P(X > 3) = \int_3^4 \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{8} \right) dx = \left[\frac{1}{2}x - \frac{x^2}{16} \right]_3^4 = 1 - \left(\frac{3}{2} - \frac{9}{16} \right) =$$

$$= 1 - \left(\frac{24}{16} - \frac{9}{16} \right) = \frac{16}{16} - \frac{15}{16} = \frac{1}{16}$$

$$b) E(L) = E(70X - 90) = 70E(X) - 90$$

$$E(X) = \int_0^4 x \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{8} \right) dx = \left[\frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{24} \right]_0^4 = \frac{16}{4} - \frac{64}{24} = \frac{96}{24} - \frac{64}{24} =$$

$$E(X^2) = 2, (6)$$

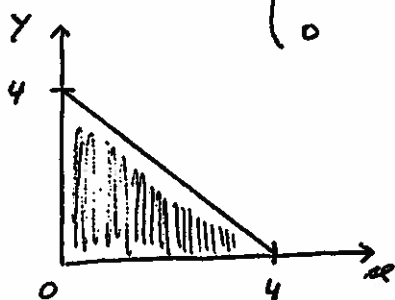
$$V(X) = 2, (6) - (4/3)^2 = 0,8 (8)$$

$$= \frac{32}{24} = \frac{4}{3}$$

$$E(L) = 70 \times \frac{4}{3} - 90 = 3, (3)$$

$$V(L) = V(70X - 90) = 70^2 V(X) + 0 = 70^2 \times 0,8 (8) = 4355, (5)$$

$$c) f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{8} & 0 \leq x \leq 4 \\ & x+y \leq 4 \\ 0 & \text{out. val. } x, y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 4 \\ 0 \leq y \leq 4 \\ y \leq 4-x \\ x \leq 4-y \end{cases}$$



$$\text{nota: } \int_0^4 \left[\int_0^{4-x} \frac{1}{8} dy \right] dx =$$

$$= \int_0^4 \left[\frac{y}{8} \right]_0^{4-x} dx =$$

$$= \int_0^4 \left(\frac{4}{8} - \frac{x}{8} \right) dx = \left[\frac{4}{8}x - \frac{x^2}{16} \right]_0^4 =$$

$$= \frac{16}{8} - \frac{16}{16} = 2 - 1 = 1 \quad [\text{Não se pedia esta verificação}]$$

$$e) f_2(y) = \int_{0u} f(x) du = \int_0^{4-y} \frac{1}{8} dx = \left[\frac{x}{8} \right]_0^{4-y} = \frac{4}{8} - \frac{y}{8} = \frac{1}{2} - \frac{y}{8}$$

$$0 \leq y < 4$$

$$\text{nota: } \int_0^4 \left(\frac{1}{2} - \frac{y}{8} \right) dy = \left[\frac{1}{2} y - \frac{y^2}{16} \right]_0^4 = \frac{4}{2} - \frac{16}{16} = 1$$

VERIFICAÇÃO DA INDEPENDÊNCIA:

$$f_1(x) \times f_2(y) = f(x, y) ?$$

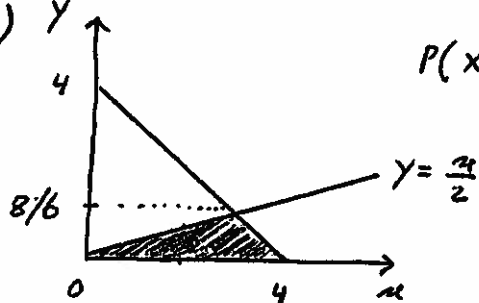
$$\left(\frac{1}{2} - \frac{x}{8} \right) \left(\frac{1}{2} - \frac{y}{8} \right) = \frac{1}{4} - \frac{y}{16} - \frac{x}{16} + \frac{xy}{64} =$$

$$= \frac{16}{64} - \frac{4y}{64} - \frac{4x}{64} + \frac{xy}{64}$$

Esta expressão é diferente de $f(x, y)$ pelo que as duas variáveis não são independentes.

c) (cont.)

d)



$$P(x > 2y) = ?$$

$$x > 2y \Leftrightarrow y < \frac{x}{2}$$

$$\begin{cases} y = 4 - x \\ y = \frac{x}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{x}{2} = 4 - x \Leftrightarrow x = 8 - 2x \Leftrightarrow x = 8/3 \rightarrow y = 4/3$$

$$P(x > 2y) = \int_0^{8/6} \left[\int_{2y}^{4-y} \frac{1}{8} dx \right] dy =$$

$$\left[\frac{x}{8} \right]_{2y}^{4-y} = \left(\frac{4}{8} - \frac{y}{8} \right) - \frac{2y}{8} = \frac{4}{8} - \frac{3y}{8}$$

$$= \int_0^{8/6} \left(\frac{4}{8} - \frac{3y}{8} \right) dy = \left[\frac{4y}{8} - \frac{3y^2}{16} \right]_0^{8/6} = \frac{32}{42} - \frac{192}{576} = 0,42857$$

d) $E[X | Y=3] = ?$

$$f(x | Y=3) = \frac{f(x, Y=3)}{f_Y(Y=3)} = \frac{1/8}{\frac{4}{8} - \frac{3}{8}} = \frac{1/8}{1/8} = 1$$

↗ variáveis
no pog. anterior.

$$0 < x < 1$$

$$E[X | Y=3] = \int_0^1 x \cdot 1 dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

e)

A independência pode ser vista confrontando o valor esperado calculado em b) com o valor esperado calculado em d).

$E[X] \neq E[X | Y=3]$ pelo que as variáveis não são independentes.

NOTA: Havia duas maneiras de responder a e)

b) (variance de X)

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

$$E(X^2) = \int_0^4 x^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{8} \right) dx = \left[\frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{32} \right]_0^4 = \frac{64}{6} - \frac{256}{32} =$$
$$= 2,66$$

$$V(X) = 2,66 - \left(\frac{4}{3} \right)^2 = 0,88$$

O Exame é constituído por quatro grupos. Responda em **folhas separadas para cada grupo**. Se eventualmente não fizer algum grupo, entregue em branco a folha respectiva devidamente identificada.

Leia cuidadosamente a totalidade de cada grupo antes de o responder. Sempre que o enquadramento teórico o permite dê respostas mais simples.

Explicite todas as hipóteses e os cálculos que tiver de fazer para a resolução dos problemas. Os grupos ou as perguntas podem não estar pela ordem em que a matéria foi leccionada. Um grupo pode incluir diferentes matérias.

I (6,0 valores)

Os 15 primeiros governos constitucionais¹ existentes em Portugal desde 1976 tiveram a seguinte distribuição, de acordo com o número de ministérios (X) e o número de membros do Governo (Y):

		Y Número de membros do Governo			
		[49 - 53]] 53 - 57]] 57 - 61]] 61 - 67]
X Número de Ministérios	[13 - 16]	4	2	1	2
] 16 - 19]	0	1	2	0
] 19 - 22]	0	0	2	1

- Verifique, de forma quantitativa, se as variáveis X e Y são independentes.
- Calcule a média, mediana e moda da distribuição da variável “número de membros do Governo” e, utilizando estes indicadores, classifique esta distribuição quanto à assimetria.
- Qual a média e a variância do número de ministérios dos governos com maior dimensão. Como designa os indicadores que calculou?
- Compare, através de um indicador apropriado, a dispersão das variáveis X e Y . O que conclui? Relacione com a discussão à volta da dimensão e da operacionalidade do Governo.
- Calcule e caracterize a intensidade da relação entre o número de ministérios e o número de membros do Governo.

¹ Governos de 1976 a 2000; valores aproximados. O actual governo é o XIX Governo Constitucional.

II (4,0 valores)

Parabéns! Você acabou de ser nomeado *Chief Marketing Officer* da companhia de aviação Air Católica Lisbon!

Na primeira reunião com a equipa comercial apresentaram-lhe o seguinte quadro com informação acerca dos últimos três anos de operação:

ANOS	CLASSE TURÍSTICA		CLASSE PRIMEIRA		CLASSE EXECUTIVA	
	RM	Nº Passag.	RM	Nº Passag.	RM	Nº Passag.
2008	120	2 130	240	1 540	230	1 950
2009	121	2 180	285	1 320	255	1 162
2010	126	3 910	290	1 710	270	850

Nº Passag.: Corresponde ao número de bilhetes vendidos.

RM: Corresponde à Receita Média.

Nota: Em todas as análises a receita média deve ser entendida como o preço, podendo ser usado P (de preço) na notação em vez de receita média.

- a) O responsável pela facturação da Air Católica Lisbon apresentou a evolução da receita média através do Índice de Laspeyres, para o período 2008 a 2010, tomando também como base o ano de 2008.

i) Quais os valores deste índice?

ii) Faça uma mudança de base, a partir dos valores de a) i), para o ano de 2010.

- b) A Associação Internacional das Companhias Aéreas Universitárias (AICAU) publicou recentemente um *Relatório de Actividade* onde menciona que o mercado de passageiros aéreos no mundo cresceu 9,5% no período em análise.

Compare este resultado com o que aconteceu na Air Católica Lisbon, por classes e para o total de passageiros transportados pela companhia. O que conclui? Quais os crescimentos médios anuais?

- c) Finalmente você quis fazer a análise em termos reais da evolução dos preços praticados pela Air Católica Lisbon. Para isso consultou o site do INE e verificou que a taxa de variação média anual do Índice de Preços no Consumidor, com base em 2005, foi respectivamente:

2008	2,7 %
2009	- 0,9 %
2010	1,4 %

A que conclusões chegou? Justifique devidamente.

- d) Calcule o índice de rácios de Laspeyres, para o número de passageiros, para o ano de 2010 com base em 2008.

III (4,0 valores)

Uma empresa portuguesa de chocolates está a pensar expandir-se para Badajoz. Sendo uma empresa pequena, apenas tem chocolates de três variedades: Leite, Preto e Branco. Num dos mais recentes estudos de mercado sobre a cidade concluiu-se que 5% da população local gosta de todos os tipos chocolate, mas que 5% da população não gosta de nenhum deles. 30% dos inquiridos responderam apenas gostar de chocolate de leite e preto, enquanto que 40% da população gosta de chocolate branco.

- a) Sabendo que um dos inquiridos gosta de chocolate branco, qual a probabilidade de gostar de todos os tipos de chocolate?

Mais alguns resultados são conhecidos neste estudo:

- A probabilidade de apenas gostarem de chocolate de leite, sabendo que gostam de chocolate de leite é de 20% ;
 - 15% dos inquiridos apenas gostam de chocolate branco e 500 inquiridos apenas gostam de chocolate preto;
 - Depois de uma campanha realizada pela marca, ficou-se a saber que a probabilidade de as pessoas apenas gostarem de chocolate branco e preto é o triplo da probabilidade de apenas gostarem de chocolate de leite e branco.
- b) Apresente o Diagrama de Venn que este cenário sugere para a empresa bem como o total de número de inquiridos no estudo. Para esta alinea deve enunciar, de forma formal, todos os cálculos que realizar.
- c) Decidido a apostar neste mercado, mas não tendo dimensão para concorrer em todos os tipos de chocolate, o CEO da marca decidiu apostar nos dois tipos de chocolate de que os inquiridos disseram mais gostar.
- Pensa que esta é a melhor política para a empresa? Explique quantitativamente o que está em causa e indique os pressupostos, relativos à forma como os consumidores compram, que justificam a sua resposta.
- d) Soube-se entretanto que 20 % dos inquiridos gostam de chocolate de amêndoas. Qual a probabilidade mínima de um desses inquirido gostar de pelo menos um dos outros tipos de chocolate? E qual a probabilidade máxima?

IV (6,0 valores)

X e Y são duas variáveis aleatórias contínuas que representam as quantidades produzidas diariamente dos bens X e Y numa determinada empresa. Sabe-se que:

$$0 < Y < 6 ; \quad 0 < X < 6 ; \quad X > Y ; \quad f(x, y) = \frac{1}{18}$$
$$f(y) = \frac{1}{3} - \frac{y}{18} ; \quad E(X) = 4 ; \quad V(X) = 2$$

- a) Calcule a probabilidade da produção diária do bem X se situar entre 2 e 3 unidades.
- b) Calcule o valor esperado e a variância da produção diária do bem Y. A partir destes valores calcule o valor esperado e a variância da receita conseguida com a venda do bem Y quando o preço unitário de venda de Y é de 40 €. (Considere que todas as quantidades produzidas são vendidas).
- c) Num dia em que se produziram 4 unidades do bem X qual a probabilidade da produção de Y exceder as 3 unidades.
- d) Calcule a variância da produção total da empresa, ou seja, de $(X+Y)$.
- e) Calcule a probabilidade de a produção total ser maior que 6 unidades.

LICENCIATURAS EM ECONOMIA E GESTÃO

ESTATÍSTICA I

FORMULÁRIO

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_i x_i F_i = \sum_i x_i f_i$$

$$\bar{x} = \sum_i w_i x_i \quad (\text{com } \sum_i w_i = 1)$$

$$\bar{x}_g = \sqrt[n]{x_1^{F_1} \times x_2^{F_2} \times \dots}$$

$$\bar{x}_h = \frac{1}{\frac{1}{n} \sum_i F_i \frac{1}{x_i}} = \frac{1}{\sum_i f_i \frac{1}{x_i}}$$

$$M = l_m + k \times \frac{F_m - F_{m-1}}{(F_m - F_{m+1}) + (F_m - F_{m-1})}$$

$$M_e = l_{m_e} + k_{m_e} \frac{0,5 - s(l_{m_e})}{s(L_{m_e}) - s(l_{m_e})}$$

$$Q_I = l_I + k_I \frac{0,25 - s(l_I)}{s(L_I) - s(l_I)}$$

$$Q_{III} = l_{III} + k_{III} \frac{0,75 - s(l_{III})}{s(L_{III}) - s(l_{III})}$$

$$IV = \max_{x_i} \{x_i\} - \min_{x_i} \{x_i\}$$

$$IIQ = Q_{III} - Q_I$$

$$DAM_x = \frac{1}{n} \sum_i F_i |x_i - \bar{x}| = \sum_i f_i |x_i - \bar{x}|$$

$$s_x^2 = \frac{1}{n} \sum_i F_i (x_i - \bar{x})^2 = \sum_i f_i (x_i - \bar{x})^2 = \sum_i f_i x_i^2 - \bar{x}^2$$

$$s_x = \sqrt{s_x^2}$$

$$C_v = \frac{s_x}{\bar{x}} \times 100$$

$$CA_p = \frac{\bar{X} - M_e}{s}$$

$$CA_B = \frac{Q_3 + Q_1 - 2M_e}{Q_3 - Q_1}$$

$$K_{Fisher} = \frac{\sum_{i=1}^m (x_i - \bar{X})^4 F_i / n}{\left[\sum_{i=1}^m (x_i - \bar{X})^2 F_i / n \right]^2}$$

$$K = \frac{Q_3 - Q_1}{2(P_{90} - P_{10})}$$

$$IG = 1 - \sum_{j=1}^m (q_j + q_{j-1}) \times (p_j - p_{j-1})$$

$$F_i^{(x)} = F_i(X = x_i) = \sum_j F_{ij}$$

$$F_j^{(y)} = F_j(Y = y_j) = \sum_i F_{ij}$$

$$f(y_j | x_i) = \frac{F(x_i, y_j)}{F_i^{(x)}} = \frac{f(x_i, y_j)}{f_i^{(x)}}$$

$$f(x_i | y_j) = \frac{F(x_i, y_j)}{F_j^{(y)}} = \frac{f(x_i, y_j)}{f_j^{(y)}}$$

$$COV(X, Y) = \frac{1}{n} \sum_k (x_k - \bar{x})(y_k - \bar{y}) = \frac{1}{n} \sum_k x_k y_k - \bar{x} \bar{y}$$

$$COV(X, Y) = \frac{1}{n} \sum_i \sum_j F_{ij} (x_i - \bar{X})(y_j - \bar{Y}) = \sum_i \sum_j f_{ij} (x_i - \bar{x})(y_j - \bar{y}) = \sum_i \sum_j (x_i y_j f_{ij}) - \bar{x} \bar{y}$$

$$r(X, Y) = \frac{COV(X, Y)}{s_x s_y}$$

Nota: As fórmulas abaixo têm 100 como referência para o ano base.

