

ESTATÍSTICA I

PROVAS DE AVALIAÇÃO DE ANOS ANTERIORES

RESOLUÇÕES OU NOTAS DE RESOLUÇÃO

[Nota: nem todos os exercícios incluem a resolução ou a resolução completa]



LICENCIATURAS EM ECONOMIA E GESTÃO

ESTATÍSTICA I

2ª Frequência – 15 de Janeiro de 2009

APRESENTE TODOS OS CÁLCULOS EFECTUADOS
JUSTIFIQUE TODAS AS SUAS RESPOSTAS
RESPONDA A CADA GRUPO NUMA FOLHA SEPARADA

I (4,0 valores)

Para fazer face a uma situação de emergência, é necessário encontrar um dador de sangue do tipo O Rh-. Este é um tipo de sangue relativamente raro, e sabe-se que a **probabilidade** de uma pessoa, escolhida ao acaso, ter este tipo de sangue é de **0,10**.

Por limitações técnicas, nesta situação de emergência, não é possível fazer análises a mais de **4 pessoas** que são escolhidas ao acaso, de forma independente, de entre o grande número de voluntários que compareceram.

Logo que seja encontrado um dador com este tipo de sangue, não é feita mais nenhuma análise. Se, ao fim da quarta análise, não for encontrado nenhum dador compatível, não será também efectuada mais nenhuma análise.

Considere a variável aleatória X definida como o **número de análises de sangue efectuadas**.

- a)
 - i) Construa a função de probabilidade da variável aleatória X .
 - ii) Confirme que a função em i) preenche os requisitos para ser uma função de probabilidade.
- b)
 - i) Construa a função de distribuição [probabilidade acumulada] da variável aleatória X .
 - ii) Utilizando esta função calcule a probabilidade de serem efectuadas mais de duas análises.
- c)
 - i) Calcule a probabilidade de ser efectuada a segunda análise sabendo que já foi feita a primeira análise.
 - ii) Interprete este resultado, confrontando-o com os valores de a) i).
- d) Calcule a probabilidade de não ser encontrado nenhum dador compatível;
- e)
 - i) Construa a função geradora de momentos da variável aleatória X
 - ii) Utilizando a função anterior, calcule a variância de X .

II (5,0 valores)

Um automobilista está na montanha a conduzir o seu veículo a caminho do Hotel. Há muita neve e nevoeiro e o automobilista está perdido.

Num certo ponto da estrada há um sinal informativo que indica o percurso **A** e outro sinal que indica o percurso **B**. Dada as condições de visibilidade serem fracas, a probabilidade de o automobilista ver cada um dos sinais é 50% e é independente de ter visto ou não o outro sinal.

- Se o automobilista não vir nenhum dos sinais segue em frente pelo mesmo caminho (percurso **C**) e cai num precipício.
- Se o automobilista vir apenas um dos sinais, opta pelo percurso indicado nesse sinal.
- Se o automobilista vir ambos os sinais opta pelo percurso **A** com 60% de probabilidade.

Se o automobilista seguir o percurso **A**, vai ter directamente ao Hotel sem mais problemas.

Se seguir o percurso **B**, vai passar por um novo sinal informativo, que pode ver com 50% de probabilidade, e que indica o percurso **D**. O percurso **D** vai dar directamente ao Hotel. Se não vir este sinal e continuar sempre pelo percurso **B** cai também num precipício.

- a) Construa um diagrama em árvore que ilustre a situação descrita e inclua as probabilidades dos acontecimentos em causa.
- b) Determine a probabilidade de o automobilista chegar ao Hotel.
- c) Determine a probabilidade de o automobilista ter visto ambos os sinais informativos dos percursos **A** e **B**, sabendo que chegou ao Hotel.

Suponha agora que, no percurso **C**, são colocados sucessivos sinais informativos a avisar do precipício. A probabilidade de um painel ser visto por um automobilista é 60% e é independente do automobilista ter visto ou não outro painel.

- d) Quantos sinais deverão ser colocados nessa via para que a probabilidade de um automobilista ver, pelo menos, um dos sinais seja superior a 90%?

III (5,0 valores)

Seja X uma variável aleatória que representa a procura diária (em quilos) de um determinado bem alimentar, num supermercado.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}x & 0 \leq x < 1 \\ 1 - \frac{1}{3}x & 1 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{outros valores de } x \end{cases}$$

- a) Obtenha a função de distribuição da variável aleatória X ;
- b) Determine a probabilidade de $X \geq 1,5$, i.e., a probabilidade de a procura diária do bem exceder 1,5 quilos.
- c) Para este bem, a procura é considerada fraca quando $X < 1$. Admitindo que estamos a considerar um dia de fraca procura, determine a probabilidade de esta exceder 0,5 quilos.
- d) No início de cada dia, o gerente do supermercado tem de decidir o número de quilos do bem que põe à venda (variável Y). Determine Y de modo a assegurar que, com probabilidade igual a 90%, toda a procura pode ser satisfeita nesse dia.

IV (6,0 valores)

A função densidade de probabilidade conjunta das variáveis aleatórias X e Y é representada por:

$$f(x, y) = \begin{cases} 5x^3 & 0 < y < x < 1 \\ 0 & \text{outros valores de } x \text{ e } y \end{cases}$$

- a) Obtenha a função de densidade de probabilidade marginal da variável Y
- b) Verifique que a função densidade de probabilidade marginal da variável X é a função: $f(x) = 5x^4$, com $0 < x < 1$
- c) Utilizando os resultados de a) e b) verifique se as variáveis X e Y são estatisticamente independentes. Justifique
- d) Calcule $E(2X^2 + Y)$
- e)
 - i) Obtenha a função de densidade de probabilidade condicional $f(y|x)$
 - ii) Utilizando a função anterior, calcule $\text{Prob}(Y < 0,5 | X = 0,75)$

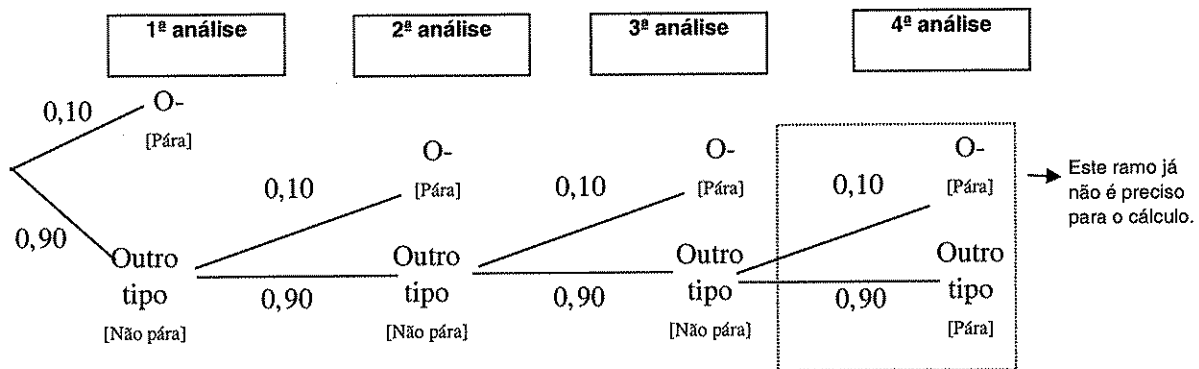
LICENCIATURAS EM ECONOMIA E GESTÃO

ESTATÍSTICA I

2ª Frequência – 15 de Janeiro de 2009

Grupo I

a) Construção da função de probabilidade



$$f(x) = P(X = x) = \begin{cases} 0,100 & x = 1 \\ 0,90 \times 0,10 = 0,090 & x = 2 \\ 0,90 \times 0,90 \times 0,10 = 0,081 & x = 3 \\ 0,90 \times 0,90 \times 0,90 = 0,729 & x = 4 \\ 0 & \text{out.val. de } x \end{cases}$$

1) $f(x) \geq 0$ Para todos os x do domínio

2) $\sum_{\text{Todos os valores de } x} f(x) = 0,100 + 0,090 + 0,081 + 0,729 = 1$

Estão cumpridos os requisitos para $f(x)$ ser função de probabilidade.

b) Construção da função de probabilidade acumulada

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ 0,100 & 1 \leq x < 2 \\ 0,190 & 2 \leq x < 3 \\ 0,271 & 3 \leq x < 4 \\ 1 & x \geq 4 \end{cases}$$

$$P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - 0,190 = 0,810$$

c) **Cálculo da probabilidade condicionada**

Dizem-nos que foi efectuada a primeira análise mas não nos dizem o resultado. Então é como se nenhuma

$$P(2^a \setminus \text{Ter feito a 1}^a) = \frac{0,9}{(0,1 + 0,9)} = 0,9$$

Assim,

$$P(2^a \setminus \text{Ter feito a 1}^a) = 1 - P(X = 1)$$

Outra interpretação possível é considerar que se trata de uma probabilidade condicionada: probabilidade de

$$P(X = 2 \setminus X > 1) = \frac{P(X = 2 \wedge X > 1)}{P(X > 1)} = \frac{P(X = 2)}{P(X > 1)} = \frac{0,09}{0,90} = 0,10$$

Assim,

$$P(X = 2 \setminus X > 1) = P(X = 1) \quad \text{Porque os acontecimentos são independentes.}$$

d) **Probabilidade de não ser encontrado nenhum dador compatível**

$$P(ORh-) = 0,1 \quad 1 - P(ORh-) = 0,9$$

$$P(\text{Não encontrar nenhum dador O Rh-}) = 0,9^4 = 6561$$

O cálculo é feito desta forma porque são acontecimentos independentes.

e) **Cálculo da variância através da função geradora de momentos**

$$M(t) = E[e^{tx}] = \sum_i e^{tx_i} f(x_i) =$$

$$= e^{1t} \times 0,100 + e^{2t} \times 0,090 + e^{3t} \times 0,081 + e^{4t} \times 0,729$$

$$M'(t) = 0,1e^{1t} + 0,18e^{2t} + 0,243e^{3t} + 2,916e^{4t}$$

$$M''(t) = 0,1e^{1t} + 0,36e^{2t} + 0,729e^{3t} + 11,664e^{4t}$$

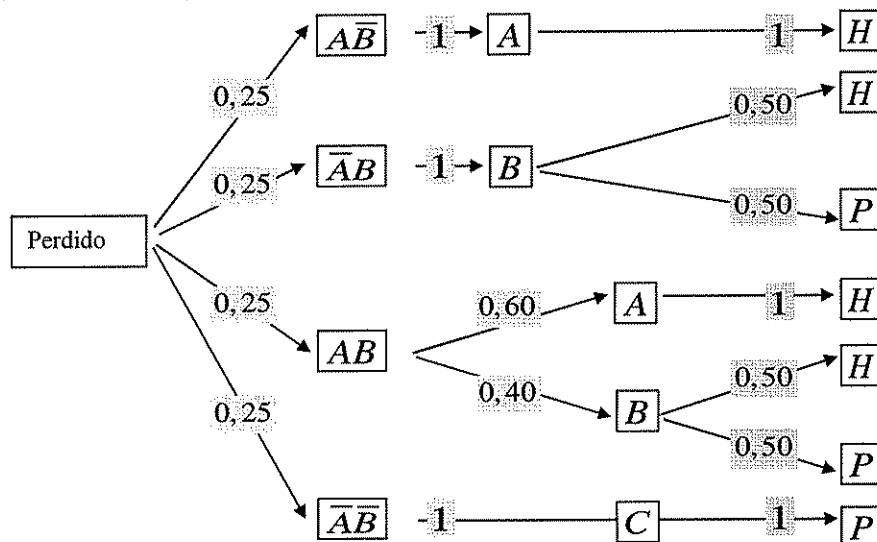
$$M'(t=0) = 0,1 + 0,18 + 0,243 + 2,916 = 3,439 = \mu'_1 = \mu_x = E[X]$$

$$M''(t=0) = 0,1 + 0,36 + 0,729 + 11,664 = 12,853 = \mu'_2 = E[X^2]$$

$$\sigma_x^2 = V[X] = E[X^2] - E[X]^2 = 12,853 - 3,439^2 = 12,853 - 11,827 = 1,026279$$

Grupo II

a) Diagrama em árvore e probabilidades dos acontecimentos



Nota: O esquema podia ser simplificado retirando os passos intermédios que têm probabilidade 1.