$$I_{i/0}^{(p)} = \frac{P_t}{P_0} \times 100 \quad I_{i/0}^{(q)} = \frac{q_t}{q_0} \times 100 \quad I_{i/0}^{(v)} = \frac{P_t q_t}{P_0 q_0} \times 100 \quad I_{i/0}^{(p)} = \frac{\sum_{i=1}^n P_{it}}{\sum_{i=1}^n P_{0i}} \times 100$$

$$I_{(i/0)}^{(p)} = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n \frac{P_{it}}{P_{0i}} \right) \times 100$$

$$I_{i/0}^{(q)} = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n \frac{q_{it}}{q_{0i}} \right) \times 100$$

$$I_{(i/0)}^{(p)} = \left(\sum_{i=1}^n \frac{P_{it}}{P_{0i}} \times w_i \right) \times 100$$

$$I_{i/0}^{(q)} = \left(\sum_{i=1}^n \frac{q_{it}}{q_{0i}} \times w_i \right) \times 100$$

$$I_{i/0}^{(p)}(L) = \frac{\sum_{i=1}^n P_{it} q_{0i}}{\sum_{i=1}^n P_{0i} q_{0i}} \times 100$$

$$I_{i/0}^{(q)}(L) = \frac{\sum_{i=1}^n P_{0i} q_{it}}{\sum_{i=1}^n P_{0i} q_{0i}} \times 100;$$

$$I_{i/0}^{(p)}(P) = \frac{\sum_{i=1}^n P_{it} q_{it}}{\sum_{i=1}^n P_{0i} q_{it}} \times 100$$

$$I_{i/0}^{(q)}(P) = \frac{\sum_{i=1}^n P_{it} q_{it}}{\sum_{i=1}^n P_{it} q_{0i}} \times 100$$

$$I_{i/0}(F) = \sqrt{I_{i/0}(L) \times I_{i/0}(P)}$$

Nota: o formulário não esgota todos os tratamentos estatísticos possíveis.

a) Para haver independência

$$f(x_i, y_j) = f_1(x_i) \times f_2(y_j) \quad , \quad \forall x_i, y_j \text{ DO DOMÍNIO}$$

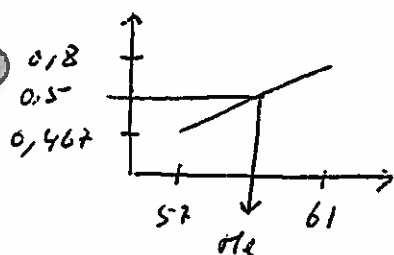
Esta condição não se verifica. Por exemplo:

$$f(x_3, y_1) = 0$$

$$f_1(x_3) \times f_2(y_1) = \frac{3}{15} \times \frac{4}{15} \neq 0$$

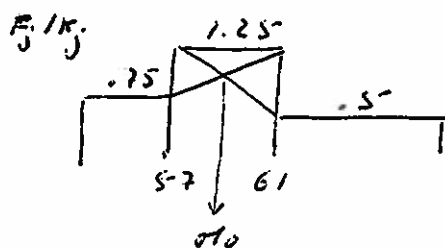
b) CLASSE	y_j	F_j	$y_j F_j$	K_j	F_j / K_j	A_j
49-53	51	4	204	4	1	$4/15 = 0,267$
53-57	55	3	165	4	0,75	$7/15 = 0,467$
57-61	59	5	295	4	1,25	$72/15 = 0,8$
61-67	64	3	192	6	0,5	$15/15 = 1,0$
		15	856			

$$\bar{y} = \frac{\sum y_j F_j}{n} = \frac{856}{15} = 57,07$$



$$\frac{0,8 - 0,467}{61 - 57} = \frac{0,5 - 0,467}{H_2 - 57} \quad (1)$$

$$(1) H_2 = 57 + \frac{0,5 - 0,467}{0,8 - 0,467} \times 4 = 57,396$$



$$\frac{1,25 - 0,5}{61 - H_0} = \frac{1,25 - 0,75}{H_0 - 57} \quad (2)$$

$$(2) H_0 = 57 + \frac{1,25 - 0,75}{(1,25 - 0,75) + (1,25 - 0,5)} \times 4 =$$

$$= 57 + \frac{0,5}{0,5 + 0,75} \times 4 = 58,6$$

$\bar{x} < M_2 < H_0 \rightarrow$ Assimetria negativa ou encaixamento à direita.

$$c) \bar{X} /_{61-67} = \frac{14,5 \times 2 + 17,5 \times 0 + 20,5 \times 1}{3} = \frac{49,5}{3} = 16,5$$

$$V(X) /_{61-67} = \frac{14,5^2 \times 2 + 20,5^2 \times 1}{3} - 16,5^2 =$$

$$= 280,25 - 272,25 = 8$$

Tabela de variância e de média condicionadas.

$$d) \bar{Y} = 57,07$$

$$V(Y) = \frac{5^2 \times 4 + 55^2 \times 3 + 59^2 \times 5 + 64^2 \times 3}{15} - 57,07^2 =$$

$$= \frac{49172}{15} - 57,07^2 = 21,148 \quad | \quad S_Y = 4,599$$

$$CV_Y = \frac{\sqrt{21,148}}{57,07} = 0,081 \text{ ou } 8,1\%$$

$$\bar{X} = \frac{14,5 \times 8 + 17,5 \times 3 + 20,5 \times 3}{15} = \frac{244,5}{15} = 16,3$$

$$V(X) = \frac{14,5^2 \times 8 + 17,5^2 \times 3 + 20,5^2 \times 3}{15} - 16,3^2 =$$

$$= \frac{4071,75}{15} - 16,3^2 = 5,76$$

$$S_X = \sqrt{5,76} = 2,4$$

$$CV_X = \frac{2,4}{16,3} = 0,147 \text{ ou } 14,7\%$$

A dispersão do n.º de ministros, medida pelo coeficiente de variação, é maior do que a dispersão do n.º de membros do governo. O n.º de membros total do governo é mais rígido à mudança que o n.º de ministros.

$$e) \sum_i \sum_j x_i y_j F_{ij}$$

	5-1	5-5	5-9	6-4
14,5	2958	1595	855,5	1856
17,5	0	962,5	2065	0
20,5	0	0	2419	1312
				14023

$$COV = \frac{\sum_i \sum_j x_i y_j F_{ij}}{N} - \bar{x} \bar{y} =$$

$$= \frac{14023}{15} - 16,3 \times 57,07 = 4,626$$

$$r = \frac{4,626}{2,4 \times 4,599} = 0,419 \approx 0,42$$

Correlação positiva: as variáveis evoluem no mesmo sentido.

Correlação moderada.

Para p/0 final.

$$\sum_i \sum_j x_i y_j F_{ij} = 14023$$

II

a)
$$\bar{I}_{t/08}^P(L) = \frac{\sum P_t q_{08}}{\sum p_{08} q_{08}}$$

i)
$$\bar{I}_{08/08} = \frac{120 \times 2130 + 240 \times 1540 + 230 \times 1950}{120 \times 2130 + 240 \times 1540 + 230 \times 1950} = \frac{1073700}{1073700} = 1 \text{ ou } 100$$

$$\bar{I}_{09/08} = \frac{121 \times 2130 + 285 \times 1540 + 255 \times 1950}{1073700} = \frac{1193880}{1073700} = 1,112 \text{ ou } 111,2$$

$$\bar{I}_{10/08} = \frac{126 \times 2130 + 290 \times 1540 + 270 \times 1950}{1073700} = \frac{1241480}{1073700} = 1,156 \text{ ou } 115,6$$

ii)
$$\bar{I}_{08/10} = \frac{\bar{I}_{08/08}}{\bar{I}_{10/08}} = \frac{1}{1,156} = 0,865 \text{ ou } 86,5$$

$$\bar{I}_{09/10} = \frac{\bar{I}_{09/08}}{\bar{I}_{10/08}} = \frac{1,112}{1,156} = 0,962 \text{ ou } 96,2$$

$$\bar{I}_{10/10} = \frac{\bar{I}_{10/08}}{\bar{I}_{10/08}} = 1 \text{ ou } 100$$

b) AIR CATÓLICA LISBON:

$$\bar{I}_{10/08}^{\text{P TURÍSTICA}} = \frac{3910}{2130} = 1,83568 \rightarrow 83,6\%$$

$$TC_{\text{MÉDIA}} = \sqrt{1,83568} - 1 = 1,35487 - 1 = 0,35487 \text{ ou } 35,487\%$$

$$\bar{I}_{10/08}^{\text{P PRIMEIRA}} = \frac{1710}{1540} = 1,11039 \rightarrow 11,04\%$$

$$TC_{\text{MÉDIA}} = \sqrt{1,11039} - 1 = 1,05375 - 1 = 0,05375 \text{ ou } 5,375\%$$

$$\bar{I}_{10/08}^{\text{P EXECUTIVA}} = \frac{850}{1950} = 0,43589 \rightarrow -56,4\%$$

$$TC_{\text{MÉDIA}} = \sqrt{0,43589} - 1 = 0,66023 - 1 = -0,33977 \text{ ou } -33,977\%$$

$$I_{\text{P TOTAL}} = \frac{3910 + 1710 + 850}{2130 + 1540 + 1950} = \frac{6470}{5620} = 1,15725$$

$$TC_{\text{MÉDIA}} = \sqrt{1,15725} - 1 = 1,07296 - 1 = 0,07296 \text{ ou } 7,296\%$$

O crescimento médio de Air Côtico Lisbon foi inferior ao crescimento médio das companhias de AICAV, o que se ficou a dever principalmente à classe "executive" (-33,977%) e, em menor grau, à "primeira" (+5,375%). No caso da classe turística o crescimento médio (+35,487%) foi superior ao das companhias de AICAV.

(1.0) = e)

$$I_{09/08}^P = 0,991 \quad \text{pois} \quad \Delta \text{ anual} = -0,9\%$$

$$I_{10/09}^P = 1,014 \quad \text{pois} \quad \Delta \text{ anual} = +1,4\%$$

logo

$$I_{10/08}^P = I_{10/09}^P \times I_{09/08}^P = 1,014 \times 0,991 = 1,00487$$

$$I_{10/08}^P = 1,005 \quad \text{ou} \quad 100,5$$

Análise em termos reais

Índice de preço calculado em a) i			Evolução Real do preço
	$I_{t/08}^P$	$I_{t/08}^P (INE)$	$I_{t/08}^P / I_{t/08}^P (INE)$
2008	1,00	-	-
2009	1,112	0,991	1,122
2010	1,156	1,005	1,150

Em termos reais os preços da Aze católico Lisboa
subiram 15% de 2008 para 2010
12,2% de 2008 para 2009

$$d) \quad I_{t_0}^P(L) = \frac{\sum_i q_{ti} p_{0i}}{\sum_i q_{0i} p_{0i}} = \sum_i \frac{q_{ti}}{q_{0i}} \times \frac{p_{0i} q_{0i}}{\sum_i p_{0i} q_{0i}} = \sum_i \frac{q_{ti}}{q_{0i}} w(L)_i$$

↓
PONDERADORES
DE LASPEYRES

$$W(L)_{\text{TURISTICA}} = \frac{120 \times 2130}{1073700} = 0,238$$

$$W(L)_{\text{PRIMEIRA}} = \frac{240 \times 1540}{1073700} = 0,344$$

$$W(L)_{\text{EXECUTIVA}} = \frac{230 \times 1950}{1073700} = 0,418$$

1,000

$$I_{10/08}^P(L) = 1,83568 \times 0,238 + 1,11039 \times 0,344 + 0,43589 \times 0,418 =$$

$$= 1,00107 \text{ ou } 100,107$$

NOTA: De 2008 para 2010 não houve praticamente evolução do número global de passageiros.

→ Os rácios $\frac{q_{0i}}{q_{08i}}$ foram calculados em b).

L : CHOCOLATE DE LEITE

P : " PRETO

B : " BRANCO

$$P(L \cap P \cap B) = 0,05$$

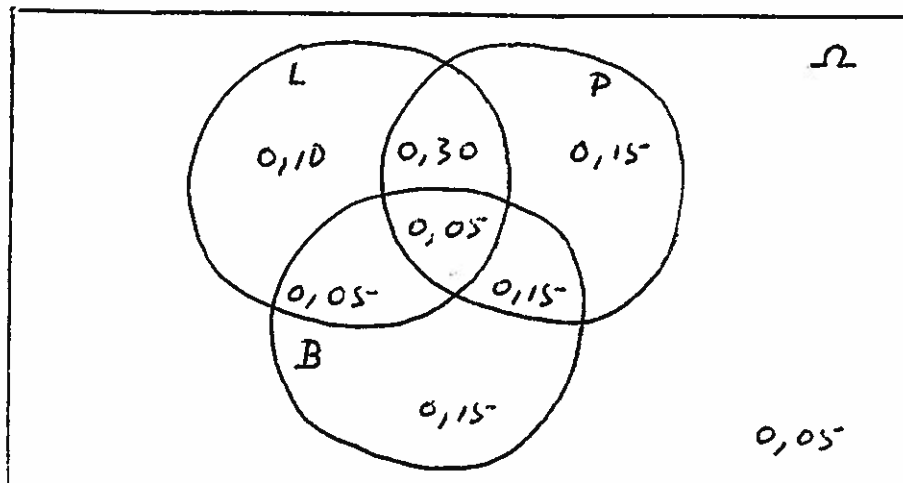
$$P(\bar{L} \cap \bar{P} \cap \bar{B}) = 0,05$$

$$P(L \cap P \cap \bar{B}) = 0,30$$

$$P(B) = 0,40$$

$$a) P(L \cap P \cap B | B) = \frac{P(L \cap P \cap B)}{P(B)} = \frac{0,05}{0,4} = 0,125$$

b) Esta alínea resolve-se melhor desenhando o diagrama de Venn e indo preenchendo y a informação dada:



$$\#(\bar{L} \cap \bar{P} \cap \bar{B}) = 500$$

$$P(\bar{L} \cap \bar{P} \cap \bar{B}) = 0,15$$

$$\# \Omega = \frac{500}{0,15} = 3333,33 \approx 3333$$

$$\begin{cases} P(B) = 0,4 \\ P(B) = P(L \cap P \cap B) + P(L \cap \bar{P} \cap B) + P(\bar{L} \cap P \cap B) + P(\bar{L} \cap \bar{P} \cap B) \Rightarrow \\ P(\bar{L} \cap P \cap B) = 3 P(L \cap \bar{P} \cap B) \end{cases}$$

$$\Rightarrow 0,4 = 0,05 + 0,15 + 4 P(L \cap \bar{P} \cap B) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(L \cap \bar{P} \cap B) = 0,20 / 4 = 0,05$$

$$P(L \cap \bar{P} \cap \bar{B} | L) = 0,20 \Rightarrow \frac{P(L \cap \bar{P} \cap \bar{B})}{P(L \cap \bar{P} \cap \bar{B}) + 0,05 + 0,05 + 0,30} = 0,20 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(L \cap \bar{P} \cap \bar{B}) = 0,20 (0,05 + 0,05 + 0,30) / 0,80 = 0,10$$

$$\text{POR DIFERENÇA: } P(\bar{L} \cap P \cap \bar{B}) = 1 - 0,4 - 0,4 - 0,05 = 0,15$$

c) $P(L \cup P) = 0,80$

$P(L \cup B) = 0,80$

$P(P \cup B) = 0,85$

→ Deve apostar nos chocolates
pretos e brancos.

$P(L) = 0,50$

$P(P) = 0,65$

$P(B) = 0,40$

→ Estes seriam os chocolates
escolhidos, escolhendo os mais especificados.

PRESSUPOSTO: Só se compra um chocolate de cada tipo.

d)

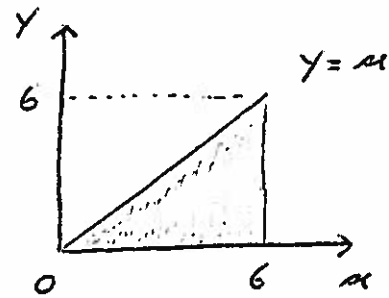
Probabilidade mínima: 15%.

" máxima: 20%.

Porque a soma de todas as probabilidades
não pode ser superior a 100%.

NOTA: Na resposta em teste deve ser
apresentada a justificação analítica.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{18} & \begin{cases} 0 < x < 6 \\ 0 < y < 6 \\ x > y \end{cases} \\ 0 & \text{out. val. de } x, y \end{cases}$$



$$f(y) = \frac{1}{3} - \frac{y}{18}, \quad 0 < y < 6$$

$$E(X) = 4 \quad ; \quad V(X) = 2$$

$$a) \quad f_1(x) = \int_0^x \frac{1}{18} dy = \left[\frac{y}{18} \right]_0^x = \frac{x}{18}, \quad 0 < x < 6$$

$$P(2 < X < 3) = \int_2^3 \frac{x}{18} dx = \left[\frac{x^2}{36} \right]_2^3 = \frac{9}{36} - \frac{4}{36} = \frac{5}{36}$$

$$b) \quad E(Y) = \int_0^6 y \left(\frac{1}{3} - \frac{y}{18} \right) dy = \left[\frac{y^2}{6} - \frac{y^3}{54} \right]_0^6 = 6 - \frac{216}{54} = 6 - 4 = 2$$

$$E(Y^2) = \int_0^6 y^2 \left(\frac{1}{3} - \frac{y}{18} \right) dy = \left[\frac{y^3}{9} - \frac{y^4}{72} \right]_0^6 = \frac{216}{9} - \frac{1296}{72} = 24 - 18 = 6$$

$$V(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 = 6 - 2^2 = 2$$

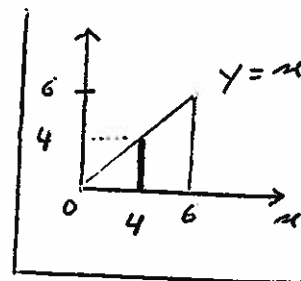
$$Z = 40 Y$$

$$V(Z) = 40^2 V(Y) = 40^2 \times 2 = 1600 \times 2 = 3200$$

$$c) P(Y > 3 | X=4) = ?$$

$$f(Y | X=4) = \frac{f(X=4, Y)}{f_1(X=4)} = \frac{\frac{1}{18}}{\frac{4}{18}} = \frac{1}{4}, \quad 0 < Y < 4$$

$$P(Y > 3 | X=4) = \int_3^4 \frac{1}{4} dy = \left[\frac{y}{4} \right]_3^4 = \frac{4}{4} - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$



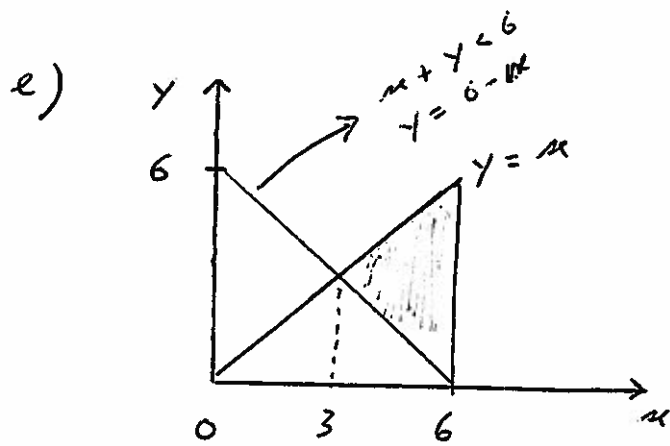
$$d) V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2 \operatorname{cov}(X, Y)$$

$$\operatorname{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

$$E(XY) = \int_0^6 \left[\int_0^x xy \frac{1}{18} dy \right] dx = \int_0^6 \left[\frac{xy^2}{36} \right]_0^x dx =$$

$$= \int_0^6 \frac{x^3}{36} dx = \left[\frac{x^4}{4 \times 36} \right]_0^6 = \frac{6^4}{4 \times 6^2} = \frac{36}{4} = 9$$

$$V(X+Y) = 2 + 4 + 2[9 - 4 \times 2] = 2 + 4 + 2 \times 1 = 8$$



$$P(X + Y > 6) = \int_3^6 \underbrace{\left[\int_{6-x}^x \frac{1}{18} dy \right]}_A dx =$$

$$A = \left[\frac{y}{18} \right]_{6-x}^x = \frac{x}{18} - \frac{6}{18} + \frac{x}{18} = \frac{x}{9} - \frac{1}{3}$$

$$= \int_3^6 \left(\frac{x}{9} - \frac{1}{3} \right) dx = \left[\frac{x^2}{18} - \frac{x}{3} \right]_3^6 = \left(\frac{36}{18} - \frac{6}{3} \right) - \left(\frac{9}{18} - 1 \right) =$$

$$= (2 - 2) - (0,5 - 1) = 0,5$$

LICENCIATURAS EM ECONOMIA E GESTÃO
ESTATÍSTICA I - 1º TESTE - 19 DE OUTUBRO DE 2011

Responda em folhas separadas para cada grupo. Se eventualmente não fizer algum grupo, entregue em branco a folha respectiva devidamente identificada.

Leia cuidadosamente a totalidade de cada grupo antes de o responder.

Explicite todas as hipóteses e os cálculos que tiver de fazer para a resolução dos problemas. Use um mínimo de quatro casas decimais. Os grupos ou as perguntas podem não estar pela ordem em que a matéria foi leccionada. Um grupo pode incluir diferentes matérias.

O teste é constituído por três grupos.

I (6,0 valores)

1. A EMPRESA NIET DISPÕE DA SEGUINTE INFORMAÇÃO SOBRE AS EXPORTAÇÕES DOS SEUS PRODUTOS A, B E C:

Exportações da empresa NIET

	2007		2008		2009	
	P	Q	P	Q	P	Q
A	10	30	11	38	12	35
B	14	40	16	42	17	42
C	20	50	25	55	28	54

Índices de Preços das Exportações, de Paasche

	$I^P(P)$
2004	0,98
2005	1,00
2006	1,05
2007	1,06
2008	-
2009	-

Outra informação: Entre 2005 e 2007 as exportações da empresa cresceram 20% em termos reais.

Responda às questões que se seguem tendo com base a informação precedente.

- Considerando como base o ano de 2008, analise a evolução das quantidades exportadas pela empresa entre 2007 e 2009, utilizando um índice de Laspeyres.
 - Calcule a taxa de crescimento média anual das quantidades exportadas pela empresa entre 2005 e 2009.
 - Complete a série dada de Índices de Preços das Exportação de Paasche [estão em falta os anos de 2008 e 2009]. Os resultados a que chegou serão exactos? Justifique analiticamente.
2. A EMPRESA NIET PERTENCE AO GRUPO TOTT, SGPS

Exportações do Grupo TOTT a preços correntes

2007	65000
2008	77000
2009	80000

O preço das exportações do Grupo TOTT aumentou 3% de 2007 para 2008 e 2% de 2008 para 2009.

Dispondo da informação, acima referida, sobre as Exportações do Grupo TOTT, e da informação/cálculos da parte 1 que possa ser necessária, comente, de forma quantificada, as afirmações:

- Em termos nominais, o crescimento das exportações da NIET, de 2007 para 2009, excedeu o crescimento das exportações do Grupo TOTT.
- Em termos reais o crescimento das exportações do Grupo TOTT teve, entre os mesmos anos 2007 e 2009, uma taxa aproximada de 17%.

II (10,0 valores)

Com base numa amostra de 200 famílias foi feito um estudo que relacionou o rendimento da família com o número de automóveis da família. Os resultados obtidos estão apresentados no quadro abaixo.

		Variável X [rendimento em milhares de euros]				Total
		[0 - 1]] 1 - 2]] 2 - 4]	[4 - 8]	
Variável Y [Nº de automóveis]	0	11	20	24	30	85
	1	6	8	15	14	43
	2	2	6	12	16	36
	3	1	6	9	20	36
	Total	20	40	60	80	

- a) Para a variável X :
- Analise a assimetria através das medidas de localização;
 - Indique a fórmula do coeficiente de assimetria de Pearson [basta indicar a fórmula, não precisa de fazer o cálculo];
 - Compare os procedimentos (i) e (ii) quanto ao que permitem analisar [responda apenas por palavras, máximo de 3 linhas].
- b) (i) Construa a “caixa dos bigodes” para a variável X. (ii) Por palavras indique para que serve este instrumento de análise.
- c) Verifique se a seguinte frase é verdadeira, respondendo de forma quantificada: «10% das famílias (as que têm menor rendimento) recebem menos de 2% do total do rendimento, enquanto que 40% das famílias (as que têm maior rendimento) recebem mais de 60% do total do rendimento».
- d) (i) Compare a média do nº de automóveis das famílias com menor rendimento com a média do nº de automóveis das famílias com maior rendimento. (ii) A partir dos valores encontrados o que pode concluir relativamente à independência entre as duas variáveis [justifique analiticamente].
- e) Compare a dispersão do rendimento com a dispersão do nº de automóveis. Justifique o seu procedimento.
- f) (i) Sabendo que $\sum_i \sum_j x_i y_j F_{ij} = 897,5$ calcule a correlação que existe entre a variável X e a variável Y. (ii) Interprete o resultado encontrado.

III (4,0 valores)

III-1

Considere que Y é o preço de um produto em libras e que X é o preço desse mesmo produto em euros. Sabe-se que $Y=1,1X$ e que a média e o desvio-padrão de X foram, respectivamente, 200 euros e 10 euros.

- a) Calcule a média e o desvio padrão do preço do produto em libras.
- b) Compare, analiticamente, o coeficiente de variação do preço em euros com o coeficiente de variação do preço em libras. Comente o resultado.

III-2

Considere um país em que o rendimento está igualmente distribuído por todos os habitantes.

Questão: Qual é o valor do índice de Gini para esse país? Justifique analiticamente a sua resposta.

III-3

Em Portugal os melhores alunos do ensino secundário recebiam prémios de mérito. O actual governo cancelou a entrega aos alunos desses prémios de mérito.

Considere que 80% da população concorda com os prémios de mérito atribuídos aos melhores alunos do secundário e que 60% da população discorda do cancelamento desses prémios.

Questão: Qual é a probabilidade mínima de uma pessoa, escolhida ao acaso de entre as que concordam com os prémios de mérito, discordar do cancelamento desses prémios.



LICENCIATURAS EM ECONOMIA E GESTÃO

ESTATÍSTICA I

FORMULÁRIO

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_i x_i F_i = \sum_i x_i f_i$$

$$\bar{x} = \sum_i w_i x_i \quad (\text{com } \sum_i w_i = 1)$$

$$\bar{x}_g = \sqrt[n]{x_1^{F_1} \times x_2^{F_2} \times \dots}$$

$$\bar{x}_h = \frac{1}{\frac{1}{n} \sum_i F_i \frac{1}{x_i}} = \frac{1}{\sum_i f_i \frac{1}{x_i}}$$

$$M = l_m + k \times \frac{F_m - F_{m-1}}{(F_m - F_{m+1}) + (F_m - F_{m-1})}$$

$$M_e = l_{m_e} + k_{m_e} \frac{0,5 - s(l_{m_e})}{s(L_{m_e}) - s(l_{m_e})}$$

$$Q_l = l_l + k_l \frac{0,25 - s(l_l)}{s(L_l) - s(l_l)}$$

$$Q_m = l_m + k_m \frac{0,75 - s(l_m)}{s(L_m) - s(l_m)}$$

$$IV = \max_{x_i} \{x_i\} - \min_{x_i} \{x_i\}$$

$$IIQ = Q_m - Q_l$$

$$DAM_x = \frac{1}{n} \sum_i F_i |x_i - \bar{x}| = \sum_i f_i |x_i - \bar{x}|$$

$$s_x^2 = \frac{1}{n} \sum_i F_i (x_i - \bar{x})^2 = \sum_i f_i (x_i - \bar{x})^2 = \sum_i f_i x_i^2 - \bar{x}^2$$

$$s_x = +\sqrt{s_x^2}$$

$$C_v = \frac{s_x}{\bar{x}} \times 100$$

$$CA_p = \frac{\bar{X} - M_e}{s}$$

$$CA_b = \frac{Q_3 + Q_1 - 2M_e}{Q_3 - Q_1}$$

$$K_{Fisher} = \frac{\sum_{i=1}^m (x_i - \bar{X})^4 F_i / n}{\left[\sum_{i=1}^m (x_i - \bar{X})^2 F_i / n \right]^2}$$

$$K = \frac{Q_3 - Q_1}{2(P_{90} - P_{10})}$$

$$IG = 1 - \sum_{j=1}^m (q_j + q_{j-1}) \times (p_j - p_{j-1})$$

$$F_i^{(x)} = F_i(X = x_i) = \sum_j F_{ij}$$

$$F_j^{(y)} = F_j(Y = y_j) = \sum_i F_{ij}$$

$$f(y_j | x_i) = \frac{F(x_i, y_j)}{F_i^{(x)}} = \frac{f(x_i, y_j)}{f_i^{(x)}}$$

$$f(x_i | y_j) = \frac{F(x_i, y_j)}{F_j^{(y)}} = \frac{f(x_i, y_j)}{f_j^{(y)}}$$

$$COV(X, Y) = \frac{1}{n} \sum_k (x_k - \bar{x})(y_k - \bar{y}) = \frac{1}{n} \sum_k x_k y_k - \bar{x} \bar{y}$$

$$COV(X, Y) = \frac{1}{n} \sum_i \sum_j F_{ij} (x_i - \bar{X})(y_j - \bar{Y}) = \sum_i \sum_j f_{ij} (x_i - \bar{x})(y_j - \bar{y}) = \sum_i \sum_j (x_i y_j f_{ij}) - \bar{x} \bar{y}$$

$$r(X, Y) = \frac{COV(X, Y)}{s_x s_y}$$

Nota: As fórmulas abaixo têm 100 como referência para o ano base.