Como a probabilidade de ver cada um dos sinais A e B é independente e igual a 0,5, então
 $P(A\bar{B}) = P(\bar{A}B) = P(AB) = P(\bar{A}\bar{B}) = 0,5 \times 0,5 = 0,25$

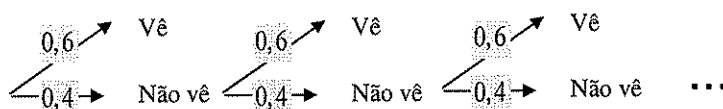
b) Probabilidade do automobilista chegar ao Hotel

$$P(H) = 0,25 + 0,25 \times 0,50 + 0,25 \times 0,60 + 0,25 \times 0,40 \times 0,50 = 0,250 + 0,125 + 0,150 + 0,050 = 0,575$$

c) Probabilidade do automobilista chegar ao Hotel \ viu os dois sinais

$$P(AB \setminus H) = \frac{P(AB \cap H)}{P(H)} = \frac{0,150 + 0,050}{0,575} = 0,3478$$

d) Probabilidade de ver pelo menos 1 sinal de precipício ser pelo menos 90%



	Soma
$P(\text{Ver só 1º sinal, com 1 sinal}) = 0,60$	0,600
$P(\text{Ver só 2º sinal, com 2 sinais}) = 0,40 \times 0,60 = 0,24$	0,840
$P(\text{Ver só 3º sinal, com 3 sinais}) = 0,40 \times 0,40 \times 0,60 = 0,096$	0,936
...	
Ou	
...	
$1 - P(\text{ver nenhum sinal, com 3 sinais}) = 1 - 0,40^3 = 1 - 0,064 = 0,936$	

Deviam ser colocados pelo menos três sinais.

LICENCIATURAS EM ECONOMIA E GESTÃO

ESTATÍSTICA I

2ª Frequência – 15 de Janeiro de 2009

III

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}x & 0 \leq x < 1 \\ 1 - \frac{1}{3}x & 1 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{outros valores de } x \end{cases}$$

a) **Obtenha a função de distribuição da variável aleatória X ;**

$$F(x) = P(X \leq x)$$

$$X < 0 \quad F(x) = 0$$

$$0 \leq X < 1 \quad F(x) = F(0) + \int_0^x \left(\frac{2}{3}t\right) dt = \frac{2}{3} \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^x = \frac{x^2}{3} \quad F(1) = \frac{1}{3}$$

$$1 < X \leq 3 \quad F(x) = F(1) + \int_1^x \left(1 - \frac{1}{3}t\right) dt = \frac{1}{3} + \left[t - \frac{1}{6}t^2\right]_1^x = x - \frac{x^2}{6} - \frac{1}{2}, \quad F(3) = 1$$

$$X > 3 \quad F(x) = 1$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{x^2}{3} & 0 \leq x < 1 \\ x - \frac{x^2}{6} - \frac{1}{2} & 1 \leq x \leq 3 \\ 1 & x > 3 \end{cases}$$

b) **Determine a probabilidade de $X \geq 1,5$, i.e., a probabilidade de a procura diária do bem exceder 1,5 quilos.**

Pode utilizar-se directamente a função de distribuição de a):

$$P(X \geq 1,5) = 1 - P(X \leq 1,5) = \overset{1 - F(1,5)}{F(1,5)} \quad (\text{Corresponde ao 3º ramo da função de distribuição})$$

$$\overset{1 - F(1,5)}{F(1,5)} = 1 - \left(1,5 - \frac{1,5^2}{6} - 0,5\right) = 0,375$$

Pode também obter-se o resultado fazendo os cálculos a partir da função densidade de

$$\text{probabilidade } f(x): \text{Pr ob}(X \geq 1,5) = \int_{1,5}^3 \left(1 - \frac{1}{3}x\right) dx = (\dots) = 0,375$$

- c) Para este bem, a procura é considerada fraca quando $X < 1$. Admitindo que estamos a considerar um dia de fraca procura, determine a probabilidade de esta exceder 0,5 quilos.

Trata-se de calcular uma probabilidade condicional: $\text{Prob}(X > 0,5 | X < 1)$

$$\text{Prob}(X > 0,5 | X < 1) = \frac{\text{Prob}(0,5 < X < 1)}{\text{Prob}(X < 1)}$$

$$\text{Prob}(X > 0,5 | X < 1) = \frac{\text{Prob}(0,5 < X < 1)}{\text{Prob}(X < 1)} = \frac{F(1) - F(0,5)}{F(1)} = \frac{\frac{1}{3} - \frac{(0,5)^2}{3}}{\frac{1}{3}} = 0,75$$

Ou

$$\text{Prob}(X > 0,5 | X < 1) = \frac{\text{Prob}(0,5 < X < 1)}{\text{Prob}(X < 1)} = \frac{\int_{0,5}^1 \left(\frac{2}{3}x\right) dx}{\int_0^1 \left(\frac{2}{3}x\right) dx} = 0,75$$

- d) No início de cada dia, o gerente do supermercado tem de decidir o número de quilos do bem que põe à venda (variável Y). Determine Y de modo a assegurar que, com probabilidade igual a 90%, toda a procura pode ser satisfeita nesse dia.

Queremos conhecer o valor de Y (oferta do bem no supermercado) tal que, com 90% de probabilidade, a procura X seja satisfeita, i.e., a procura seja inferior ou igual a Y :
 $X \leq Y$

Usando mais uma vez a função de distribuição, podemos escrever:

Queremos conhecer Y tal que $F(y) = P(X \leq y) = 0,9$

$F(\) = 0,9$ corresponde ao 3º ramo da função de distribuição de a). (pois no fim do 2º ramo, $F(1) = 0,33$).

$$F(y) = y - \frac{y^2}{6} - \frac{1}{2} = 0,9 \Rightarrow (\dots) \Rightarrow y^2 - 6y + 8,4 = 0 \Rightarrow$$

$$y = 3,775 > 3 \text{ (impossível) ou } y = 2,225$$

Solução: Devem ser postos à venda pelo menos 2,225 quilos para assegurar que toda a procura é satisfeita com 90% de probabilidade.

$$\text{IV} \quad f(x, y) = \begin{cases} 5x^3 & 0 < y < x < 1 \\ 0 & \text{outros valores de } x \text{ e } y \end{cases}$$

a) **Obtenha a função de densidade de probabilidade marginal da variável Y**

$$f(y) = \int_{D_x} (5x^3) dx = \int_y^1 (5x^3) dx = \frac{5}{4}(1 - y^4) \quad \text{para } 0 < y < 1$$

b) **Verifique que a função densidade de probabilidade marginal da variável X é a função: $f(x) = 5x^4$, com $0 < x < 1$**

$$f(x) = \int_{D_y} (5x^3) dy = \int_0^x (5x^3) dy = 5x^4 \quad \text{para } 0 < x < 1$$

c) **Utilizando os resultados de a) e b) verifique se as variáveis X e Y são estatisticamente independentes. Justifique**

As variáveis X e Y são estatisticamente independentes se o produto das respectivas funções de densidade marginais, $f(x)$ e $f(y)$ for igual à função de densidade conjunta, $f(x, y)$. Vamos verificar:

$$f(x) \times f(y) = (5x^4) \times \frac{5}{4}(1 - y^4) \neq f(x, y) = 5x^3$$

Conclusão: As variáveis X e Y não são estatisticamente independentes.

d) **Calcule $E(2X^2 + Y)$**

$$E(2X^2 + Y) = 2E(X^2) + E(Y)$$

$$E(X^2) = \int_0^1 (x^2) f(x) dx = \int_0^1 (x^2)(5x^4) dx = (\dots) = \frac{5}{7}$$

$$E(Y) = \int_0^1 (y) f(y) dy = \int_0^1 y \left(\frac{5}{4}(1 - y^4) \right) dy = (\dots) = \frac{5}{12}$$

$$E(2X^2 + Y) = 2E(X^2) + E(Y) = 2 \times \frac{5}{7} + \frac{5}{12} = 1,845$$

e) i) **Obtenha a função de densidade de probabilidade condicional**

$$f(y|x) = \frac{f(x, y)}{f(x)} = \frac{5x^3}{5x^4} = \frac{1}{x} \quad \text{para } 0 < y < x < 1$$

ii) **Utilizando a função anterior, calcule $\text{Prob}(Y < 0,5 | X = 0,75)$**

$$f(y | X = 0,75) = \frac{1}{0,75}$$

$$\text{Prob}(Y < 0,5 | X = 0,75) = \int_0^{0,5} f(y | X = 0,75) dy = \int_0^{0,5} \left(\frac{1}{0,75} \right) dy = \left(\frac{1}{0,75} \right) [y]_0^{0,5} = 0,6(6)$$

LICENCIATURAS EM ECONOMIA E GESTÃO

ESTATÍSTICA I

Exame Final – 29 de Janeiro de 2009

**APRESENTE TODOS OS CÁLCULOS EFECTUADOS
JUSTIFIQUE TODAS AS SUAS RESPOSTAS
RESPONDA A CADA GRUPO NUMA FOLHA SEPARADA**

I (5,0 valores)

O centro de atendimento aos clientes de uma empresa de comunicações recebeu 400 chamadas telefónicas numa semana. Estas chamadas foram classificadas num quadro de dupla entrada de acordo com a sua duração (em minutos) (variável X) e o número de avarias comunicadas (variável Y).

		Variável Y [n.º de avarias]			Total
		1	2	3	
Variável X [Duração da chamada em minutos]	[5 - 15 [54	20	6	80
	[15 - 25 [40	50	10	100
	[25 - 45 [36	70	14	120
	[45 - 65 [20	60	20	100
Total		150	200	50	400

- Considere apenas a variável X :
 - Desenhe o histograma e o polígono das frequências simples absolutas.
 - Calcule a média, mediana e a moda. Interprete cada um destes indicadores para o caso concreto do exercício.
 - Suponha que cada técnico de atendimento trabalha 35 horas por semana. Quantos técnicos serão necessários para atender todas as chamadas.
- Compare a variância, o desvio-padrão e o coeficiente de variação da variável “número de avarias comunicadas” (Y) para o caso de chamadas de curta duração (entre 5 e 15 minutos) e para o caso de chamadas de longa duração (entre 45 e 60 minutos). Comente.
- O coeficiente de correlação linear de Pearson entre as variáveis X e Y é de 0,295.
 - Como interpreta este valor do coeficiente de correlação linear de Pearson?
 - Verifique se as duas variáveis são estatisticamente independentes. Justifique.