$$I_{i/0}^{(p)} = \frac{P_i}{P_0} \times 100 \quad I_{i/0}^{(q)} = \frac{q_i}{q_0} \times 100 \quad I_{i/0}^{(v)} = \frac{P_i q_i}{P_0 q_0} \times 100 \quad I_{i/0}^{(p)} = \frac{\sum_{i=1}^n P_{0i}}{\sum_{i=1}^n P_{0i}} \times 100$$

$$I_{(i/0)}^{(p)} = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n \frac{P_{0i}}{P_{0i}} \right) \times 100$$

$$I_{i/0}^{(q)} = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n \frac{q_{0i}}{q_{0i}} \right) \times 100$$

$$I_{(i/0)}^{(p)} = \left(\sum_{i=1}^n \frac{P_{0i}}{P_{0i}} \times w_i \right) \times 100$$

$$I_{i/0}^{(q)} = \left(\sum_{i=1}^n \frac{q_{0i}}{q_{0i}} \times w_i \right) \times 100$$

$$I_{i/0}^{(p)}(L) = \frac{\sum_{i=1}^n P_{0i} q_{0i}}{\sum_{i=1}^n P_{0i} q_{0i}} \times 100$$

$$I_{i/0}^{(q)}(L) = \frac{\sum_{i=1}^n P_{0i} q_{0i}}{\sum_{i=1}^n P_{0i} q_{0i}} \times 100;$$

$$I_{i/0}^{(p)}(P) = \frac{\sum_{i=1}^n P_{0i} q_{0i}}{\sum_{i=1}^n P_{0i} q_{0i}} \times 100$$

$$I_{i/0}^{(q)}(P) = \frac{\sum_{i=1}^n P_{0i} q_{0i}}{\sum_{i=1}^n P_{0i} q_{0i}} \times 100$$

$$I_{i/0}(F) = \sqrt{I_{i/0}(L) \times I_{i/0}(P)}$$

Nota: o formulário não esgota todos os tratamentos estatísticos possíveis.

I

$$a) I_{t/o}^q(L) = \frac{\sum_i q_{ti} p_{oi}}{\sum_i q_{oi} p_{oi}} = \frac{\sum_i p_{oi} q_{ti}}{\sum_i p_{oi} q_{oi}} = \frac{\sum_i p_{oi} q_{ti}}{\sum_i p_{oi} q_{oi}}$$

$$\sum p_{oi} q_{oi} = 11 \times 38 + 16 \times 42 + 25 \times 55 = 2465$$

$$I_{07/08}^q = \frac{11 \times 30 + 16 \times 40 + 25 \times 50}{2465} = \frac{2220}{2465} = 0,9006 \text{ ou } 90,06$$

$$I_{08/08}^q = \frac{2465}{2465} = 1 \text{ ou } 100$$

$$I_{09/08}^q = \frac{11 \times 35 + 16 \times 42 + 25 \times 54}{2465} = \frac{2407}{2465} = 0,9765 \text{ ou } 97,65$$

As quantidades exportadas subiram de 2007 para 2008 e
diminuíram de 2008 para 2009 [quantificar].

b)

2005	2006	2007	2008	2009
↗		↗		
1,20 (enumerado)		0,9765 / 0,9006 = 1,0843 (calculado em a)		
↗				
1,20 × 1,0843 = 1,30116				

$$\text{Crescimento médio} = \sqrt[4]{1,30116} = 1,0680$$

Taxa média de crescimento: 6,80%

$$c) \quad I^P(p) = \frac{\sum p_i q_i}{\sum p_{07i} q_{07i}}$$

$$I^P_{07/07} = 1 \text{ ou } 100$$

$$I^P_{08/07} = \frac{11 \times 38 + 16 \times 42 + 25 \times 55}{10 \times 38 + 14 \times 42 + 20 \times 55} = \frac{2465}{2068} = 1,19197$$

$$I^P_{09/07} = \frac{12 \times 35 + 17 \times 42 + 28 \times 54}{10 \times 35 + 14 \times 42 + 20 \times 54} = \frac{2646}{2018} = 1,3112$$

	$I^P(p)$ t/05	$I^P(p)$ 07
2004	0,98	
2005	1,00	
2006	1,05	
2007	1,06	1,00
2008	1,2635	1,19197
2009	1,3899	1,3112

$$I^P_{08/05} = \frac{1,19197}{1} \times 1,06 = 1,2635$$

$$I^P_{09/05} = I^P_{08/05} \times \frac{1,3112}{1,19197} = 1,2635 \times \frac{1,3112}{1,19197} = 1,3899$$

$$\text{ou } \frac{1,3112}{1} \times 1,06 = 1,3899$$

Os resultados não são exatos porque o índice de Paasche não é circular.

justificação analítica:

exemplo:

$$I'_{08/05}(P) = I'_{07/05}(P) \times I'_{08/07}(P) \quad ?$$

$$I'_{08/05}(P) = \frac{\sum P_{08} q_{08}}{\sum P_{05} q_{08}}$$

$$I'_{07/05}(P) \times I'_{08/07}(P) = \frac{\sum P_{07} q_{08}}{\sum P_{05} q_{07}} \times \frac{\sum P_{08} q_{08}}{\sum P_{07} q_{08}}$$

Estas duas expressões são diferentes, o que mostra que o índice não é circular.

$$d) I_{09/07}^{V \text{ NIET}} = \frac{\sum p_{09} q_{09}}{\sum p_{07} q_{07}} = \frac{2646}{10 \times 30 + 14 \times 40 + 20 \times 50} =$$

$$= \frac{2646}{1860} = 1,4226$$

$$I_{09/07}^{V \text{ TOT}} = \frac{80000}{65000} = 1,2308$$

A afirmação é verdadeira: o crescimento das exportações de NIET foi superior ao do grupo TOT.

$$e) I_{09/07}^{q \text{ NIET}} = 1,3112 \quad (\text{alínea a)})$$

Exportações do grupo TOT, de 2009 - preços de 2007

$$X_{2009}^{P2007} = \frac{80000}{1,03 \times 1,02} = \frac{80000}{1,0506} = 76146,9636$$

$$I_{09/07}^{q \text{ TOT}} = \frac{76146,9636}{65000} = 1,1715$$

Taxa de crescimento foi de 17,15%. ✓

A afirmação é verdadeira: o crescimento das exportações do grupo TOT foi de aproximadamente 17%.

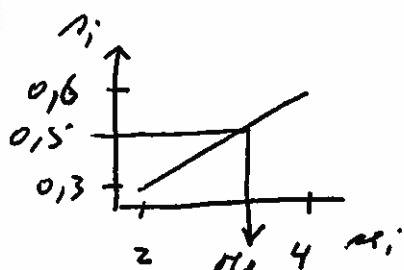
II

CLASSE	x_i	F_i	K_i	F_i/K_i	$x_i \cdot F_i$	$p_i = P_i$	$\sum_{j=1}^i x_j \cdot F_j$	q_i	$x_i^2 \cdot F_i$
0-1	0,5	20	1	20	10	0,1	10	0,0137	5
1-2	1,5	40	1	40	60	0,3	70	0,0959	90
2-4	3	60	2	30	180	0,6	250	0,3425	540
4-8	6	80	4	20	480	1,0	730	1,000	2880
		$n=200$			730				3515

$$a) i) \bar{X} = \frac{\sum x_i \cdot F_i}{n} = \frac{730}{200} = 3,65$$

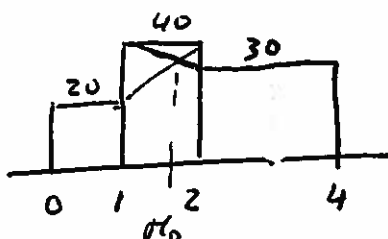
Também se pode calcular

$$\frac{\sum (x_i - \bar{X})^2 F_i}{n}$$



$$\frac{0,6 - 0,3}{4 - 2} = \frac{0,5 - 0,3}{x_2 - 2} \quad (\Rightarrow) \quad \frac{0,3}{2} = \frac{0,2}{x_2 - 2} \quad (\Rightarrow)$$

$$(\Rightarrow) x_2 = \frac{0,4}{0,3} + 2 = 3,3333$$



$$\frac{40 - 30}{2 - x_0} = \frac{40 - 20}{x_0 - 1} \quad (\Rightarrow) \quad \frac{10}{2 - x_0} = \frac{20}{x_0 - 1} \quad (\Rightarrow)$$

$$(\Rightarrow) \frac{x_0 - 1}{2 - x_0} = 2 \quad (\Rightarrow) \quad x_0 - 1 = 4 - 2x_0 \quad (\Rightarrow)$$

$$(\Rightarrow) 3x_0 = 5 \quad (\Rightarrow) \quad x_0 = 1,6667$$

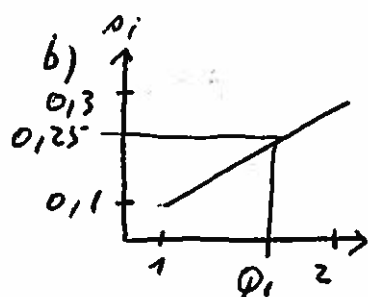
$x_0 < x_2 < \bar{X} \Rightarrow$ Assimetria positiva ou enviesamento à esquerda.

ii) $CA_p = \frac{\bar{X} - H}{S}$ só era pedido a fórmula. $CA_p = \frac{3,65 - 1,6667}{2,0622} = 0,9617$

$$S_x^2 = \frac{\sum x_i^2 \cdot F_i}{n} - \bar{X}^2 = \frac{3515}{200} - 3,65^2 = 17,575 - 13,3225 = 4,2525$$

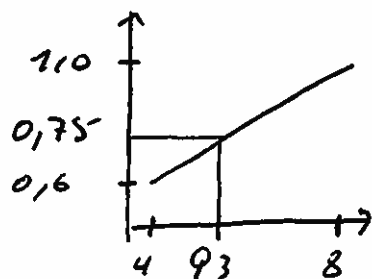
$$S_x = \sqrt{4,2525} = 2,0622$$

iii) Com o procedimento i) podemos ver o sentido da assimetria. Com o procedimento ii) podemos ver o sentido e a intensidade, permitindo comparações entre variáveis.



$$\frac{0,3 - 0,1}{2 - 1} = \frac{0,25 - 0,1}{q_1 - 1} \quad (\Rightarrow) 0,2 = \frac{0,15}{q_1 - 1} \quad (\Rightarrow)$$

$$(\Rightarrow) q_1 = \frac{0,15}{0,2} + 1 = 1,75$$



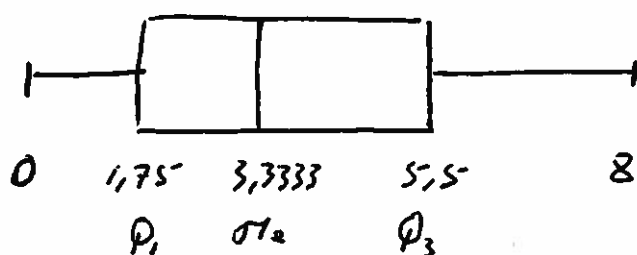
$$\frac{1 - 0,6}{8 - 4} = \frac{0,75 - 0,6}{q_3 - 4} \quad (\Rightarrow) 0,1 = \frac{0,15}{q_3 - 4} \quad (\Rightarrow)$$

$$(\Rightarrow) q_3 = \frac{0,15}{0,10} + 4 = 5,5$$

$$(q_3 - q_1) \times 1,5 = (5,5 - 1,75) \times 1,5 = 3,75 \times 1,5 = 5,625$$

$$1,75 - 5,625 = -3,875 \quad \longrightarrow 0 \text{ } p_9 \text{ e' o limite inferior do dom\u00ednio.}$$

$$5,5 + 5,625 = 11,125 \quad \longrightarrow 8 \text{ } p_9 \text{ e' o limite superior do dom\u00ednio}$$



- ii) A caixa dos bigodes permite visualizar:
- os dados como um todo
 - as observações centrais (intervalo interquartil)
 - a assimetria
 - a dispersão
 - os valores extremos caso existam.

e) A comparação tem de ser feita com base no coeficiente de variação, pois trata-se de fenómenos diferentes, cujas de expressões em unidades diferentes.

$$S_x = 2,0622$$

$$\bar{x} = 3,65$$

→ cálculo podia ser feito nesta alínea.

a)

$$CV_x = \frac{2,0622}{3,65} = 0,56498 \text{ ou}$$

$$56,498\%$$

$$\bar{y} = \frac{0 \times 85 + 1 \times 43 + 2 \times 36 + 3 \times 36}{200} = \frac{223}{200} = 1,115$$

$$S_y^2 = \frac{0^2 \times 85 + 1^2 \times 43 + 2^2 \times 36 + 3^2 \times 36}{200} = 1,115^2 =$$

$$= \frac{511}{200} - 1,243225 = 1,31775$$

$$\underline{2,555}$$

$$CV_y = \frac{\sqrt{1,31775}}{1,115} = \frac{1,14532}{1,115} = 1,0272 \text{ ou } 102,72\%$$

A dispersão relativa do n.º de automóveis é maior do que a dispersão relativa do rendimento.

$$b) i) r = \frac{COV(X, Y)}{S_x S_y}$$

$$COV(X, Y) = \frac{\sum_i \sum_j x_i y_j \cdot F_{ij} - \bar{X} \bar{Y}}{S_x S_y} =$$

$$\frac{\frac{897,5}{200} - 3,65 \times 1,15}{2,0622 \times 1,14532} =$$

$$= \frac{4,4875 - 4,06975}{2,361878} = \frac{0,41775}{2,361878} = 0,1769$$

ii) A correlação é positiva, ou seja, as variáveis evoluem no mesmo sentido.

A correlação é fraca.

O mais importante nesta alínea era compreender a correlação e interpretá-la, uma vez que os desvios-padrões já haviam sido calculados na alínea anterior.

III - 1

$$a) \quad Y = aX \rightarrow \bar{Y} = a\bar{X} \quad \text{e} \quad S_y^2 = a^2 S_x^2$$

$$Y = 1,1X \quad \bar{Y} = 1,1\bar{X} = 1,1 \times 200 = 220$$

$$S_x^2 = 10^2 = 100$$

$$S_y^2 = 1,1^2 S_x^2 = 1,21 \times 100 = 121$$

$$S_y = 11$$

$$b) \quad CV_y = \frac{\sqrt{a^2 S_x^2}}{a\bar{X}} = \frac{a S_x}{a\bar{X}} = \frac{S_x}{\bar{X}} = CV_x \rightarrow CV_y = CV_x$$

[PEDIR-SE COMPARAÇÃO ANALÍTICA]

Podemos ver que o CV não é afectado pelas unidades em que o fenómeno está expresso. Daí a sua importância. É a comparação da dispersão de variáveis expressas em escalas diferentes.

III - 2

11/11

$\sum x_i F_i$ é o total do rendimento.

$$\sum a F_i = \sum x_i F_i \Leftrightarrow a \sum F_i = \sum x_i F_i \Leftrightarrow a n = \sum x_i F_i \quad (*)$$

$$(*) \Rightarrow a = \frac{\sum x_i F_i}{n} = \bar{x} \quad \text{Cada pessoa recebe o rendimento médio para que este esteja igualmente distribuído.}$$

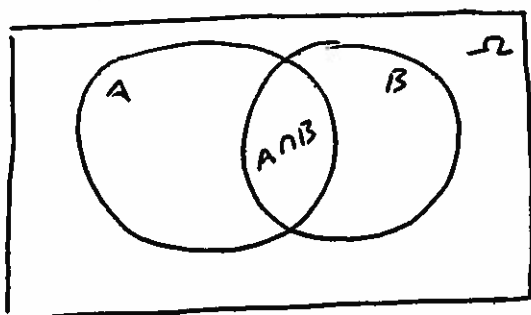
$$p_i = \frac{\sum_{j=1}^i F_j}{\sum F_j} = \sum_{j=1}^i f_j$$

$$q_i = \frac{\sum_{j=1}^i x_j F_j}{\sum x_j F_j} = \frac{\sum_{j=1}^i \bar{x} F_j}{\bar{x} \sum F_j} = \frac{\bar{x} \sum_{j=1}^i F_j}{\bar{x} \sum F_j} = \sum_{j=1}^i f_j = p_i$$

TODOS RECEBEM O MESMO, QUE É \bar{x}

Com igual distribuição do rendimento todos recebem \bar{x} e portanto $p_i = q_i$, pelo que I.G. = 0.

III - 3



A: População que concorda com os prémios de mérito

B: População que discorda do lançamento dos prémios.

Ω : Toda a população.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \leq 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0,80 + 0,60 - P(A \cap B) \leq 1 \Leftrightarrow -P(A \cap B) \leq -0,4 \Leftrightarrow$$

$$(*) \Rightarrow P(A \cap B) \geq 0,4$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0,4 \text{ ou mais}}{0,8} \geq 0,5$$

LICENCIATURAS EM ECONOMIA E GESTÃO
ESTATÍSTICA I - 2º TESTE - 5 DE JANEIRO DE 2012

Responda em folhas separadas para cada grupo. Se eventualmente não fizer algum grupo, entregue em branco a folha respectiva devidamente identificada.

Leia cuidadosamente a totalidade de cada grupo antes de o responder. Sempre que o enquadramento teórico o permite dê respostas mais simples.

Explicite todas as hipóteses e os cálculos que tiver de fazer para a resolução dos problemas. Use um mínimo de quatro casas decimais. Os grupos ou as perguntas podem não estar pela ordem em que a matéria foi leccionada. Um grupo pode incluir diferentes matérias.

O teste é constituído por três grupos.

I (7,0 valores)

[Os subgrupos I-1 e I-2 são independentes quanto à sua resolução; resolva o subgrupo I-2 sem considerar a informação do subgrupo I-1]

I-1

Os copos produzidos pela fábrica de uma empresa podem ter 0, 1 ou 2 defeitos com probabilidades 0,65 , 0,20 e 0,15 respectivamente. O director de produção resolveu implementar na fábrica um sistema de verificação automática da qualidade dos copos com os seguintes resultados: se um copo tiver 0 defeitos é sempre aprovado, se tiver 1 defeito é aprovado em 80% dos casos e se tiver 2 defeitos é aprovado em 10% dos casos. Os copos aprovados seguem para as lojas e os outros são destruídos.

Sabe-se ainda que a probabilidade de um copo se partir no trajecto da fábrica para as lojas é de 1% quando o copo não tem defeitos, sendo esse valor de 4% e 6% quando tem 1 defeito ou 2 defeitos, respectivamente.

- a) Um copo foi aprovado. Qual a probabilidade de ter 2 defeitos?
- b) Um copo chegou à loja partido. Qual a probabilidade de ter 1 ou mais defeitos?
- c) Os copos que têm dois defeitos, enviados para as lojas, são depois substituídos. Quantos copos são substituídos em média num carregamento com 10 000 copos?

I-2

A fábrica de uma empresa produz copos que podem ter 0, 1 ou 2 defeitos com probabilidades 0,65 , 0,20 e 0,15 respectivamente. O director de marketing considerou que vender copos com 2 defeitos prejudica a imagem da empresa e por isso instalou um sistema de verificação manual da qualidade dos copos, quando estes são enviados para as lojas, o qual substitui os copos com 2 defeitos por copos perfeitos.

Considere o envio de um copo para a loja. Seja X o “nº de defeitos do copo desse envio antes da inspecção manual” e Y o “nº de defeitos do copo desse envio após a inspecção manual”:

- a) Através da função geradora de momentos calcule o valor esperado e a variância de X .
- b) Determine a função de probabilidade conjunta $f(x,y)$ e a função de distribuição ou de probabilidade acumulada $F(x,y)$; através desta última calcule a probabilidade de ter um defeito antes e depois da verificação manual.
- c) Suponha que compra um copo sem defeitos. Qual a probabilidade de que tenha havido substituição?
- d) Verifique se X e Y são independentes, através da sua covariância.

II (5,0 valores)

Uma empresa de maquinaria acabou de desenvolver o seu novo produto: Cobbas. Devido ao elevado custo de produção da máquina, a Direcção da empresa decidiu fazer um estudo com estimativas da procura para os Mercados M1 e M2. O estudo para o mercado M1 apresentou os seguintes resultados:

x [quantidade procurada]	0	1	2	3	4
$f(x)$	0,25	0,15	0,10	0,35	0,15

Para o mercado M2 o estudo apresentou apenas as seguintes informações sobre a procura:

- O pior cenário para a empresa é não haver procura para o seu novo produto, sendo o melhor cenário a procura igualar 5 unidades.
- A probabilidade de a procura igualar 0 unidades é igual à probabilidade de igualar 1 unidade. A mesma relação verifica-se entre a probabilidade da procura de 3 unidades e a de 4 unidades, sendo que estas são a metade das anteriores [ou seja de 0 e 1].
- A probabilidade de a procura ser 2 unidades é 3 vezes superior à de 5 unidades, sendo esta igual a 10%.

- a) Construa a função probabilidade da v.a. Y : "nº de unidades procuradas do produto Cobbas no mercado M2".

Nota: Se não conseguir construir esta função de probabilidade considere para as outras alíneas uma função uniforme, ou seja, com probabilidade igual para todas as quantidades procuradas no mercado M2.

- b) A Direcção da empresa está preocupada com a variabilidade da procura deste produto. Com qual dos dois mercados deve estar mais preocupada?
- c) As quantidades procuradas nos dois mercados são independentes. No entanto a empresa usa como indicador da visibilidade do produto a variável $Z=0,1XY$. Calcule o valor esperado da variável Z .

A empresa poderá fazer uma campanha de publicidade no mercado M1 que fará com que a procura neste mercado seja sempre superior a uma unidade. Para isso terá de realizar um investimento de A u.m. [unidades monetárias].

Para esta decisão sabe-se ainda que:

- No mercado M1 o preço unitário é de 1500 u.m. [unidades monetárias]. Este preço não varia com a realização ou não da campanha de publicidade;
 - O custo de armazenagem é de 1000 u.m. por produto no mercado M1;
 - A empresa decidiu produzir 2 unidades do produto para o mercado M1.
- d) Com base no lucro esperado e na informação acima, qual o valor máximo de A que a empresa deverá pagar para que esta campanha de publicidade no mercado M1 seja compensadora?

III (8,0 valores)

[Os subgrupos III-1, III-2 e III-3 são independentes quanto à sua resolução]

Maria é dona de uma mercearia que ainda vende os seus produtos a peso. Ela decidiu estudar o comportamento das suas vendas e necessita da sua ajuda:

III-1. Sendo X a quantidade de café (em kg) e Y a quantidade de chá (em kg) vendidas por dia, sabe-se que:

$$f(x) = x/2 \quad \text{para } 0 < X < k$$

$$f(y) = y^3 / 4 \quad \text{para } 0 < Y < 2$$

As vendas de café são independentes das vendas de chá

- Calcule o montante máximo de café que a Maria consegue vender por dia
- Qual a probabilidade de a Maria não conseguir vender mais de 1 kg de café por dia?
- Determine a função densidade de probabilidade conjunta $f(x,y)$.

III-2. Sendo X a quantidade de feijão (em kg) e Y a quantidade de grão (em kg) vendidas por dia, sabe-se que:

$$f(x,y) = 4xy \quad \text{para } 0 < x < 1 ; 0 < Y < 1$$

O preço do kg de feijão é 3 euros e o preço do kg do grão é 2 euros

- Calcule a probabilidade da quantidade vendida de feijão ser mais do dobro da quantidade vendida de grão.
- Calcule o Valor Esperado da receita total diária obtida com as vendas de feijão e grão.

III-3. Sendo X a quantidade de nozes (em kg) e Y a quantidade de pinhões (em kg) vendidas por dia, sabe-se que:

$$f(x,y) = \frac{1}{2}$$

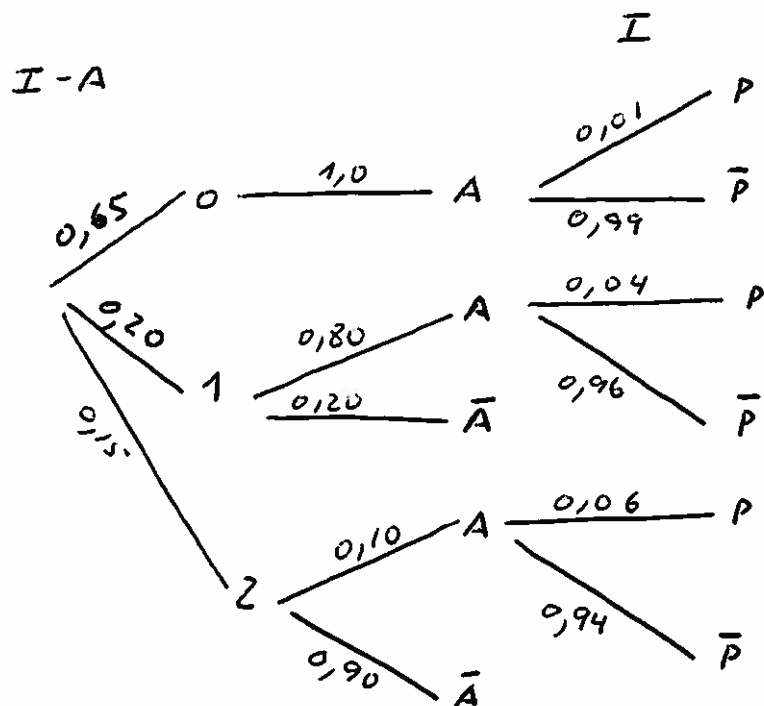
O total de nozes e pinhões vendidos por dia nunca ultrapassa os dois kg

Em média vendem-se por dia $4/6$ kg de nozes e $4/6$ kg de pinhões.

$$f(x) = 1 - \frac{1}{2}x \quad \text{para } 0 < X < 2$$

$$f(y) = 1 - \frac{1}{2}y \quad \text{para } 0 < Y < 2$$

- Calcule a $COV(X,Y)$ e a partir dela verifique qual o tipo de relação existente entre as quantidades vendidas de nozes e pinhões.
- Calcule a Função Distribuição $F(x,y)$ e a partir dela calcule $P(X < 1, Y < 1)$.
- Num dia em que vende 1kg de pinhões qual a probabilidade de vender mais de 0,5 kg de nozes?



$$a) P(2|A) = \frac{P(2 \cap A)}{P(A)} = \frac{0,15 \times 0,10}{0,65 \times 1 + 0,2 \times 0,8 + 0,15 \times 0,10} =$$

$$= \frac{0,015}{0,65 + 0,16 + 0,015} = \frac{0,015}{0,825} = 0,0182$$

$$b) P(P) = 0,65 \times 1 \times 0,01 + 0,20 \times 0,80 \times 0,04 + 0,15 \times 0,10 \times 0,06 =$$

$$= 0,0065 + 0,0064 + 0,0009 = 0,0138$$

$$P(1 \text{ ou } 2 \text{ defeitos} | P) = \frac{0,0064 + 0,0009}{0,0138} = \frac{0,0073}{0,0138} = 0,5290$$

$$c) P(A \cap 0) = 0,65 \times 1 = 0,65$$

$$P(A \cap 1) = 0,20 \times 0,8 = 0,16$$

$$P(A \cap 2) = 0,15 \times 0,1 = 0,015$$

$$\hline 0,825$$

valores em a)

$$N: \text{substituições} = \frac{0,015}{0,825} \times 10000 = 0,0182 \times 10000 =$$

$$= 182 \text{ copias}$$

I

I-B

$$a) f(x) = \begin{cases} 0,65 & , x=0 \\ 0,20 & , x=1 \\ 0,15 & , x=2 \\ 0 & \text{out. val. de } x \end{cases}$$

NOTA: É possível resolver com os valores calculados em I-A.

$$H_x(t) = E[e^{tx}] = \sum_x e^{tx} f(x) = e^{t \times 0} \times 0,65 + e^{t \times 1} \times 0,2 + e^{t \times 2} \times 0,15 =$$

$$= 0,65 + 0,2 e^t + 0,15 e^{2t}$$

$$H'_x(t) = 0,2 e^t + 0,30 e^{2t}$$

$$H'_x(t=0) = 0,2 + 0,30 = 0,5 = \mu$$

$$H''_x(t) = 0,2 e^t + 0,60 e^{2t}$$

$$H''_x(t=0) = 0,2 + 0,60 = 0,8 = E(X^2) = \mu_2$$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 0,8 - 0,5^2 = 0,8 - 0,25 = 0,55$$

$$f(x|A) = \begin{cases} 0,7879 & , x=0 \\ 0,1939 & , x=1 \\ 0,0182 & , x=2 \\ 0 & \text{out. val. de } x \end{cases}$$

$f(x,y)$	Y		$f_1(x)$	
	0	1		
X	0	0,65	0	0,65
	1	0	0,20	0,20
	2	0,15	0	0,15
$f_2(y)$	0,80	0,20	1	

$F(x,y)$	Y		$F_1(x)$	
	0	1		
X	0	0,65	0,65	0,65
	1	0,65	0,85	0,85
	2	0,80	1	1
$F_2(y)$	0,80	1		

$$c) P(X=2 | Y=0) = 0,15/0,80 = 0,1875$$

$$P(0 < X \leq 1; 0 < Y \leq 1) =$$

$$= F(1,1) - F(1,2) - F(2,1) + F(0,0) =$$

$$= 0,85 - 0,65 - 0,15 + 0,65 =$$

$$= 0,20$$

$$d) \text{COV}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

$$E(XY) = 1 \times 1 \times 0,20 = 0,20$$

$$E(X) = 0 \times 0,65 + 1 \times 0,20 + 2 \times 0,15 = 0,5$$

$$E(Y) = 0 \times 0,80 + 1 \times 0,20 = 0,20$$

$$\text{COV}(X,Y) = 0,20 - 0,5 \times 0,20 = 0,20 - 0,10 = 0,10$$

X e Y não são independentes.