II (4,0 valores)

As chamadas telefônicas que foram feitas para o centro de atendimento aos clientes de uma empresa de comunicações foram registradas em três listas separadas, de acordo com a natureza das avarias comunicadas:

- Lista A:** Avarias de televisão - Lista com 30 registros de avarias
Lista B: Avarias de telefone - Lista com 240 registros de avarias
Lista C: Avarias de *internet* - Lista com 160 registros de avarias

Quando as três listas foram analisadas em conjunto foi apurado o seguinte:

- As listas de avarias de televisão e de telefone têm em comum 100 registros;
- As listas de avarias de televisão e de *internet* têm em comum 80 registros;
- As listas de avarias de telefone e de *internet* têm em comum 60 registros;
- 40 chamadas telefônicas estavam registradas em todas as listas.

Considere agora que é escolhida, ao acaso, uma chamada telefônica recebida neste centro de atendimento:

- a) A partir da informação acima indicada construa um diagrama de Venn com a probabilidade de cada acontecimento.
- b) Verifique se a existência de uma avaria na *internet* é ou não independente da existência de uma avaria no telefone.
- c) Sabe-se que, numa determinada chamada telefônica, foi comunicado a existência de uma avaria no telefone e de outra na *internet*. Qual a probabilidade de, nessa chamada, não ter sido comunicada nenhuma avaria na televisão?

III (3,0 valores)

Para estudar a evolução dos preços de um determinado cabaz constituído pelos bens A, e C é utilizado um índice agregado de preços relativos ponderados. Para os últimos 4 anos ($t = 1, 2, 3, 4$) dispõe-se da informação sobre o valor do índice, utilizando sempre como base o ano anterior:

t	$I_{t/t-1}$
1	120
2	125
3	120
4	130

- a) Interprete o valor do índice do ano $t = 2$
- b)
 - i) Escreva a série dos valores do índice considerando o ano $t = 0$ como o ano base.
 - ii) Que propriedade dos números índices utilizou? Justifique.
- c) Qual a taxa de crescimento médio anual dos preços entre $t = 0$ e $t = 4$? Justifique.

d) Considere que na construção deste índice foram utilizados ponderadores fixos para cada um dos bens (w_i) e iguais a $w_A = 0,2$, $w_B = 0,5$ e $w_C = 0,3$. Conhecendo os preços observados em $t = 4$ e as previsões de preços para $t = 5$ (ver quadro abaixo), calcule o valor do índice para o ano 5, com base em $t = 0$.

$t = 4$	$t = 5$
$P_A = 18$	$P_A = 22,5$
$P_B = 20$	$P_B = 15$
$P_C = 5$	$P_C = 8$

IV (8,0 valores)

A) (2,5 valores)

Considere uma variável aleatória X , discreta, com a seguinte função de distribuição:

X	$F(x)$
0	0,10
1	0,25
2	0,6
3	0,8
4	1,0

- Calcule $\text{Prob}(X > 2)$
- Obtenha a função de probabilidade da variável X
- Calcule o valor do 3º momento centrado em relação à média

B) (5,5 valores)

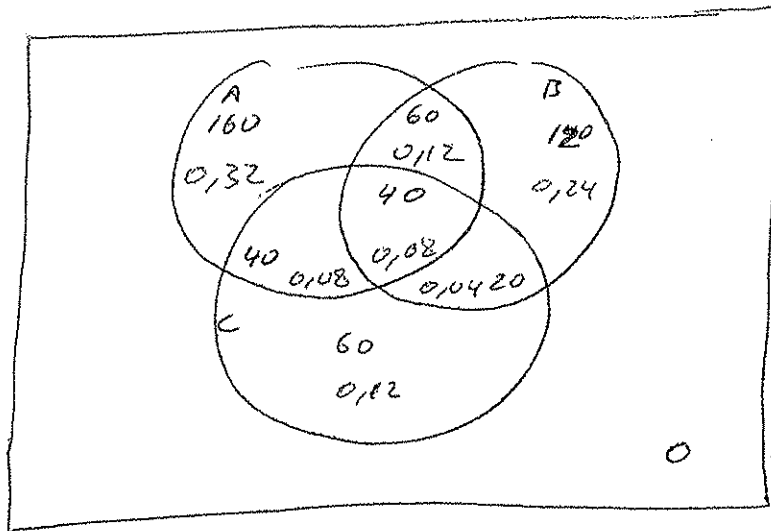
A função densidade de probabilidade conjunta das variáveis aleatórias x e Y é representada por:

$$f(x, y) = \begin{cases} 24xy & 0 < y < 1 \quad 0 < x < 1 \quad x + y < 1 \\ 0 & \text{outros valores de } x \text{ e } y \end{cases}$$

- Obtenha a função de densidade de probabilidade marginal da variável X
 - Calcule $E(X)$
 - Calcule $\text{Prob}(X < 0,5)$
- Obtenha a função de densidade de probabilidade condicional de Y dado X
 - Verifique que a função $i)$ cumpre os requisitos para ser uma função densidade de probabilidade.
- Calcule $\text{Prob}(Y < 0,4 | X = 0,5)$
 - Calcule $\text{Prob}(Y < 0,4 | X < 0,5)$

Exercício - Diagrama de Venn

a)



$$\#(A \cup B \cup C) = 500$$

$$\#(\overline{A \cup B \cup C}) = 0$$

b) $P(C) = \frac{160}{500} = 0,32$

$$P(C \setminus B) = \frac{\#(C \cap B)}{\#(B)} = \frac{60}{240} = 0,25$$

$$P(C) > P(C \setminus B) \Rightarrow C \neq B \text{ NÃO SÃO INDEPENDENTES.}$$

c) $P(B \cup C) = \frac{240}{500} + \frac{160}{500} - \frac{60}{500} = \frac{340}{500} = 0,68$

$$P[(B \cup C) \cap A] = \frac{40 + 40 + 60}{500} = 0,28$$

$$P[(B \cup C) \cap A \setminus (B \cup C)] = \frac{0,68 - 0,28}{0,68} = 0,588$$

A)

X	F(x)	f(x)
0	0,10	0,10
1	0,25	0,15
2	0,6	0,35
3	0,8	0,20
4	1,0	0,20
		<u>1,0</u>

$$a) \text{Prob}(X > 2) = 1 - \text{Prob}(X \leq 2) = 1 - F(2) \\ = 1 - 0,6 = \underline{0,40}$$

b)

$$F(0) = P(X \leq 0) = f(0) = \underline{0,10}$$

$$F(1) = f(0) + f(1) = 0,25 \rightarrow f(1) = \underline{0,15}$$

$$F(2) = f(0) + f(1) + f(2) = 0,60 \rightarrow f(2) = 0,60 - 0,10 - 0,15 = \underline{0,35}$$

$$F(3) = f(0) + f(1) + f(2) + f(3) = 0,8 \rightarrow f(3) = 0,80 - 0,1 - 0,15 - 0,35 = \underline{0,20}$$

$$f(4) = 1,0 - 0,10 - 0,15 - 0,35 - 0,20 = \underline{0,20}$$

(Confirmação de a) $\text{Prob}(X > 2) = f(3) + f(4) = 0,20 + 0,20 = 0,40 \checkmark$

$$c) E(X - \mu)^3 = \sum (x - \mu)^3 f(x)$$

$$\mu = E(X) = \sum x f(x) = 2,25$$

X	f(x)	X · f(x)	(X - E(X)) ³	X · f(x)
0	0,10	0 × 0,10 = 0	(0 - 2,25) ³ = -11,390625	-1,1390625
1	0,15	1 × 0,15 = 0,15	(1 - 2,25) ³ = -1,953125	-0,2929687
2	0,35	2 × 0,35 = 0,7	(2 - 2,25) ³ = -0,015625	-0,0054687
3	0,20	3 × 0,20 = 0,6	(3 - 2,25) ³ = +0,421875	0,084375
4	0,20	4 × 0,20 = 0,8	(4 - 2,25) ³ = +5,359375	1,071875
		<u>2,25</u>		<u>-0,2812499</u>

t	$I_{t/t-1}$	$I_{t/0}$
1	120	120
2	125	150
3	120	180
4	130	234

a)	0.50
b) i)	1.0
ii)	0.50
c)	1.0

a)	0.1
b) i)	0.8
ii)	0.1
c)	1.0
d)	1.0

a) $I_{2/1} = 125$

$$\frac{P_2}{P_1} - 1 = \text{taxa cresc} = \frac{I_{2/1}}{100} - 1 = \frac{125}{100} - 1 = 1.25 - 1 = 0.25$$

○ Entre $t=1$ e $t=2$ a taxa cresceu 25%

b) i)

ii) Circularidade

$$I_{0/0} = 100$$

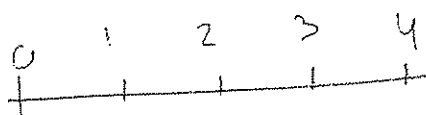
$$I_{1/0} = 120$$

$$I_{2/0} = \frac{I_{2/1} \times I_{1/0}}{100} = \frac{125 \times 120}{100} = 150$$

$$I_{3/0} = \frac{I_{3/2} \times I_{2/1} \times I_{1/0}}{100} = \frac{120 \times 125 \times 120}{100 \times 100} = 180$$

$$I_{4/0} = \frac{I_{4/3}}{100} \times \frac{I_{3/2}}{100} \times \frac{I_{2/1}}{100} \times \frac{I_{1/0}}{100} \times 100 = 234$$

$$\frac{P_4}{P_0} - 1 = \text{taxa} = \frac{I_{4/0}}{100} - 1 = \frac{234}{100} - 1 = 1.34$$



$$P_1 = P_0(1+x)$$

$$P_2 = P_0(1+x)^2$$

$$P_4 = P_0(1+x)^4$$

$$\frac{P_4}{P_0} = (1+x)^4$$

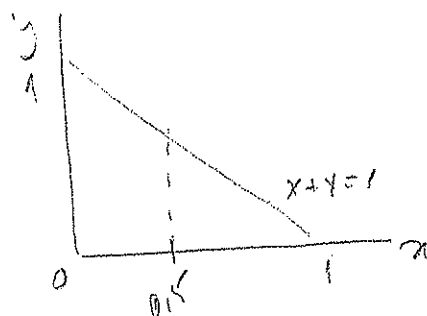
$$(1+x)^4 = \frac{P_4}{P_0} = \frac{I_{4/0}}{100}$$

$$(1+x)^4 = 2.34$$

$$1+x = 1.237$$

$$x = 0.237$$

$$f(x, y) = 24xy$$



$$x + y < 1$$

$$0 < y < 1 - x$$

$$a) f(x) = \int_{Dy} f(x, y) dy$$

$$f(x) = \int_0^{1-x} (24xy) dy = (24x) \int_0^{1-x} y dy$$

$$= (24x) \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^{1-x} = 12x(1-x^2) \quad 0 < x < 1$$

$$f(x) = 12x(1-x)^2 = 12x(1-2x+x^2) = 12(x-2x^2+x^3)$$

$$\boxed{f(x) = 12x(1-x)^2 = 12(x-2x^2+x^3)} \quad 0 < x < 1$$

$$b) E(x) = \int_{Dx} x \cdot f(x) dx = \int_0^1 x \cdot 12(x-2x^2+x^3) dx$$

$$= 12 \left[\frac{x^3}{3} - 2 \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} \right]_0^1 = 12 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} \right)$$

$$= 12 \left(\frac{10 - 15 + 6}{30} \right) = \frac{12}{30} = \frac{6}{15} = \left(\frac{2}{5} \right)$$

c)

$$i) f(y|x) = \frac{24 \pi y}{12 \pi (1-x)^2} = \frac{2 y}{(1-x)^2}$$

$$\begin{aligned} x+y &< 1 \\ 0 < x < 1 \\ 0 < y < 1 \end{aligned}$$

2

$$ii) \int_0^{1-x} \left[\frac{2 y}{(1-x)^2} \right] dy = \int_0^{1-x} \frac{2 y}{(1-x)^2} dy = \frac{2}{(1-x)^2} \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^{1-x}$$