II

a)

Y	0	1	2	3	4	5
$f(Y)$	α	α	0,3	$\frac{\alpha}{2}$	$\frac{\alpha}{2}$	0,1
	0,2	0,2	0,3	0,1	0,1	0,1

$$\alpha + \alpha + 0,3 + \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} + 0,1 = 1 \quad (=)$$

$$(=) 2\alpha + 0,3 + \alpha + 0,1 = 1 \quad (=) 3\alpha = 0,6 \quad (=) \alpha = 0,2$$

b)

$$E(X) = 0 \times 0,25 + 1 \times 0,15 + 2 \times 0,10 + 3 \times 0,35 + 4 \times 0,15 =$$

$$= 0 + 0,15 + 0,20 + 1,05 + 0,60 = 2,0$$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

$$E(X^2) = 0^2 \times 0,25 + 1^2 \times 0,15 + 2^2 \times 0,10 + 3^2 \times 0,35 + 4^2 \times 0,15 =$$

$$= 0 + 0,15 + 0,40 + 3,15 + 2,4 = 6,1 \quad \left| \quad CV_x = \frac{\sqrt{2,1}}{2} = 0,7246 \right.$$

$$V(X) = 6,1 - 2,0^2 = 2,1$$

$$E(Y) = 0 \times 0,20 + 1 \times 0,20 + 2 \times 0,3 + 3 \times 0,1 + 4 \times 0,1 + 5 \times 0,1 =$$

$$= 0 + 0,20 + 0,6 + 0,3 + 0,4 + 0,5 = 2,0$$

$$E(Y^2) = 0^2 \times 0,2 + 1^2 \times 0,2 + 2^2 \times 0,3 + 3^2 \times 0,1 + 4^2 \times 0,1 + 5^2 \times 0,1 =$$

$$= 0 + 0,2 + 1,2 + 0,9 + 1,6 + 2,5 = 6,4$$

$$V(Y) = 6,4 - 2^2 = 2,4$$

$$\left| \quad CV_Y = \frac{\sqrt{2,4}}{2} = 0,7746 \right.$$

O mercado H_2 tem mais variabilidade.

c)

$$Z = 0,1 \times X \times Y$$

$$E(Z) = 0,1 E(XY) = 0,1 E(X) E(Y)$$

we use for X, Y are independent.

$$E(Z) = 0,1 \times 2,0 \times 2,0 = 0,4$$

d) Com campanha vende as duas cidades e tem o custo da publicidade:

$$\text{Ganho} = 2 \times 1500 - A = 3000 - A$$

sem campanha:

Prova	P	Quantidade vendida	Vendas	Custo Anúncio	Luro	Luro Esperado
0	.25	0	0	-2000	-2000	-500
1	.15	1	1500	-1000	500	75
2	.10	2	3000	0	3000	300
3	.35	2	3000	0	3000	1050
4	.15	2	3000	0	3000	450
						<hr/> 1375

$$3000 - A > 1375 \Leftrightarrow A < 3000 - 1375 = 1625 \text{ u.m.}$$

FOI CONSIDERADAS OUTRAS FORMAS DE INTERPRETAÇÃO.

A resolução consiste apenas sempre pelo cálculo do lucro esperado sem campanha.

$$\text{III-1} \quad f(x) = \frac{x}{2}, \quad 0 < x < K$$

$$f(y) = \frac{y^3}{4}, \quad 0 < y < 2$$

x e y são independentes

$$a) \int_0^K f(x) dx = \int_0^K \frac{x}{2} dx = \left[\frac{x^2}{4} \right]_0^K = \frac{K^2}{4}$$

$$\frac{K^2}{4} = 1 \Leftrightarrow K = \cancel{-2} \vee K = 2 \quad \text{para cumprir}$$

$$1) \int_0^K f(x) dx = 1$$

$$2) f(x) \geq 0$$

$$b) P(X < 1) = \int_0^1 \frac{x}{2} dx = \left[\frac{x^2}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{4} = 0,25$$

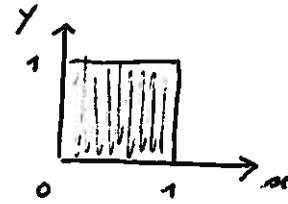
$$c) f(x, y) = f(x) f(y) \text{ porque } x \text{ e } y \text{ são independentes}$$

$$= \frac{x}{2} \times \frac{y^3}{4} = \frac{xy^3}{8}, \quad \begin{matrix} 0 < x < 2 \\ 0 < y < 2 \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} \text{nota:} \quad \int_0^K \left[\int_0^2 f(x, y) dy \right] dx &= \int_0^2 \left[\int_0^2 \frac{xy^3}{8} dy \right] dx = \\ &= \int_0^2 \left[\frac{xy^4}{32} \right]_0^2 dx = \int_0^2 \frac{x}{2} dx = \left[\frac{x^2}{4} \right]_0^2 = \frac{4}{4} = 1 \end{aligned}$$

III-2

$$f(x, y) = \begin{cases} 4xy & , 0 < x < 1 \\ & 0 < y < 1 \\ 0 & \text{out. vnl. } x, y \end{cases}$$



a) $E(3X + 2Y) = 3E(X) + 2E(Y)$

nota:

$$\int_0^1 \left[\int_0^1 4xy \, dy \right] dx = \int_0^1 \left[2xy^2 \right]_0^1 dx = \int_0^1 2x \, dx = \left[x^2 \right]_0^1 = 1$$

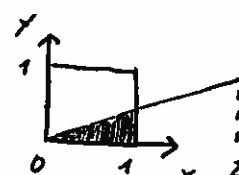
$$f(x) = \int_{D_y} f(x, y) \, dy = \int_0^1 4xy \, dy = \left[2xy^2 \right]_0^1 = 2x, \quad 0 < x < 1$$

$$E(X) = \int_{D_x} x f(x) \, dx = \int_0^1 x \cdot 2x \, dx = \left[\frac{2x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

$$f(y) = \int_{D_x} f(x, y) \, dx = \int_0^1 4xy \, dx = \left[2x^2 y \right]_0^1 = 2y, \quad 0 < y < 1$$

$$E(Y) = \int_{D_y} y f(y) \, dy = \int_0^1 y \cdot 2y \, dy = \left[\frac{2y^3}{3} \right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

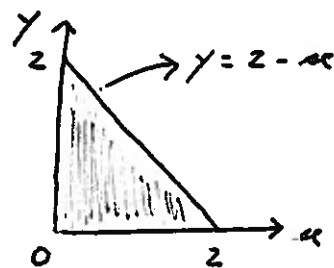
$$E(3X + 2Y) = 3E(X) + 2E(Y) = 3 \times \frac{2}{3} + 2 \times \frac{2}{3} = \frac{6}{3} + \frac{4}{3} = \frac{10}{3}$$

b)  $P(X > 2Y) \rightarrow X = 2Y \Leftrightarrow Y = \frac{X}{2}$
 $X > 2Y \Leftrightarrow Y < \frac{X}{2}$

$$\begin{aligned} P(X > 2Y) &= \int_0^1 \left[\int_0^{\frac{x}{2}} 4xy \, dy \right] dx = \int_0^1 \left[2xy^2 \right]_0^{\frac{x}{2}} dx = \\ &= \int_0^1 2x \left(\frac{x^2}{2} \right) dx = \int_0^1 \frac{x^3}{2} dx = \left[\frac{x^4}{8} \right]_0^1 = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

III - 3

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2} & , \begin{cases} x+y < 2 \\ 0 < x < 2 \\ 0 < y < 2 \end{cases} \\ 0 & , \text{out. val. } x, y \end{cases}$$



$$E(X) = E(Y) = 4/6$$

$$f(x) = 1 - \frac{1}{2}x \quad , \quad 0 < x < 2$$

$$f(y) = 1 - \frac{1}{2}y \quad , \quad 0 < y < 2$$

$$a) \text{ COV}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

$$E(XY) = \int_0^2 \left[\int_0^{2-x} xy f(x, y) dy \right] dx = \int_0^2 \left[\int_0^{2-x} xy \cdot \frac{1}{2} dy \right] dx =$$

$$= \int_0^2 \left[\frac{xy^2}{4} \right]_0^{2-x} dx = \int_0^2 \frac{x(4 - 4x + x^2)}{4} dx =$$

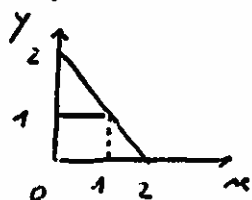
$$= \int_0^2 \left(x - x^2 + \frac{x^3}{4} \right) dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{16} \right]_0^2 =$$

$$= 2 - \frac{8}{3} + 1 = \frac{9}{3} - \frac{8}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\text{COV}(X, Y) = \frac{1}{3} - \frac{4}{6} \times \frac{4}{6} = \frac{12}{36} - \frac{16}{36} = -\frac{4}{36} = -\frac{1}{9}$$

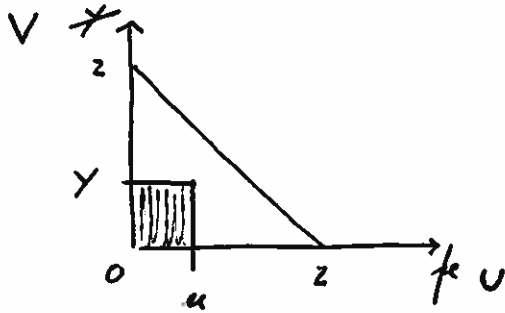
quando aumenta a quantidade vendida de um produto tende a diminuir a do outro. As duas variáveis não são independentes.

$$c) f(x|y) = \frac{f(x, y)}{f(y)} \rightarrow f(x|y=1) = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2} \cdot 1} = 1 \quad , \quad 0 < x < 1$$



$$P(X > 0,5 | Y=1) = \int_{0,5}^1 1 dx = \left[x \right]_{0,5}^1 = 1 - 0,5 = 0,5$$

$$b) F(u, y) = P(X \leq u; Y \leq y) = \int_0^u \left[\int_0^y \frac{1}{2} dv \right] du =$$



$$= \int_0^u \left[\frac{v}{2} \right]_0^y du = \int_0^u \frac{y}{2} du =$$

$$= \left[\frac{y}{2} u \right]_0^u = \frac{uy}{2} \quad , \begin{cases} 0 < u < 2 \\ 0 < y < 2 \\ u+y < 2 \end{cases}$$



**CATOLICA
LISBON**
SCHOOL OF BUSINESS & ECONOMICS

UNIVERSIDADE CATÓLICA PORTUGUESA

LICENCIATURAS EM ECONOMIA E GESTÃO

ESTATÍSTICA I

Exame - 26 de Janeiro de 2012

O Exame é constituído por quatro grupos. Responda em folhas separadas para cada grupo. Se eventualmente não fizer algum grupo, entregue em branco a folha respectiva devidamente identificada.

Leia cuidadosamente a totalidade de cada grupo antes de o responder. Sempre que o enquadramento teórico o permite dê respostas mais simples.

Explicite todas as hipóteses e os cálculos que tiver de fazer para a resolução dos problemas.
Os grupos ou as perguntas podem não estar pela ordem em que a matéria foi leccionada. Um grupo pode incluir diferentes matérias.

I (6,0 valores)

Uma companhia de transportes aéreos proporciona aos seus clientes diferentes tipos de viagens: por um lado, podem escolher entre bilhetes de vários preços [variável Y , expressa em unidades de conta (u.c.)]; por outro lado, podem escolher o tipo de avião, de acordo com o nº de reactores, em que vão realizar a sua viagem [variável X].

A companhia de transportes aéreos procedeu a uma recolha de informação sobre as preferências de 100 dos seus clientes, as quais constam do quadro abaixo:

		Y Preço da viagem (em u.c.)			
		0 - 2	2 - 4	4 - 8	8 - 14
X Nº de reactores do avião	2	6	12	8	4
	3	10	2	6	2
	4	0	10	30	10

- Desenhe o histograma das frequências relativas da variável Y .
- Recorrendo apenas a medidas de localização central, o que pode concluir sobre a assimetria da distribuição de frequências da variável Y .
- Verifique, através de médias condicionadas do nº de reactores, se as variáveis X e Y são independentes. Justifique analiticamente o seu procedimento.
- Compare a dispersão das variáveis X e Y . Justifique o seu procedimento.
- Calcule, através de um indicador quantitativo, a concentração da distribuição da variável Y para os indivíduos que escolheram o avião de 2 reactores.
- A companhia de transportes aéreos decidiu fixar os preços das viagens em função do nº de reactores do avião, tendo adoptado a fórmula $Z = 4X - 2$ onde Z é o preço da viagem.

Calcule o coeficiente de correlação linear entre a variável Z e a variável X . Justifique analiticamente o seu procedimento e interprete o valor encontrado.

II (4,0 valores)

O índice de valor ou despesa, de um determinado “cabaz”, assim como o valor do mesmo, tiveram a seguinte evolução:

Anos	Índice de valor	Valor (a preços de 2003)
2003	100	450
2004	122	500
2005	153	530
2006	171	550

- a) i) Descreva a evolução dos preços e das quantidades de 2003 a 2006, utilizando índices adequados, com base em 2003. Identifique e classifique os índices que utilizou.
- ii) Verifique analiticamente se o índice de preços calculado goza da propriedade da reversibilidade em relação ao tempo.
- b) O Sr. André teve nos anos referidos abaixo o seguinte salário nominal:

Anos	Salário Nominal (em euros)
2003	2000
2004	2050
2005	2132
2006	2196

- i) Calcule a taxa de crescimento médio anual do Salário Nominal do Sr. André entre 2003 e 2006.
- ii) Calcule o Salário Real do Sr. André para os quatro anos indicados, a preços de 2005.
- c) Sabe-se ainda que o índice de valor para os anos 2006 a 2008 foi o seguinte:

Anos	Índice de valor
2006	100
2007	105
2008	110

Calcule um único índice de valor para os anos 2003 a 2008, com base em 2007. Os resultados obtidos são exactos? Justifique.