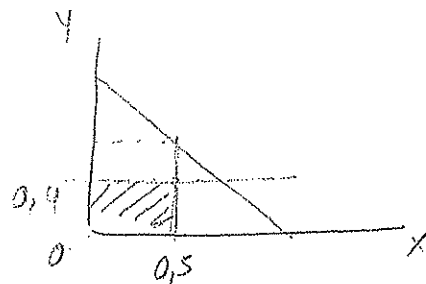
$$= \frac{2}{(1-x)^2} \cdot \frac{(1-x)^2}{2} = 1 \quad \checkmark$$

$$ii) P_{\text{os}}(Y < 0,4 | X < 0,5) = \frac{P_{\text{os}}(X < 0,5 \wedge Y < 0,4)}{P_{\text{os}}(X < 0,5)}$$

3

$$\int_0^1 \int_0^1 (24 \pi y) dy dx$$

$$\int_0^{0,5} \int_0^{0,4} (24 \pi y) dy dx$$



$$24 \pi \int_0^{0,5} x \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^{0,4} dx = 12 \int_0^{0,5} x \times 0,4^2 dx$$

$$1,92 \int_0^{0,5} x dx = 1,92 \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{0,5} = 0,96 \times 0,5^2 = 0,24$$

Numerador

Denomin.

$$P_{\text{os}}(X < 0,5) = \int_0^{0,5} 12 (\pi - 2\pi^2 + \pi^3) dx$$

$$= 12 \left[\frac{\pi^2}{2} - 2 \frac{\pi^3}{3} + \frac{\pi^4}{4} \right]_0^{0,5} = 12 (0,125 - 0,08(3) + 0,015625)$$

$$= 0,6875008$$

$$P_{\text{os}}(Y < 0,4 | X < 0,5) = \frac{0,24}{0,6875008} = 0,349 \approx \underline{0,35}$$



LICENCIATURAS EM ECONOMIA E GESTÃO

ESTATÍSTICA I

2º Teste – 9 de Junho de 2008

**APRESENTE TODOS OS CÁLCULOS EFECTUADOS
JUSTIFIQUE TODAS AS SUAS RESPOSTAS**

I (5,0 valores)

Numa companhia de seguros automóvel, os prémios cobrados aos condutores são função da respectiva idade sendo considerados 3 grupos etários:

Grupo A (menos de 25 anos) e que representa 22% dos clientes;

Grupo B (25 – 39 anos) e que representa 43% dos clientes;

Grupo C (40 ou mais anos de idade).

Sobre esses grupos etários, os registos da empresa mostram que:

11% dos clientes do grupo A têm um acidente por ano;

3% dos clientes do grupo B têm um acidente por ano;

2% dos clientes do grupo C têm um acidente por ano.

- a) Qual a probabilidade de um cliente da empresa, escolhido ao acaso, ter um acidente por ano? Justifique.
- b) O cliente X teve um acidente de automóvel. Qual a probabilidade deste cliente ter menos de 25 anos de idade? Justifique.

Admita agora que a companhia de seguros, no caso de clientes com menos de 25 anos de idade (grupo A), os classifica também em função do número de anos de carta de condução: um quarto destes clientes tem a carta há menos de 3 anos e, dentro destes, 13% têm um acidente por ano; quanto aos condutores com carta há 3 ou mais anos, 5% têm um acidente por ano.

- c) Um jovem de 22 anos fez uma apólice de seguro com esta companhia e, no espaço de um ano, teve um acidente. Qual a probabilidade deste jovem ter a carta há menos de 3 anos?

II (4,0 valores)

Sejam A , B e C três acontecimentos definidos no mesmo espaço de resultados relativamente aos quais se sabe que:

A e B são independentes;

$$Prob(A) = 0,30; \quad Prob(B) = 0,25; \quad Prob(C) = 0,10;$$

$$Prob(B \cap \bar{C}) = 0,20; \quad Prob(A \cap C) = 0$$

- a) Verifique se os acontecimentos A e C são independentes. Justifique.
- b) Calcule: $Prob(A \cup B \cup C)$
- c) Calcule: $Prob[A | (B \cup C)]$

III (5,0 valores)

Na empresa A , o número de linhas telefónicas que, num dado momento, estão ocupadas é uma variável aleatória X com a seguinte função distribuição $F(x) = 2F(x-1)$

- a) Sabe-se que a probabilidade de, num dado momento, nenhuma linha estar ocupada é igual a 0,125. Determine o número máximo de linhas que, num dado momento, podem estar a ser utilizadas de modo a assegurar que $F(x)$ representa a função de distribuição da variável aleatória X .
- b)
 - i) Determine a função de probabilidade da variável aleatória X ;
 - ii) Determine a função geradora de momentos da variável aleatória X ;
 - iii) Usando a função obtida em ii) calcule o $E(X)$.

Na empresa B , o número de linhas telefónicas ocupadas em cada momento é uma variável aleatória Y tal que $Y = 2X - 3$.

- c)
 - i) Calcule o valor esperado da variável aleatória Y .
 - ii) Partindo da função geradora de momentos da variável X , construa a função geradora de momentos da variável Y e confirme, a partir dela, o resultado de i).

IV (6,0 valores)

A função densidade de probabilidade conjunta das variáveis aleatórias X e Y é representada por:

$$f(x, y) = \begin{cases} 6(1-y) & 0 < x < y < 1 \\ 0 & \text{outros valores de } x \text{ e } y \end{cases}$$

- a) Calcule $E(X)$
- b) Calcule $E[(1-Y) | X]$
- c) Calcule $Prob(Y < 2X)$

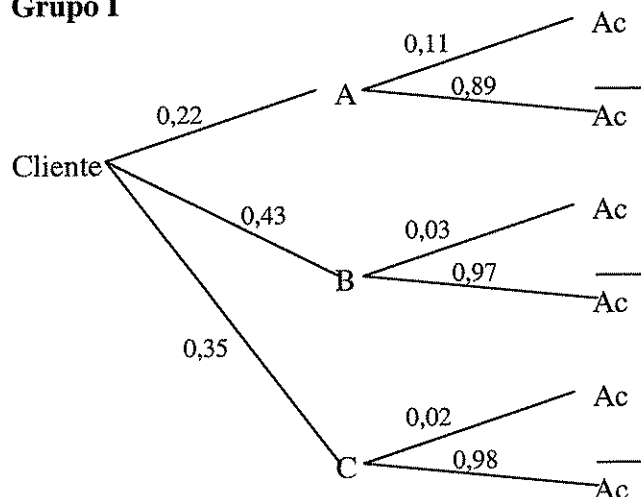
LICENCIATURAS EM ECONOMIA E GESTÃO

ESTATÍSTICA I

2º Teste – 9 de Junho de 2008

Resolução

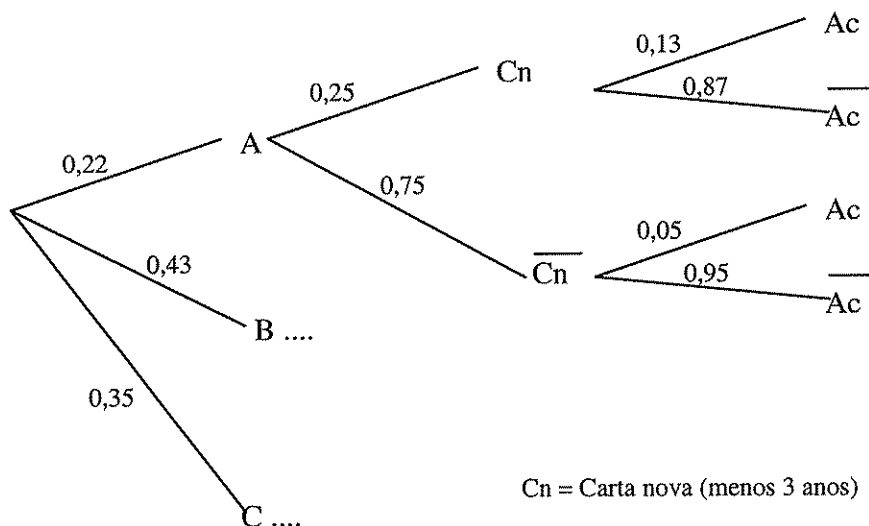
Grupo I



a) $P(Ac) = 0,22 \times 0,11 + 0,43 \times 0,03 + 0,35 \times 0,02 = 0,044$

b) $P(A/Ac) = \frac{P(A \cap Ac)}{P(Ac)} = \frac{0,22 \times 0,11}{0,044} = 0,55$

c)



Cn = Carta nova (menos 3 anos)

$$P(Cn/Ac \cap A) = \frac{P(Cn \cap Ac \cap A)}{P(Ac \cap A)} = \frac{0,22 \times 0,25 \times 0,13}{0,22 \times 0,25 \times 0,13 + 0,22 \times 0,75 \times 0,05} = 0,46$$

Grupo II a) Os acontecimentos A e C serão independentes se $Prob(A \cap C) = Prob(A) \times Prob(C)$.

Neste caso, temos $Prob(A \cap C) = 0$ e $Prob(A) > 0$ e $Prob(C) > 0$, logo os acontecimentos A e C, sendo mutuamente exclusivos, não são independentes.

b)

$$Prob(A \cup B \cup C) = Prob(A) + Prob(B) + Prob(C) - Prob(A \cap B) - Prob(A \cap C) - Prob(B \cap C) + Prob(A \cap B \cap C)$$

Sabemos que: $Prob(A \cap C) = 0$ (enunciado);

$Prob(A \cap B) = Prob(A) \times Prob(B) = 0,075$ porque A e B são independentes;

$$Prob(B \cap \bar{C}) = Prob(B) - Prob(B \cap C) = 0,20 \Rightarrow Prob(B \cap C) = 0,25 - 0,20 = 0,05$$

$$Prob(A \cap B \cap C) = 0 \text{ (porque } (A \cap C) = 0$$

$$\Rightarrow Prob(A \cup B \cup C) = 0,30 + 0,25 + 0,10 - 0,30 \times 0,25 - 0 - 0,05 - 0 = 0,525$$

$$\begin{aligned} \text{c) } Prob[A | (B \cup C)] &= \frac{Prob[A \cap (B \cup C)]}{Prob(B \cup C)} = \frac{Prob[(A \cap B) \cup (A \cap C)]}{Prob(B) + Prob(C) - Prob(B \cap C)} \\ &= \frac{Prob(A \cap B) + Prob(A \cap C) - Prob(A \cap B \cap C)}{Prob(B) + Prob(C) - Prob(B \cap C)} \\ &= \frac{Prob(A \cap B) + Prob(A \cap C) - Prob(A \cap B \cap C)}{Prob(B) + Prob(C) - Prob(B \cap C)} \\ &= \frac{0,075 + 0 - 0}{0,25 + 0,10 - 0,05} = 0,25 \end{aligned}$$

Grupo III

X: "Nº de linhas telefónicas ocupadas em cada momento na empresa A"

$$x_i = 0, \dots, ?$$

$$F(x) = 2F(x-1)$$

a)

x_i	$F(x_i)$	$f(x_i)$
0	0,125	0,125
1	0,25	0,125
2	0,5	0,25
3	1	0,5

No máximo, há 3 linhas ocupadas em cada momento.

b)

$$M_x(t) = E(e^{tx}) = \sum_{i=0}^3 e^{tx_i} f(x_i) = e^{0t} \times 0,125 + e^{1t} \times 0,125 + e^{2t} \times 0,25 + e^{3t} \times 0,5$$

$$M_x(t) = 0,125 + 0,125 e^t + 0,25 e^{2t} + 0,5 e^{3t}$$

c) $E(X) = \mu'_1 = \frac{dM_x(t)}{dt} \Big|_{t=0} = 0,125 + 0,5 + 1,5 = 2,125$

Y: "Nº de linhas telefónicas ocupadas em cada momento na empresa B"

$$Y = 2X - 3$$

i) $E(Y) = E(2X - 3) = E(2X) - E(3) = 2E(X) - 3 = 2 \times 2,125 - 3 = 1,25$

ii) $M_y(t) = E(e^{ty}) = E(e^{t(2x-3)}) = \sum_{i=0}^3 e^{t(2x_i-3)} f(x_i)$

$$M_y(t) = e^{t(2 \times 0 - 3)} \times 0,125 + e^{t(2 \times 1 - 3)} \times 0,125 + e^{t(2 \times 2 - 3)} \times 0,25 + e^{t(2 \times 3 - 3)} \times 0,5$$

$$M_y(t) = 0,125 e^{-3t} + 0,125 e^{-t} + 0,25 e^t + 0,5 e^{3t}$$

$$E(Y) = \mu'_1 = \frac{dM_y(t)}{dt} \Big|_{t=0} = -3 \times 0,125 - 0,125 + 0,25 + 1,5 = 1,25$$

Grupo IV

$$f(x, y) = \begin{cases} 6(1-y) & 0 < x < y < 1 \\ 0 & \text{outros valores de } x \text{ e } y \end{cases}$$

a)

$E(X) = \int_x x \cdot f(x) dx$ em que $f(x)$ representa a função de densidade de probabilidade

marginal da variável X.

$$f(x) = \int_y f(x, y) dy = \int_x^1 6(1-y) dy = (...) = 3(1-2x+x^2) \text{ para } 0 < X < 1$$

$$E(X) = \int_0^1 x [3(1-2x+x^2)] dx = (...) = 0,25$$

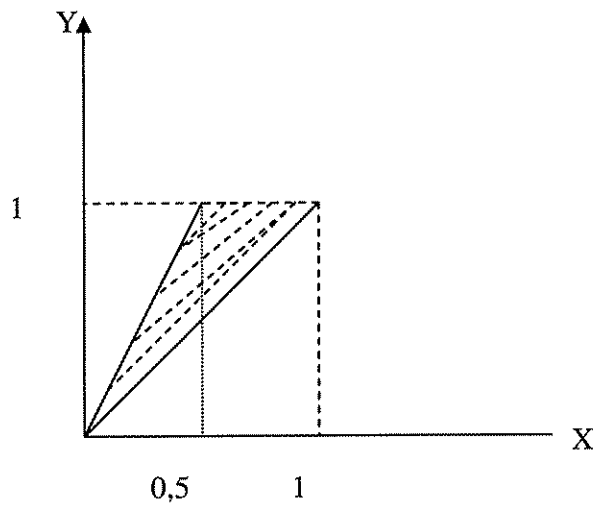
b) $E[(1-Y) | X] = \int_y (1-y) f(y|x) dx$

$$f(y|x) = \frac{f(x, y)}{f(x)} = \frac{6(1-y)}{3(1-2x+x^2)} = \frac{2(1-y)}{1-2x+x^2}$$

$$E[(1-Y)|X] = \int_x^1 (1-y) \frac{2(1-y)}{1-2x+x^2} dx = (\dots) = \frac{2}{3}(1-x)$$

c)

Ilustração: Queremos determinar a probabilidade de as variáveis X e Y se encontrarem na área assinalada.



$$\Pr ob(Y < 2X) = \int \int_{y < 2x} f(x, y) dx dy =$$

$$\int_0^1 \left[\int_{y/2}^y 6(1-y) dx \right] dy = (\dots) = 1/2$$

LICENCIATURAS EM ECONOMIA E GESTÃO

ESTATÍSTICA I

Exame Final – 25 de Junho de 2008

APRESENTE TODOS OS CÁLCULOS EFECTUADOS
JUSTIFIQUE TODAS AS SUAS RESPOSTAS

I (6,0 valores)

A empresa ABC comercializa dois produtos, X e Y. Os registos históricos da empresa sobre o número de unidades de X e Y vendidas em cada dia permitiu construir o seguinte quadro de “frequência relativa conjunta do número de unidades vendidas diariamente dos produtos X e Y”.

X \ Y	Y			
	0	2	4	6
1	0.05	0.10	0.15	0.20
2	0.04	0.08	0.12	0.16
3	0.01	0.02	0.03	0.04

- a) Determine:
 - i) A percentagem de dias com vendas de Y superiores a 2 unidades;
 - ii) A percentagem de dias com vendas de X inferiores a 3 unidades;
 - iii) A percentagem de dias com vendas de Y superiores a 2 unidades e, simultaneamente, vendas de X inferiores a 3.
 - iv) Analise em conjunto os resultados obtidos em i), ii) e iii) e interprete-os.
- b) De entre os dias em que são vendidas 3 unidades de X, qual a percentagem daqueles em que são vendidas 4 ou mais unidades de Y?
- c)
 - i) Determine $S_{2,4}$
 - ii) Determine $\tilde{S}_{2,4}$
- d) Averigúe qual dos dois produtos regista maior dispersão das vendas diárias.

- e) Calcule, para o produto Y, as medidas de tendência central que conhece e verifique se, a partir delas, é possível concluir algo sobre a simetria das vendas diárias daquele produto.
- f) O Director de Vendas da empresa está preocupado porque suspeita que, ao vender simultaneamente os dois produtos da empresa, quando o número de unidades vendidas de um dos produtos sobe, o número de unidades vendidas do outro produto desce. O Director de Vendas tem razão ou não? Justifique quantificadamente.

II (2,0 valores)

Num estudo recente sobre o comportamento das exportações portuguesas ao longo da década 1995-2005, calculou-se o Índice de Gini para o *valor das exportações por produtos* (variável V) e para o *valor das exportações por países de destino* (variável W), tendo-se obtido os seguintes valores:

	1995	2000	2005
Índice de Gini para as exportações por produtos (V)	0,757	0,759	0,73
Índice de Gini para as exportações por mercados (W)	0,943	0,944	0,939

Fonte. Gabinete de Estratégia e Estudos, MEI

- a) Comente o grau de concentração das exportações portuguesas por países de destino (variável W) em 1995 e a evolução verificada ao longo da década seguinte (máximo 5 linhas)
- b) Compare a situação de concentração das exportações portuguesas por produtos (variável V) com a das exportações por mercados de destino (variável W) em qualquer dos anos apresentados (máximo 5 linhas)

III (5,0 valores)

Sabe-se que, na produção de determinado artigo industrial, podem ocorrer defeitos de tipo A, com probabilidade igual a 10%, e defeitos de tipo B, com probabilidade igual a 5%. Um artigo sem qualquer defeito é considerado um “artigo perfeito”.

- a) Qual a probabilidade de um artigo, escolhido ao acaso, ser um artigo perfeito?
- b) Qual a probabilidade de um artigo que não está perfeito ter um defeito de tipo A?

Seja X a variável aleatória que representa o “número de defeitos de um artigo escolhido ao acaso”.

- c) Construa a função de probabilidade da variável X .
- d) i) Obtenha a função geradora de momentos da variável X ;
- ii) Utilizando a função anterior calcule $E(2 + 2X^2)$

IV (7,0 valores)

Considere as variáveis aleatórias X e Y com a função densidade de probabilidade conjunta

$$f(x, y) = \begin{cases} 4y^2 & 0 < X < Y < 1 \\ 0 & \text{outros valores de } X \text{ e } Y \end{cases}$$

- a) Obtenha a função densidade de probabilidade marginal da variável Y
- b) Obtenha a função de distribuição marginal da variável Y
- c) Obtenha a função densidade de probabilidade condicional da variável X dado Y
- d)
 - i) Calcule $E(X | Y)$
 - ii) Partindo do resultado da alínea anterior, calcule $E(X)$

LICENCIATURAS EM ECONOMIA E GESTÃO

ESTATÍSTICA I

Exame Final – 25 de Junho de 2008

CORRECÇÃO

Grupo I

x \ y	0	2	4	6	f(x)
1	0,05	0,1	0,15	0,2	0,5
2	0,04	0,08	0,12	0,16	0,4
3	0,01	0,02	0,03	0,04	0,1
f(y)	0,1	0,2	0,3	0,4	

a)

i) $f(y > 2) = 0,3 + 0,4 = 0,7$

ii) $f(x < 3) = 0,5 + 0,9 = 0,9$

iii) $f(x < 3; y > 2) = 0,15 + 0,2 + 0,12 + 0,16 = 0,63$

iv) $f(x < 3; y > 2) = f(x < 3) f(y > 2)$ porque: $0,63 = 0,7 * 0,9$

Para este par de valores verifica-se a condição de independência das variáveis X e Y. Contudo, tal não garante que X e Y sejam independentes. Teria que se verificar a mesma relação para todos os pares de valores (x;y).

b) $f(y \geq 4 | x = 3) = \frac{f(x = 3; y \geq 4)}{f(x = 3)} = \frac{0,03 + 0,04}{0,1} = 0,7$

Em 70% dos dias em que são vendidas 3 unidades de X, as vendas de Y são superiores ou iguais a 4.

c)

i) $s_{2,4} = 0,05 + 0,1 + 0,15 + 0,04 + 0,08 + 0,12 = 0,54$

ii) $\tilde{s}_{2,4} = 0,04$

d)

$$\bar{X} = \sum x_i f_i = 1.6$$

$$S_x^2 = \sum x_i^2 f_i - \bar{X}^2 = 3 - 1.6^2 = 0.44$$

$$S_x = \sqrt{S_x^2} = \sqrt{0.44} = 0.66$$

$$Cv = \frac{0.66}{1.6} \times 100 = 41.5\%$$

$$\bar{Y} = \sum y_j f_j = 4$$

$$S_y^2 = \sum y_j^2 f_j - \bar{Y}^2 = 20 - 4^2 = 4$$

$$S_y = \sqrt{S_y^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$Cv = \frac{2}{4} \times 100 = 50\%$$

Conclusão: as vendas do produto Y são mais dispersas que as do produto X, pois o $Cv(Y)$ é superior ao de X.

e)

$$\bar{Y} = \sum y_j f_j = 4 \quad Mo(y)=6 \quad Me(y)=4$$

$Mo > Me = \bar{Y}$ Não é conclusivo quanto à simetria

f) Director tem razão se a relação linear entre X e Y existir e for negativa.