III (4,0 valores)

A Joana está a acabar o curso de Gestão, assim como o seu namorado Xavier. Estão ambos à procura de emprego e sabem que poderão ficar sem férias de Verão caso o seu futuro profissional assim o exija.

A Joana pensa ter 70% de probabilidade de encontrar um emprego (EJ) e nesse caso a probabilidade de ter férias (FJ) é apenas 20%. Se não encontrar emprego a Joana irá de férias.

Sabe-se que a probabilidade do Xavier encontrar emprego (EX) é 60% e que, nesse caso, a probabilidade de ter férias (FX) é 0.

O Xavier decidiu que só faz férias se a Joana também puder fazer férias, caso contrário prefere ficar a trabalhar durante o Verão (no emprego que arranjar ou na Quinta da família).

- a) Qual a probabilidade da Joana ir de Férias?
- b) Qual a probabilidade do Xavier passar o Verão a trabalhar na Quinta da família?
- c) Sabendo que a Joana foi de Férias com o Xavier, qual a probabilidade da Joana estar a trabalhar?
- d) Serão os acontecimentos “O Xavier vai de férias” e “A Joana vai de férias” estatisticamente independentes? Justifique.

IV (6,0 valores)

O departamento de marketing de uma empresa estudou a adesão dos potenciais clientes a um novo produto. Estudou, em particular, o facto de os clientes serem homens ou serem mulheres. Nesse contexto considere as seguintes variáveis:

X : "Fracção de indivíduos do sexo masculino que compram o novo produto"

Y : "Fracção de indivíduos do sexo feminino que compram o novo produto"

Sabe-se que a função densidade de probabilidade conjunta das variáveis X e Y é dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{8}{3}(1 - xy) & 0 \leq x \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{nos outros casos} \end{cases}$$

- a) Confirme que se trata efectivamente de uma função densidade de probabilidade.
- b)
 - i) Obtenha a função densidade de probabilidade da "Fracção de indivíduos do sexo masculino que compram o novo produto";
 - ii) Obtenha a função de distribuição [ou de probabilidade acumulada] desta mesma variável.
 - iii) Utilizando a função calculada em b) ii), determine a probabilidade de a "Fracção de indivíduos do sexo masculino que compram o novo produto" estar entre 50% e 20%.
- c) Calcule o valor esperado da "Fracção de indivíduos do sexo feminino que compram o novo produto".
- d) Calcule a probabilidade de mais de 20% dos indivíduos do sexo masculino adquirirem o novo produto, sabendo que 40% dos indivíduos do sexo feminino o adquirem.

Nota: No caso de não conseguir resolver a alínea d) a partir da função original, pode considerar na sua resolução as funções abaixo indicadas [a cotação será menor neste caso]:

$$f(x, y) = \begin{cases} 4xy & 0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{nos outros casos} \end{cases}$$

$$f(x) = 2x \qquad f(y) = 2y$$



FORMULÁRIO

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_i x_i F_i = \sum_i x_i f_i$$

$$\bar{x} = \sum_i w_i x_i \quad (\text{com } \sum_i w_i = 1)$$

$$\bar{x}_g = \sqrt[n]{x_1^{F_1} \times x_2^{F_2} \times \dots}$$

$$\bar{x}_h = \frac{1}{\frac{1}{n} \sum_i F_i \frac{1}{x_i}} = \frac{1}{\sum_i f_i \frac{1}{x_i}}$$

$$M = l_m + k \times \frac{F_m - F_{m-1}}{(F_m - F_{m+1}) + (F_m - F_{m-1})}$$

$$M_e = l_{m_e} + k_{m_e} \frac{0,5 - s(l_{m_e})}{s(L_{m_e}) - s(l_{m_e})}$$

$$Q_I = l_I + k_I \frac{0,25 - s(l_I)}{s(L_I) - s(l_I)}$$

$$Q_{III} = l_{III} + k_{III} \frac{0,75 - s(l_{III})}{s(L_{III}) - s(l_{III})}$$

$$IV = \max_{x_i} \{x_i\} - \min_{x_i} \{x_i\}$$

$$IIQ = Q_{III} - Q_I$$

$$DAM_x = \frac{1}{n} \sum_i F_i |x_i - \bar{x}| = \sum_i f_i |x_i - \bar{x}|$$

$$s_x^2 = \frac{1}{n} \sum_i F_i (x_i - \bar{x})^2 = \sum_i f_i (x_i - \bar{x})^2 = \sum_i f_i x_i^2 - \bar{x}^2$$

$$s_x = +\sqrt{s_x^2}$$

$$C_v = \frac{s_x}{\bar{x}} \times 100$$

$$CA_p = \frac{\bar{X} - M_o}{s}$$

$$CA_B = \frac{Q_3 + Q_1 - 2M_e}{Q_3 - Q_1}$$

$$K_{Fisher} = \frac{\sum_{i=1}^m (x_i - \bar{X})^4 F_i / n}{\left[\sum_{i=1}^m (x_i - \bar{X})^2 F_i / n \right]^2}$$

$$K = \frac{Q_3 - Q_1}{2(P_{90} - P_{10})}$$

$$IG = 1 - \sum_{j=1}^m (q_j + q_{j-1}) \times (p_j - p_{j-1})$$

$$F_i^{(x)} = F_i(X = x_i) = \sum_j F_{ij}$$

$$F_j^{(y)} = F_j(Y = y_j) = \sum_i F_{ij}$$

$$f(y_j | x_i) = \frac{F(x_i, y_j)}{F_i^{(x)}} = \frac{f(x_i, y_j)}{f_i^{(x)}}$$

$$f(x_i | y_j) = \frac{F(x_i, y_j)}{F_j^{(y)}} = \frac{f(x_i, y_j)}{f_j^{(y)}}$$

$$COV(X, Y) = \frac{1}{n} \sum_k (x_k - \bar{x})(y_k - \bar{y}) = \frac{1}{n} \sum_k x_k y_k - \bar{x} \bar{y}$$

$$COV(X, Y) = \frac{1}{n} \sum_i \sum_j F_{ij} (x_i - \bar{X})(y_j - \bar{Y}) = \sum_i \sum_j f_{ij} (x_i - \bar{x})(y_j - \bar{y}) = \sum_i \sum_j (x_i y_j f_{ij}) - \bar{x} \bar{y}$$

$$r(X, Y) = \frac{COV(X, Y)}{s_x s_y}$$

Nota: As fórmulas abaixo têm 100 como referência para o ano base.

$$I_{i/0}^{(p)} = \frac{P_i}{P_0} \times 100 \quad I_{i/0}^{(q)} = \frac{q_i}{q_0} \times 100 \quad I_{i/0}^{(v)} = \frac{P_i q_i}{P_0 q_0} \times 100 \quad I_{i/0}^{(p)} = \frac{\sum_{i=1}^n P_{ii}}{\sum_{i=1}^n P_{0i}} \times 100$$

$$I_{(i/0)}^{(p)} = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n \frac{P_{ii}}{P_{0i}} \right) \times 100$$

$$I_{i/0}^{(q)} = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n \frac{q_{ii}}{q_{0i}} \right) \times 100$$

$$I_{(i/0)}^{(p)} = \left(\sum_{i=1}^n \frac{P_{ii}}{P_{0i}} \times w_i \right) \times 100$$

$$I_{i/0}^{(q)} = \left(\sum_{i=1}^n \frac{q_{ii}}{q_{0i}} \times w_i \right) \times 100$$

$$I_{i/0}^{(p)}(L) = \frac{\sum_{i=1}^n P_{ii} q_{0i}}{\sum_{i=1}^n P_{0i} q_{0i}} \times 100$$

$$I_{i/0}^{(q)}(L) = \frac{\sum_{i=1}^n P_{0i} q_{ii}}{\sum_{i=1}^n P_{0i} q_{0i}} \times 100;$$

$$I_{i/0}^{(p)}(P) = \frac{\sum_{i=1}^n P_{ii} q_{ii}}{\sum_{i=1}^n P_{0i} q_{ii}} \times 100$$

$$I_{i/0}^{(q)}(P) = \frac{\sum_{i=1}^n P_{ii} q_{ii}}{\sum_{i=1}^n P_{ii} q_{0i}} \times 100$$

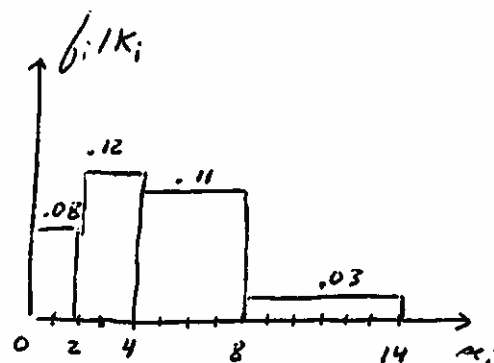
$$I_{i/0}(F) = \sqrt{I_{i/0}(L) \times I_{i/0}(P)}$$

Nota: o formulário não esgota todos os tratamentos estatísticos possíveis.

I

a)

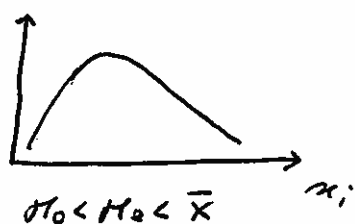
Classe	x_i	F_i	f_i	K_i	f_i/K_i
0-2	1	16	.16	2	0,08
2-4	3	24	.24	2	0,12
4-8	6	44	.44	4	0,11
8-14	11	16	.16	6	0,027 \approx 0,03
		100	1		



b) $\bar{X} = \frac{\sum x_i F_i}{n} = \frac{1 \times 16 + 3 \times 24 + 6 \times 44 + 11 \times 16}{100} = \frac{528}{100} = 5,28 \text{ u.c.}$

$H_2 = 4 + \frac{50 - 40}{44} \times 4 = 4,909 \text{ u.c.}$

$\sigma_{T0} = 2 + \frac{.12 - .08}{(.12 - .08) + (.12 - .11)} \times 2 = 2 + \frac{.04}{.05} \times 2 = 3,6 \text{ u.c.}$



Assimetria positiva. A maior parte das observações são de valor mais baixo.

c) $\bar{X} / [0-2] = \frac{2 \times 6 + 3 \times 10 + 4 \times 0}{16} = \frac{42}{16} = 2,625$

$\bar{X} / [8-14] = \frac{2 \times 4 + 3 \times 2 + 4 \times 10}{16} = \frac{54}{16} = 3,375$

Estes valores não são iguais, pelo que as variáveis não são independentes.

Justificação analítica:

Se houver independência $f(x_i, y_j) = f(x_i)$

Como $\bar{X} = \sum x_i f(x_i)$ pelo que, se houver independência $\bar{X} / y_j = \bar{X}$ e todas as médias condicionadas são iguais.

$$d) \quad \bar{y} = 5,28$$

$$\begin{aligned} S_y^2 &= \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2 F_i}{n} = \frac{\sum x_i^2 F_i}{n} - \bar{x}^2 = \\ &= \frac{1^2 \times 16 + 3^2 \times 24 + 6^2 \times 44 + 11^2 \times 16}{100} - 5,28^2 = \frac{3752}{100} - 27,8784 = \\ &= 9,6416 \end{aligned}$$

$$S_y = \sqrt{9,6416} = 3,1051 \quad CV_y = \frac{3,1051}{5,28} = 0,588 \text{ ou } 58,8\%$$

$$\bar{X} = \frac{2 \times 30 + 3 \times 20 + 4 \times 50}{100} = \frac{320}{100} = 3,2$$

$$S_x^2 = \frac{2^2 \times 30 + 3^2 \times 20 + 4^2 \times 50}{100} - 3,2^2 = \frac{1100}{100} - 10,24 = 0,76$$

$$S_x = \sqrt{0,76} = 0,8718 \quad CV_x = \frac{0,8718}{3,2} = 0,2724 \text{ ou } 27,24\%$$

A variável Y tem uma dispersão relativa superior à de variável X. Como são variáveis de natureza diferente a comparação de dispersão tem de ser feita com base numa medida relativa como é o caso do coeficiente de variação.

2) Mistura de 2 reactores:

n_i	F_i	$n_i F_i$	$\sum_{j=1}^i n_j F_j$	n_i	q_i	$q_i + q_{i-1}$	$f_i (q_i + q_{i-1})$
1	6	6	6	0,20	0,045	0,045	0,0090
3	12	36	42	0,60	0,313	0,358	0,1432
6	8	48	90	0,87	0,672	0,985	0,2660
11	4	44	134	1,00	1,000	1,672	0,2174
	30	134					0,6356

$$IG = 1 - \sum f_i (q_i + q_{i-1}) = 1 - 0,6356 = 0,3644 \text{ ou } 36,44\%$$

Mistura de 4 reactores

n_i	F_i	$n_i F_i$	$\sum_{j=1}^i n_j F_j$	n_i	q_i	$q_i + q_{i-1}$	$f_i (q_i + q_{i-1})$
1	0	0	0	0	0	0	0
3	10	30	30	0,2	0,0938	0,0938	0,0188
6	30	180	210	0,8	0,6563	0,7501	0,4501
11	10	110	320	1,0	1,0000	1,6563	0,3313
	50	320					0,8002

$$IG = 1 - 0,8002 = 0,1998 \text{ ou } 19,98\%$$

A concentração é mais elevada no caso das vigas mais próximas com 2 reactores.

f) $z = 3x$

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{\text{cov}(z, x)}{s_z s_x} = \frac{\sum (z - \bar{z})(x - \bar{x}) / n}{3 s_x s_x} = \frac{3 \text{cov}(x, x)}{3 s_x^2} = \\ &= \frac{3 s_x^2}{3 s_x^2} = 1 \end{aligned}$$

$$Z = 4X - 2$$

$$\begin{aligned} V(Z) &= V(4X - 2) = V(4X) + V(-2) + 2 \operatorname{cov}(4X, -2) \\ &= 4^2 V(X) + 0 + 0 = 4^2 V(X) = 4^2 S_x^2 \end{aligned}$$

$$S_z = 4 S_x$$

$$E(Z) = 4\bar{X} - 2$$

$$\begin{aligned} \operatorname{cov}(Z, X) &= \frac{\sum (4x_i - 2 - 4\bar{X} + 2)(x_i - \bar{X})}{n} = \\ &= \frac{4 \sum (x_i - \bar{X})(x_i - \bar{X})}{n} = 4 S_x^2 \end{aligned}$$

$$r = \frac{\operatorname{cov}(Z, X)}{S_z S_x} = \frac{4 S_x^2}{4 S_x S_x} = 1$$

As duas variáveis evoluem no mesmo sentido e têm a correlação máxima possível (a relação entre as variáveis pode ser representada por uma recta).