Para confirmar, basta calcular a $Cov(X, Y) = 6.4 - 16.4 = 0$

Interpretação: Para os dados disponíveis não existe relação linear entre as vendas do produto X e as vendas do produto Y, podendo ou não existir uma relação não linear entre elas. Não existindo uma relação linear negativa, o Director de Vendas não tem razão.

Grupo II

	1995	2000	2005
Índice de Gini para as exportações por produtos (V)	0,757	0,759	0,73
Índice de Gini para as exportações por mercados (W)	0,943	0,944	0,939

Fonte. Gabinete de Estratégia e Estudos, MEI

- Em 1995 existia uma elevada concentração geográfica das exportações portuguesas (índice de Gini de 0,943), significando isto que uma elevada parcela das exportações portuguesas destinava-se a um número reduzido de países. A concentração geográfica das exportações portuguesa manteve-se elevada na década 1995-2005, ainda que reduzindo-se muito ligeiramente entre 2000 e 2005 (índice de Gini passou de 0,944 em 2000 para 0.939 em 2005).
- Em qualquer dos anos apresentados a concentração das exportações por produtos, sendo também significativa (índice de Gini entre 0.73 e 0.757), é bastante inferior à concentração por países de destino (índice de Gini entre 0.939 e 0.943). Tal significa

que embora a distribuição das exportações por produtos esteja longe da situação de igual distribuição, está menos distante que a distribuição das exportações por países de destino.

Grupo III

A: ocorre 1 defeito de tipo A [no máximo ocorre um defeito de tipo A]

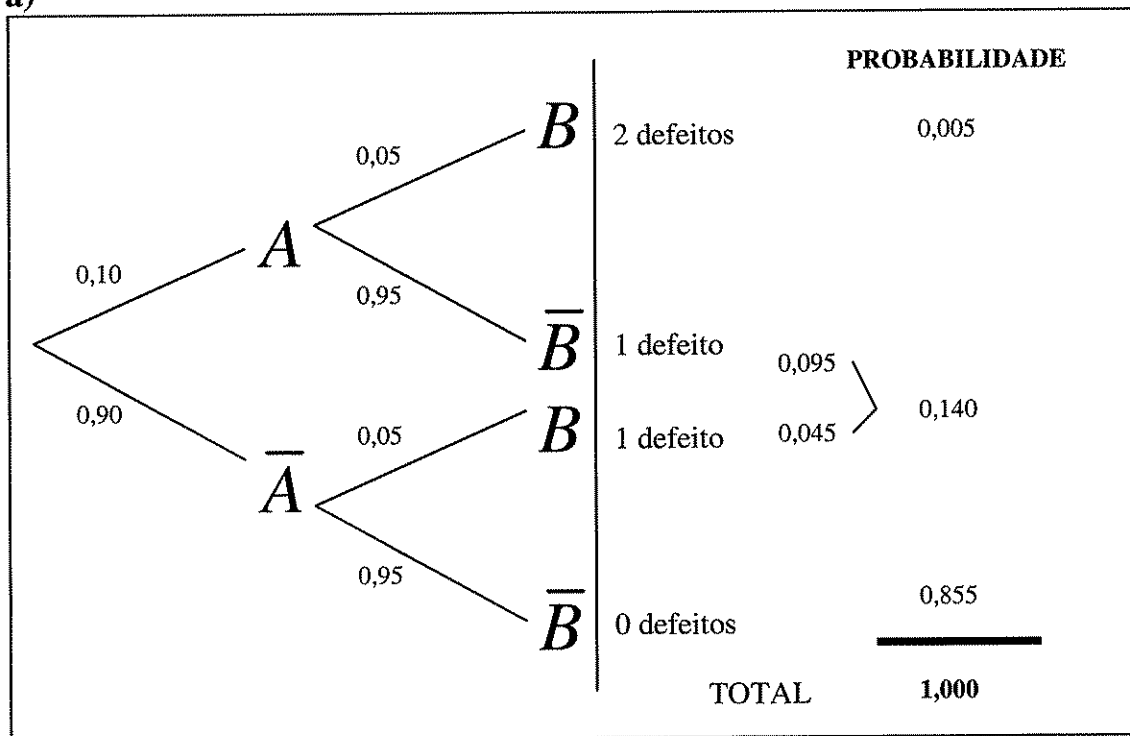
B: ocorre 1 defeito de tipo B [no máximo ocorre um defeito de tipo B]

A e B são acontecimentos independentes

$$P(A)=0,10$$

$$P(B)=0,05$$

a)



$$P(\text{artigo perfeito}) = P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0,90 \times 0,95 = 0,855 \quad \text{ou} \quad 85,5\%$$

Estatística I - Exame

2008/06/25

GRUPO III

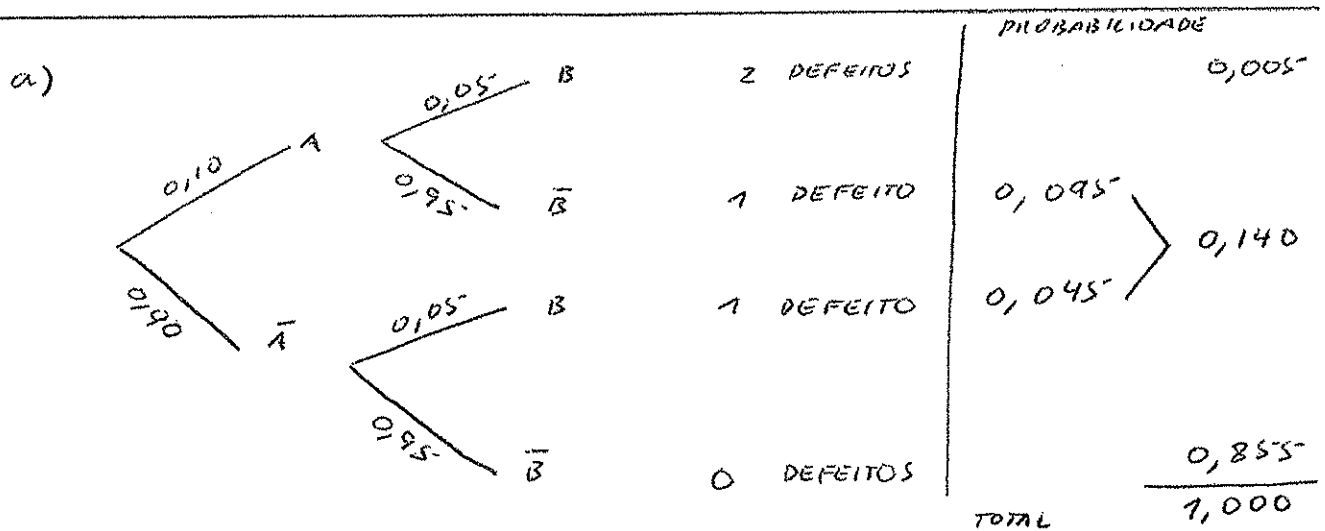
$A \equiv$ ocorre 1 defeito de tipo A [No máximo ocorre um defeito de tipo A]

$B \equiv$ " 1 " " " B [No máximo ocorre um defeito de tipo B]

A e B são acontecimentos independentes.

$$P(A) = 0,10$$

$$P(B) = 0,05$$



$$P(\text{ARTIGO PERFEITO}) = P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0,90 \times 0,95 = 0,855 \text{ ou } 85,5\%$$

$$b) P(\text{ARTIGO N\~AO ESTAR PERFEITO}) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) + P(\bar{A} \cap B) =$$

$$= 0,10 \times 0,05 + 0,10 \times 0,95 + 0,90 \times 0,05 =$$

$$= 0,005 + 0,095 + 0,045 = 0,145$$

$$P(A \mid \text{ARTIGO N\~AO ESTAR PERFEITO}) = \frac{P(A \cap \text{ARTIGO N\~AO ESTAR PERFEITO})}{P(\text{ARTIGO N\~AO ESTAR PERFEITO})} =$$

$$= \frac{0,005 + 0,095}{0,145} = \frac{0,10}{0,145} = 0,68966 \text{ ou } 68,966\%$$

- c) X : número de defeitos de um artigo escolhido ao acaso
 $x = 0; 1; 2$

$$f(x) = \begin{cases} 0,855 & x=0 \\ 0,140 & x=1 \\ 0,005 & x=2 \\ 0 & \text{out. valores de } x \end{cases}$$

valores do diagrama
em árvore de respos-
ta é alínea a).

- d) (i) Obtenção da função geradora de momentos da variável X :

$$\begin{aligned} m(t) &= E[e^{tx}] = \sum_{x_n} e^{tx} f(x) = & [\text{CASO DISCRETO}] \\ &= e^{tx_0} \times 0,855 + e^{tx_1} \times 0,140 + e^{tx_2} \times 0,005 = \\ &= 0,855 + 0,140 e^t + 0,005 e^{2t} \end{aligned}$$

$$(ii) \quad E[2 + 2X^2] = E[2] + E[2X^2] = 2 + 2E[X^2]$$

$$\text{Onde } \mu'_K = E[X^K] = \sum_{x_n} x^K f(x)$$

$$= \left[\frac{d^K m(t)}{dt^K} \right]_{t=0} = \mu'_K$$

donde

$$m'(t=0) = \mu'_1$$

$$m''(t=0) = \mu'_2$$

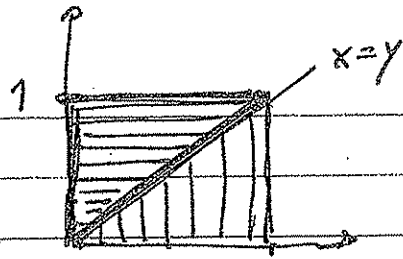
$$m'(t) = 0,140 e^t + 2 \times 0,005 e^{2t}$$

$$m''(t) = 0,140 e^t + 4 \times 0,005 e^{2t}$$

$$m''(t=0) = 0,140 + 4 \times 0,005 = 0,16 = E(X^2)$$

$$2 + 2E[X^2] = 2 + 2 \times 0,16 = 2 + 0,32 = 2,32$$

==



$$a) f(y) = \int_{\mathcal{D}_x} f(x,y) dx = \int_0^y 4y^2 dx =$$

$$= \left[4y^2 x \right]_0^y = 4y^3 \quad 0 < y < 1$$

$$b) F(y) = \int_0^y 4y^3 dy$$

$$= \left[\frac{4y^4}{4} \right]_0^y = y^4$$

$$F(y) = \begin{cases} y^4 & y < 1 \\ 1 & y \geq 1 \end{cases}$$

c)

$$f(x/y) = \frac{f(x,y)}{f(y)} = \frac{4y^2}{4y^3} = \frac{1}{y} \quad (0 < x < y)$$

$$d) E[X/Y] = \int x \cdot f(x/y) dx =$$

$$= \int_0^y x \cdot \frac{1}{y} dx = \left[\frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{y} \right]_0^y = \frac{y^2}{2y} = \left(\frac{y}{2} \right)$$

$$i) E[X]:$$

LICENCIATURAS EM ECONOMIA E GESTÃO

ESTATÍSTICA I

2ª Frequência - 7 de Janeiro de 2008 ✓
2008

I (4 valores)

Uma peça é produzida utilizando sempre três máquinas – as máquinas A, B e C. Cada uma das máquinas tem uma probabilidade de 10% de causar um defeito de produção. Depois de produzida, cada peça é avaliada: • se a peça não tiver nenhum defeito de produção, passa para a secção de embalagem; • se a peça tiver três defeitos de produção, é enviada para a sucata; • nos restantes casos, os defeitos são corrigidos manualmente e a peça vai para a secção de embalagem.

Na secção de embalagem a peça passa por mais duas máquinas – as máquinas D e E. Na máquina D há 5% de probabilidade de haver um defeito de embalagem e na máquina E essa probabilidade é de 20%. Depois de embalada, cada peça é novamente avaliada: • se a peça não tiver nenhum defeito de embalagem segue para a secção de vendas; • se tiver dois defeitos de embalagem é mandada para a sucata; • se tiver um defeito de embalagem é novamente embalada, manualmente, e segue para a secção de vendas.

Sabe-se também que: • Cada uma das máquinas (de fabrico ou de embalagem) só pode causar, no máximo, um defeito em cada peça. • O funcionamento de cada uma das máquinas é independente do funcionamento das restantes máquinas.

- a) i) Qual a probabilidade da peça ser enviada para a sucata na secção de produção? Justifique.
- ii) Qual a probabilidade de os defeitos de produção serem corrigidos manualmente? Justifique.
- b) Uma peça foi mandada para a sucata. Qual a probabilidade de isso ter acontecido na secção de produção? Justifique os cálculos.
- c) Suponha que, para corrigir manualmente um defeito de produção, há um custo 20euros. Qual o valor esperado do custo com a correcção manual dos defeitos de produção? Justifique.

Notas:

- Se desejar, pode utilizar a seguinte notação: X_i Número de defeitos de produção ($i = 0, 1, 2, 3$); Y_j Número de defeitos de embalagem ($j = 0, 1, 2$)
- Não arredonde os resultados em todas as alíneas, excepto se tiverem mais de cinco casas decimais.

II (5,5 valores)

O número de chamadas telefónicas efectuadas diariamente, por engano, para determinado “call-center” é uma variável aleatória (X) sobre a qual, com base na informação histórica, se sabe o seguinte:

- Nunca ultrapassa as 4 chamadas;
- Todos os dias há, pelo menos, 1 chamada feita por engano;
- A probabilidade de ser feita 1 chamada por engano é o triplo da probabilidade de serem feitas 2 chamadas;
- A probabilidade de serem feitas 3 chamadas por engano é igual à probabilidade de serem feitas 4 chamadas;
- A probabilidade de serem feitas 2 chamadas por engano é metade da probabilidade de serem feitas 4 chamadas.

- a) Construa a função de probabilidade da variável aleatória X .
- b) i) Construa a função geradora de momentos da variável X
- ii) Utilizando a função obtida em i) calcule a média e desvio padrão do número de chamadas efectuadas por engano

O “call-center” conta com 3 colaboradores. Devido ao absentismo, o número de colaboradores que diariamente está, efectivamente, a trabalhar é também uma variável aleatória, Y , da qual se sabe que:

- O “call-center” tem sempre alguém a trabalhar
- Os valores possíveis para Y são equiprováveis

- c) Construa a função de probabilidade da variável Y .
- d) O absentismo dos trabalhadores provoca custos para a empresa. Sabe-se que esses custos são proporcionais ao número de trabalhadores ausentes em cada dia. Determine o valor esperado e a variância do custo diário suportado pela empresa devido ao absentismo (represente por α factor de proporcionalidade).
- e) Sabendo que X e Y são independentes, construa a função de densidade de probabilidade conjunta $f(x, y)$. Justifique o procedimento adoptado.

III

A) (4,5 valores)

Considere a função de densidade de probabilidade da variável aleatória X representada por:

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq X < 1 \\ 0,5 & 1 \leq X \leq 2 \\ 0 & \text{outros valores de } x \end{cases}$$

- a) Calcule $\text{Prob}(X \geq 0,5 \mid X < 1,5)$;
- b) Determine o valor de $E(2X^2 + 3)$;
- c) Obtenha a função de distribuição da variável X .

B) (6 valores)

Considere a função densidade de probabilidade conjunta das variáveis X e Y representada pela função $f(x, y) = k$ com $0 \leq X \leq 1$ e $0 \leq Y \leq 0,8X$.

- a) Mostre que $k = 2,5$;
- b) Obtenha as funções de densidade de probabilidade marginais de X e Y ;
- c) Obtenha a função de densidade de probabilidade condicional $f(y \mid x)$;
- d)
 - i) Determine $E(Y \mid X)$;
 - ii) Comparando os valores de $E(Y \mid X = 0,5)$ e $E(Y \mid X = 1)$, o que pode concluir quanto à independência estatística entre as variáveis X e Y ? Justifique.

LICENCIATURAS EM ECONOMIA E GESTÃO

ESTATÍSTICA I

2ª Frequência - 7 de Janeiro de 2008

Correcção

II

a)

A partir da informação do enunciado:

1) $X=1, 2, 3, 4$

2)

X	1	2	3	4
f(x)	a	b	c	d

$$a=3b$$

$$c=d$$

$$b=0,5d \Rightarrow d=2b$$

Como: $a+b+c+d=1$, substituindo:

$$3b+b+2b+2b=1 \Rightarrow b=1/8$$

$$a=3/8$$

$$d=2/8$$

$$c=2/8$$

Então, a função de probabilidade da v.a. X, fica:

X	1	2	3	4
f(x)	3/8	1/8	2/8	2/8

b)

c)

A partir da informação do enunciado:

$Y=1, 2, 3$

Y	1	2	3
g(y)	1/3	1/3	1/3

d)

Como X e Y são independentes: $f(x,y) = f(x)*g(y)$

Y/X		1	2	3	4	g(y)
1		0,125	0,041667	0,083333	0,083333	0,333333
2		0,125	0,041667	0,083333	0,083333	0,333333
3		0,125	0,041667	0,083333	0,083333	0,333333
	f(x)	0,375	0,125	0,25	0,25	1

e)

Como X e Y são independentes, $E(Y/X=2) = E(Y)$.

$$E(Y)=1*1/3+2*1/3+3*1/3=2$$

III

A)

B) a)

$$\int_y \int_x f(x,y) dy dx = 1$$

$$\int_0^1 \left[\int_0^{0,8x} k dy \right] dx = k \int_0^1 [y]_0^{0,8x} dx = k \int_0^1 (0,8x) dx = (...) = 1$$

$$\Rightarrow 0,4k = 1 \Rightarrow k = 2,5$$

b)

$$g(x) = \int_y f(x,y) dy = \int_0^{0,8x} (2,5) dy = (...) = 2x$$

$$g(x) = 2x \quad \text{para } 1 \leq X \leq 1$$

$$g(x) = \int_y f(x,y) dy = \int_0^{0,8x} (2,5) dy = (...) = 2x$$

$$g(x) = 2x \quad \text{para } 1 \leq X \leq 1$$

Obtenha as funções de densidade de probabilidade marginais de X e Y;

- c) Obtenha a função de densidade de probabilidade condicional $f(y|x)$;
- d) *i)* Determine $E(Y|X)$;
- ii)* Comparando os valores de $E(Y|X=0,5)$ e $E(Y|X=1)$, o que pode concluir quanto à independência estatística entre as variáveis X e Y ? Justifique.



LICENCIATURAS EM ECONOMIA E GESTÃO

ESTATÍSTICA I

2ª Frequência - 7 de Janeiro de 2007

Resolução:

a)

A partir da informação do enunciado:

1) $X=1, 2, 3, 4$

2)

X	1	2	3	4
f(x)	a	b	c	d

$$a=3b \quad c=d \quad b=0,5d \Rightarrow d=2b$$

Como: $a+b+c+d=1$, substituindo:

$$3b+b+2b+2b=1 \Rightarrow b=1/8$$

$$a=3/8$$

$$d=2/8$$

$$c=2/8$$

Então, a função de probabilidade da v.a. X, fica:

X	1	2	3	4
f(x)	3/8	1/8	2/8	2/8

b)

c)

A partir da informação do enunciado:

$Y=1, 2, 3$

Y	1	2	3
g(y)	1/3	1/3	1/3

d)

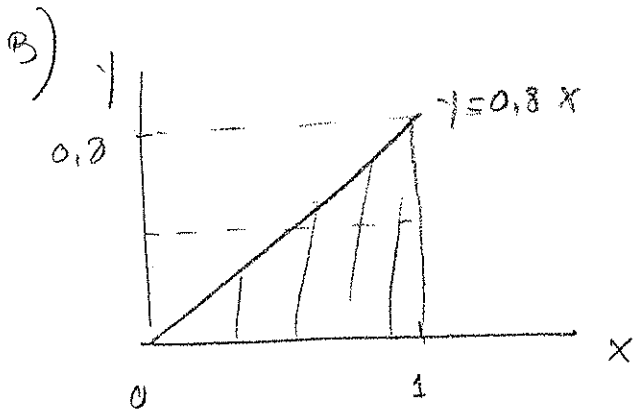
Como X e Y são independentes: $f(x,y) = f(x) \cdot g(y)$

Y/X		1	2	3	4	g(y)
1		0,125	0,041667	0,083333	0,083333	0,333333
2		0,125	0,041667	0,083333	0,083333	0,333333
3		0,125	0,041667	0,083333	0,083333	0,333333
	f(x)	0,375	0,125	0,25	0,25	1

e)

Como X e Y são independentes, $E(Y/X=2) = E(Y)$.

$$E(Y) = 1 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot \frac{1}{3} = 2$$



$$\int_n \int_y f(x, y) dy dx = 1$$

$$\int_0^1 \underbrace{\int_0^{0.8x} k \cdot dy}_{k[y]_0^{0.8x}} dx = \int_0^1 k[y]_0^{0.8x} dx =$$

$$k \int_0^1 0.8x dx = (0.8k) \int_0^1 x dx =$$

$$(0.8k) \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 = 0.8k \times 0.5 = 1$$

$$0.4k = 1$$

$$\underline{k = 2.5}$$

b)

$$g(x) = \int_y f(x, y) dy = \int_0^{0,8x} (2,5) dy$$

$$2,5 \left[y \right]_0^{0,8x} = 2,5(0,8x) = 2x$$

$$g(x) = 2x$$

$$0 < x < 1$$

$$\int_0^1 (2x) dx = \left[x^2 \right]_0^1 = 1$$

$$h(y) = \int_x f(x, y) dx = \int_{\frac{1}{0,8}y}^1 (2,5) dx$$

$$(2,5) dx = (2,5) \left[x \right]_{1,25y}^1$$

$$2,5(1 - 1,25y) = 2,5 - 3,125y$$

$$h(y) = 2,5 - 3,125y$$

$$0 \leq y \leq 0,8$$

$$\int_0^{0,8} (2,5 - 3,125y) dy$$

$$2,5(y)_0^{0,8} - \frac{3,125}{2} (y^2)_0^{0,8}$$

$$2,5 \times 0,8 - 1 = 2 - 1 = 1$$

$$d) f(y|x) = \frac{f(x,y)}{h(x)} = \frac{2,5}{2x} = \frac{1,25}{x}$$

III -

$$0 \leq y \leq 0,8x$$

$$\int_0^{0,8x} \frac{1,25}{x} dy = \left(\frac{1}{x}\right) 1,25 \left[y\right]_0^{0,8}$$

$$= \left(\frac{1}{x}\right) \cdot 1,25 \cdot (0,8x - 0) = 1$$

$$E[y|x] = \int_y y \cdot f(y|x) \cdot dy = \int_0^{0,8x} y \left(\frac{1,25}{x}\right) dy$$

$$\frac{1,25}{x} \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{0,8x} = \frac{1,25}{x} \cdot \frac{1}{2} (0,64x^2 - 0) =$$

$$E(y|x) = 0,4x$$

$$E[y|x] = 0,4x$$

$$E[y|x=0,5] = 0,4 \times 0,5 = 0,2$$

$$E[y|x=1] = 0,4 \times 1 = 0,4$$

$$E[Y|X] = 0,4x$$

Verificação

III -

$$E(Y) = E_x[0,4x] = \int_0^1 (0,4x) f(x) dx = \int_0^1 (0,4x) (2x) dx = \int_0^1 0,8x^2 dx$$

$$= 0,8 \left(\frac{x^3}{3} \right)_0^1 = \frac{0,8}{3} = \underline{0,2(6)}$$

$$E(Y) = \int_0^{0,8} y(2,5 - 3,125y) dy = 2,5 \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^{0,8} - 3,125 \left[\frac{y^3}{3} \right]_0^{0,8}$$

$$2,5 \cdot \frac{0,64}{2} - 3,125 \times \frac{0,8^3}{3} = 0,8 - 1,053(3) = \underline{0,2(6)}$$