NOTA: Pode fazer-se o cálculo, mas que não era a demonstração analítica, a partir de:

x_i	z_i	$F(x_i, z_i)$
2	6	30
3	10	20
4	14	50
		<hr/> 100

II

u)	2003	$\frac{\sum p_{03} q_{03}}{\sum p_{03} q_{03}} = 1$	$\sum p_{03} q_{03} = 450$
	2004	$\frac{\sum p_{04} q_{04}}{\sum p_{03} q_{03}} = 1,22$	$\sum p_{03} q_{04} = 500$
	2005	$\frac{\sum p_{05} q_{05}}{\sum p_{03} q_{03}} = 1,53$	$\sum p_{03} q_{05} = 530$
	2006	$\frac{\sum p_{06} q_{06}}{\sum p_{03} q_{03}} = 1,71$	$\sum p_{03} q_{06} = 550$

$$I_{t/0}^P = \frac{\sum p_t q_t}{\sum p_0 q_t}$$

Índice de preços de Paasche. Índice agregado de valores absolutos em que o ponderador é a quantidade do ano corrente.

$$I_{03/03}^P(P) = 1$$

ou 100,00

$$I_{04/03}^P(P) = \frac{1,22 \times 450}{500} = 1,0980$$

109,80

$$I_{05/03}^P(P) = \frac{1,53 \times 450}{530} = 1,2991$$

129,91

$$I_{06/03}^P(P) = \frac{1,71 \times 450}{550} = 1,3991$$

139,91

$$I_{t/0}^Q = \frac{\sum q_t p_0}{\sum q_0 p_0} = \frac{\sum p_0 q_t}{\sum p_0 q_0}$$

Índice de quantidades de Laspeyres. Índice agregado de valores absolutos em que o ponderador é o preço do ano base.

$$I^P_{03/03}(L) = 1 \quad \text{ou} \quad 100,00$$

$$I^P_{04/03}(L) = \frac{500}{450} = 1,1111 \quad 111,11$$

$$I^P_{05/03}(L) = \frac{530}{450} = 1,1778 \quad 117,78$$

$$I^P_{06/03}(L) = \frac{550}{450} = 1,2222 \quad 122,22$$

$$ii) \quad I^P_{t/0}(P) \times I^P_{0/t}(P) = 1 \quad ?$$

$$\frac{\sum P_t q_t}{\sum P_0 q_t} \times \frac{\sum P_0 q_0}{\sum P_t q_0} \neq 1 \quad \text{O índice de Paasche não é reversível no tempo.}$$

b) ii) $I^P_{t/03}$ $I^P_{t/05}$ Salário Real

2003	1	$1/1,2991 = 0,7698$	$2000/0,7698 = 2598,0724$
2004	1,0980	$1,0980/1,2991 = 0,8452$	$2050/0,8452 = 2425,4614$
2005	1,2991	1	2132
2006	1,3991	$1,3991/1,2991 = 1,0769$	$2196/1,0769 = 2039,1866$

i)

$$\sqrt[3]{\frac{2196}{2000}} = \sqrt[3]{1,098} = 1,031654$$

$$\text{Tx médio de crescimento} = 3,17\%$$

nota: calcular o índice dos salários mínimos seria incorreto, pois o que se obtém não é o pretendido.

$$\frac{W_t}{W_{05}} = \frac{WR_{t/0} \times I^P_{t/0}}{WR_{05/0} \times I^P_{05/0}} = I^P_{t/05} \times I^P_{t/05}$$

c)

Anos $I_{t/03}^v$ $I_{t/06}^v$

$$I_{t/07}^v = \frac{I_{t/03}^v}{I_{07/03}^v} \times 100$$

2003 100

$$100 / 179,55 \times 100 = 55,69$$

2004 122

$$122 / \dots = 67,95$$

2005 153

$$= 85,21$$

2006 171 100

$$= 95,24$$

2007 $A = 179,55$ 105

$$= 100$$

2008 $B = 188,1$ 110

$$= 104,76$$

$$A = \frac{105}{100} \times 171 = 179,55$$

$$B = \frac{110}{100} \times 171 = 188,1$$

$$I_{t/0}^v = \frac{\sum p_t q_t}{\sum p_0 q_0}$$

POR EXEMPLO:

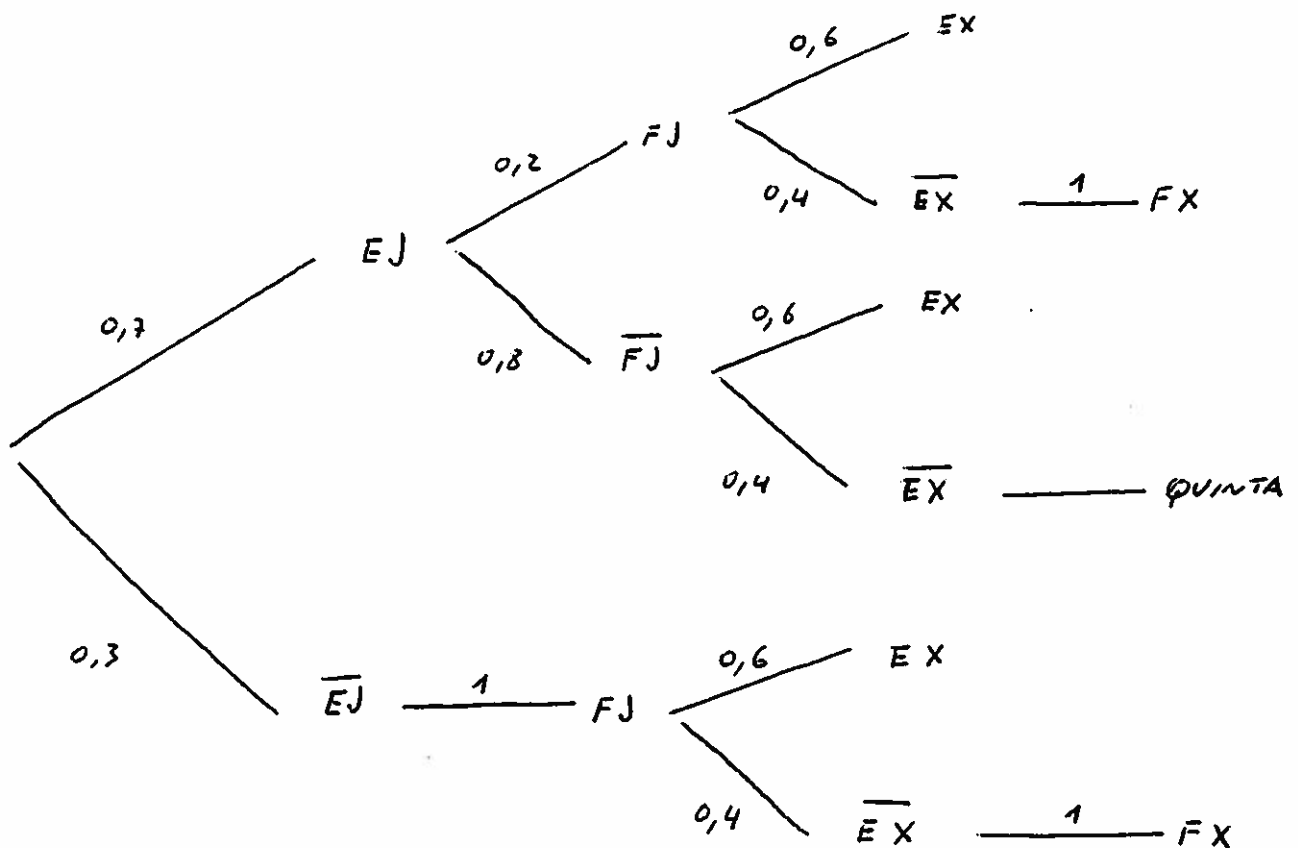
$$\left[I_{t/2}^v = \frac{\sum p_t q_t}{\sum p_2 q_0} \right] = \frac{I_{t/0}^v}{I_{2/0}^v} \quad ?$$

$$\frac{I_{t/0}^v}{I_{2/0}^v} = \frac{\frac{\sum p_t q_t}{\sum p_0 q_0}}{\frac{\sum p_2 q_2}{\sum p_0 q_0}} = \frac{\sum p_t q_t}{\sum p_2 q_2}$$

A igualdade em causa verifica-se e portanto o índice é circular.

O índice de valor é um índice simples e os índices simples são circulares.

III



a) $P(FJ) = 0,7 \times 0,2 + 0,3 = 0,14 + 0,3 = 0,44$

b) $P(\text{QUINTA}) = 0,7 \times 0,3 \times 0,4 = 0,224$

c)
$$P(EJ | FJ \cap FX) = \frac{0,7 \times 0,2 \times 0,4}{0,7 \times 0,2 \times 0,4 + 0,3 \times 0,4} = \frac{0,056}{0,056 + 0,12} = \frac{0,056}{0,176} = 0,3182$$

d) $P(FX) = P(FX | FJ) ?$

$P(FX) = 0,7 \times 0,2 \times 0,4 + 0,3 \times 0,4 = 0,176$

$$P(FX | FJ) = \frac{P(FX \cap FJ)}{P(FJ)} = \frac{P(FX)}{P(FJ)} = \frac{0,176}{0,44} = 0,4$$

A igualdade não se verifica pelo fato de os dois conjuntos referidos não serem independentes

Podemos ver também que

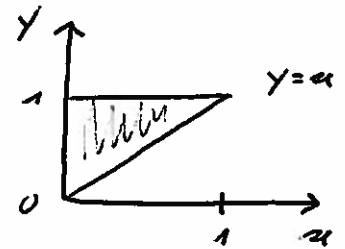
$P(FJ) = 0,44$

$$P(FJ | FX) = \frac{P(FX)}{P(FJ)} = 1 \quad [\text{INTERPRETAR}]$$

FX é um subconjunto de FJ. Se Xavier tem férias, Joana leva necessariamente férias.

IV

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{8}{3} (1 - xy) & , \quad 0 \leq x \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{out. val. de } x, y \end{cases}$$



$$\begin{aligned} a) \int_0^1 \left[\int_0^y f(x, y) dy \right] dx &= \int_0^1 \left[\int_x^1 \frac{8}{3} (1 - xy) dy \right] dx = \\ &= \frac{8}{3} \int_0^1 \left[y - \frac{xy^2}{2} \right]_x^1 dx = \frac{8}{3} \int_0^1 \left(1 - \frac{x}{2} \right) - \left(x - \frac{x^3}{2} \right) dx \\ &= \frac{8}{3} \int_0^1 \left(1 - \frac{3x}{2} + \frac{x^3}{2} \right) dx = \frac{8}{3} \left[x - \frac{3x^2}{4} + \frac{x^4}{8} \right]_0^1 = \\ &= \frac{8}{3} \left(1 - \frac{3}{4} + \frac{1}{8} \right) = \frac{8}{3} - \frac{6}{3} + \frac{1}{3} = \frac{3}{3} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) i) f(x) &= \int_0^y f(x, y) dy = \int_x^1 \frac{8}{3} (1 - xy) dy = \frac{8}{3} \int_x^1 (1 - xy) dy = \\ &= \frac{8}{3} \left[y - \frac{xy^2}{2} \right]_x^1 = \frac{8}{3} \left[\left(1 - \frac{x}{2} \right) - \left(x - \frac{x^3}{2} \right) \right] = \frac{8}{3} \left(1 - \frac{3x}{2} + \frac{x^3}{2} \right) = \\ &= \frac{8}{3} - 4x + \frac{4}{3} x^3, \quad 0 \leq x \leq 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ii) F(x) &= P(X \leq x) = \int_0^x \left(\frac{8}{3} - 4u + \frac{4}{3} u^3 \right) du = \left[\frac{8}{3} u - 2u^2 + \frac{u^4}{3} \right]_0^x = \\ &= \frac{8}{3} x - 2x^2 + \frac{x^4}{3}, \quad 0 \leq x \leq 1 \end{aligned}$$

$$iii) P(0,20 < X < 0,50) = F(0,5) - F(0,2) = 0,8542 - 0,4539 = 0,4003$$

$$F(0,5) = \frac{8}{3} \times 0,5 - 2 \times 0,5^2 + \frac{0,5^4}{3} = 0,8542$$

$$F(0,2) = \frac{8}{3} \times 0,2 - 2 \times 0,2^2 + \frac{0,2^4}{3} = 0,4539$$

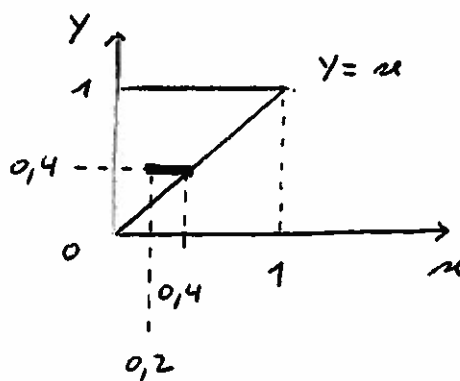
$$c) f(y) = \int_0^y f(x, y) dx = \int_0^y \frac{8}{3} (1 - xy) dy$$

$$= \frac{8}{3} \left[x - \frac{x^2 y}{2} \right]_0^y = \frac{8}{3} \left(y - \frac{y^3}{2} \right), \quad 0 \leq y \leq 1$$

$$E(Y) = \int_0^1 y f(y) dy = \int_0^1 y \cdot \frac{8}{3} \left(y - \frac{y^3}{2} \right) dy = \frac{8}{3} \int_0^1 \left(y^2 - \frac{y^4}{2} \right) dy =$$

$$= \frac{8}{3} \left[\frac{y^3}{3} - \frac{y^5}{10} \right]_0^1 = \frac{8}{3} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{10} \right) = \frac{80}{90} - \frac{24}{90} = \frac{56}{90}$$

d) $P(X > 0,2 \mid Y = 0,4)$



$$f(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_2(y)} = \frac{\frac{8}{3} (1 - xy)}{\frac{8}{3} \left(y - \frac{y^3}{2} \right)} = \frac{1 - xy}{y - \frac{y^3}{2}}, \quad 0 \leq x \leq y$$

$$f(x|y=0,4) = \frac{1 - 0,4x}{0,4 - \frac{0,4^3}{2}} = \frac{1 - 0,4x}{0,368} = 2,71739 - 1,08696x$$

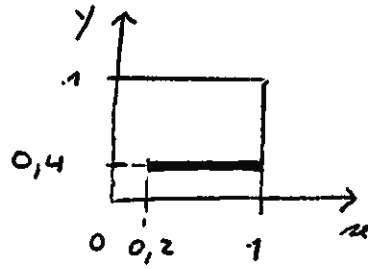
$$0 \leq x \leq 0,4$$

$$P(X > 0,2 \mid Y = 0,4) = 1 - \int_0^{0,2} (2,71739 - 1,08696x) dx = 1 - \left[2,71739x - \frac{1,08696x^2}{2} \right]_0^{0,2} =$$

$$= 1 - 0,5217 = 0,4783$$

d) [alternativa]

$$P[X > 0,2 \mid Y = 0,4]$$



$$f(x|y) = \frac{f_1(x,y)}{f_2(y)} = \frac{4xy}{2y} = 2x, \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$f(x|y=0,4) = 2x = f(x)$$

$$\begin{aligned} P(X > 0,2 \mid Y = 0,4) &= 1 - \int_0^{0,2} 2x \, dx = 1 - \left[\frac{2x^2}{2} \right]_0^{0,2} = 1 - 0,2^2 = \\ &= 1 - 0,04 = 0,96 \end{aligned}$$