LICENCIATURAS EM ECONOMIA E GESTÃO

ESTATÍSTICA I

Exame final - 18 de Janeiro de 2007

I (6 valores)

Numa amostra de 500 pessoas foi efectuado um inquérito sobre o tempo de viagem (medido em minutos) de casa para o trabalho (X) e o número de meios de transporte utilizados nessa viagem (Y).

Variável Y (N.º de Meios de Transporte)		Variável X (Tempo de Viagem, em minutos)			
		[0- 10]] 10- 20]] 20- 40]] 40- 60]
1	1	10	30	120	40
2	2	0	40	60	100
3	3	0	20	20	60

- Construa as distribuições de frequência relativas das variáveis X e Y;
- Construa a distribuição condicional de X para Y=2;
- Verifique se as variáveis X e Y são estatisticamente independentes. Interprete o resultado;
- Construa o histograma e o polígono de frequências relativas da variável X;
- Através das medidas de localização, estude a assimetria da variável X;
- Compare a dispersão da variável X com a dispersão da variável Y. Justifique a escolha do indicador utilizado;
- Determine a percentagem de passageiros cujo tempo de viagem não excede os 30 minutos.

II

A (3 valores)

Numa determinada população, a probabilidade de uma pessoa, escolhida ao acaso, gostar de teatro (acontecimento T) é igual a $1/3$, enquanto que a probabilidade de gostar de cinema (acontecimento C) é igual a $1/2$.

Determine a probabilidade de gostar de teatro e não gostar de cinema nos seguintes casos:

- Gostar de teatro e gostar de cinema são acontecimentos mutuamente exclusivos;
- Gostar de teatro e gostar de cinema são acontecimentos independentes;
- Todos os que gostam de teatro também gostam de cinema;
- A probabilidade de gostar de teatro e de cinema é igual a $1/8$;
- De entre os que não gostam de cinema, a probabilidade de não gostar de teatro é igual a $3/4$.

B (3 valores)

Um instrumento de medição dos níveis de poluição atmosférica incorpora três componentes eletrónicos (A, B e C) que trabalham sem avarias com as seguintes probabilidades, respectivamente: 0.85, 0.90, 0.95. Sabe-se que:

- Se nenhum dos componentes está avariado o sistema funciona sempre;
- Se um dos componentes está avariado, a probabilidade do sistema trabalhar é de 0.8;
- Se dois ou mais componentes estão avariados o sistema não funciona.

Admita que os componentes funcionam independentemente uns dos outros.

- Determine a probabilidade de sistema funcionar
- Sabendo que o sistema está a funcionar, determine a probabilidade de existir um componente avariado no sistema

III

A - (2,5 valores) Considere a função de densidade de probabilidade da variável aleatória X representada por:

$$f(x) = \begin{cases} 1+x & -1 \leq X < 0 \\ 1-x & 0 \leq X \leq +1 \\ 0 & \text{outros valores de } x \end{cases}$$

- Obtenha a função de distribuição da variável X e represente-a graficamente;
- Utilizando a função de distribuição calcule $\text{Prob}(0,5 \leq X < 0,5)$.

B - (3,5 valores) Considere as variáveis aleatórias X e Y relativamente às quais se dispõe da seguinte informação quanto às respectivas distribuições condicionais e marginais:

$$f(Y|X) = \frac{3y^2}{x^3} \text{ para } 0 \leq X \leq 1 \text{ e } 0 \leq Y \leq X.$$

$$f(x) = 5x^4 \text{ para } 0 \leq X \leq 1$$

- Determine o valor esperado e a variância da variável X ;
- Determine $E(Y|X = 0,25)$;
- Determine $E(Y)$. Justifique os cálculos.

C - (2 valores) O número de unidades de produto que são procuradas diariamente numa determinada loja é uma variável aleatória X com função de probabilidade dada por:

$$f(x) = \frac{1}{5} \text{ para } X = 0,1,2,3,4$$

Em cada dia, o vendedor decide o número de unidades de produto que põe à venda: as unidades vendidas durante o dia proporcionam um lucro de 5 euros por unidade; se não forem vendidas, são inutilizadas e isso acarreta um prejuízo de 4 euros por unidade. Num dia em que o vendedor coloca na loja 3 unidades de produto à venda, qual o valor esperado do lucro líquido da empresa?

LICENCIATURAS EM ECONOMIA E GESTÃO

ESTATÍSTICA I

Exame final - 18 de Janeiro de 2007

Resolução:

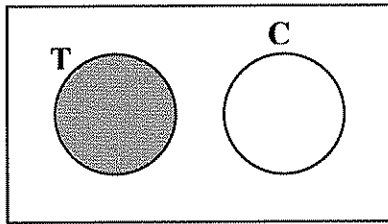
A

T: gostar de teatro $P(T)=1/3$

C: gostar de cinema $P(C)=1/2$

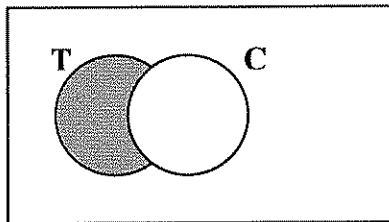
a) Sabe-se que : $P(T \cap C) = 0$, então:

$$P(T \cap \bar{C}) = P(T) = 1/3$$



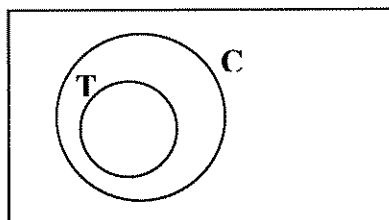
b) Sabe-se que : $P(T \cap C) = P(T) \times P(C)$, então:

$$P(T \cap \bar{C}) = P(T) - P(T \cap C) = P(T) - P(T) \times P(C) = 1/3 - 1/3 \times 1/2 = 1/3 - 1/6 = 1/6 = 0.167$$



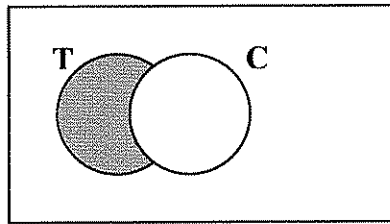
c) Sabe-se que $T \subset C$, então:

$$P(T \cap \bar{C}) = 0$$



d) Sabe-se que $P(T \cap C) = 1/8$, então:

$$P(T \cap \bar{C}) = P(T) - P(T \cap C) = 1/3 - 1/8 = 5/24 = 0.208$$



e) Sabe-se que $P(\bar{T} / \bar{C}) = 3/4$, então:

$$P(T / \bar{C}) = 1 - P(\bar{T} / \bar{C}) = 1/4, \text{ e}$$

$$P(T / \bar{C}) = \frac{P(T \cap \bar{C})}{P(\bar{C})} = \frac{P(T \cap \bar{C})}{1 - P(C)}, \text{ então}$$

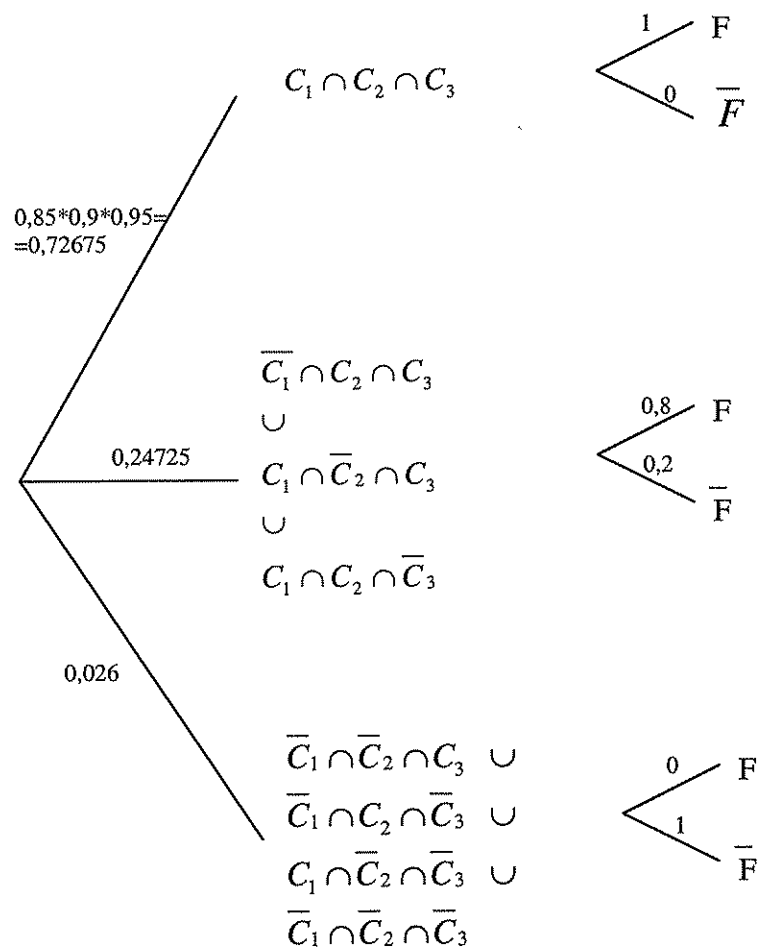
$$P(T \cap \bar{C}) = P(T / \bar{C}) \times (1 - P(C)) = 1/4 \times (1 - 1/2) = 1/8 = 0,125$$

B

C_1 : Componente 1 a funcionar $P(C_1)=0,85$

C_2 : Componente 2 a funcionar $P(C_2)=0,9$

C_3 : Componente 3 a funcionar $P(C_3)=0,95$



a) $P(F) = 0,72675 \times 1 + 0,24725 \times 0,8 + 0,026 \times 0 = 0,92455$

b) $P(1 \text{ componente avariado} / F) = \frac{P(1 \text{ componente avariado} \cap F)}{P(F)} = \frac{0,24725 \times 0,8}{0,92455} = 0,214$